



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

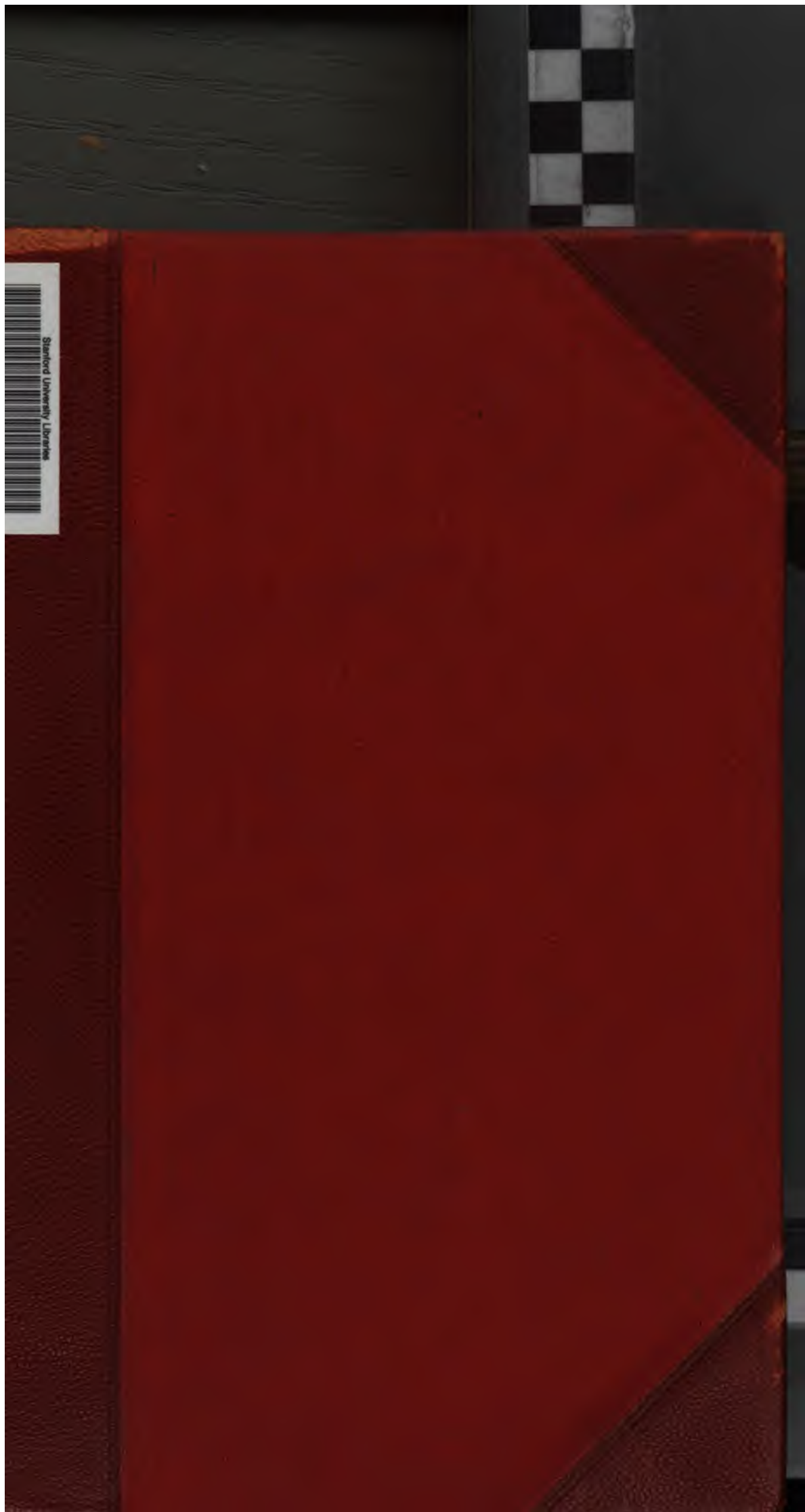
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

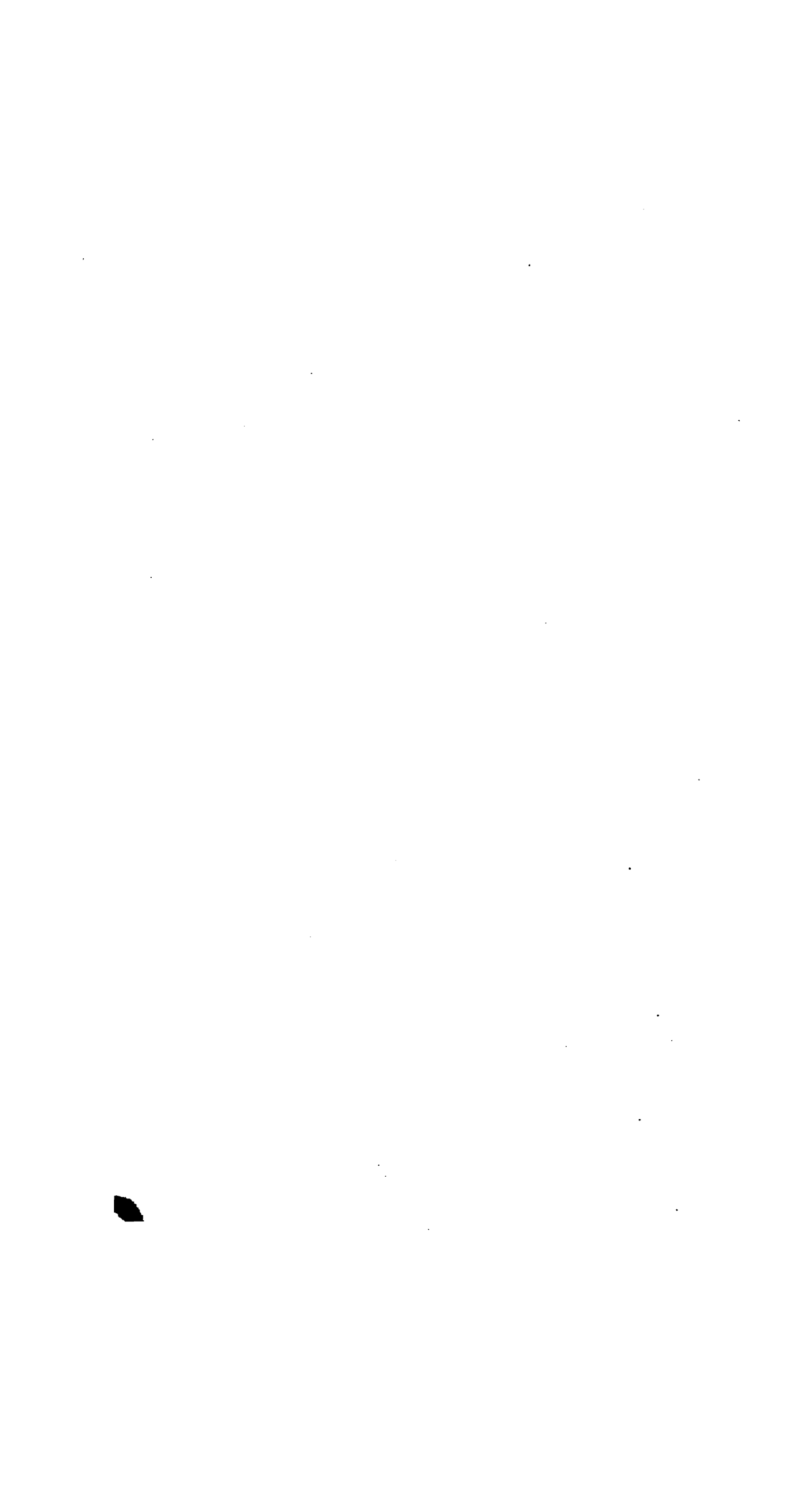
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





44709

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

1

2

44709

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMITÉ DE RÉDACTION.

MM. COLLIGNON.
FOURET.
HALPHEN.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
JORDAN.
MANNHEIM.

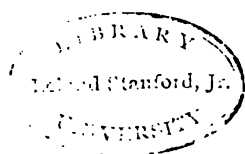
BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1876-77.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1877



Q 60957

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ANNÉE 1877.

Président.....	M. MANNHEIM.
Vice-Présidents	{ M. DARBOUX. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LEMONNIER. M. ROUCHÉ.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. HALPHEN.
Vice-Secrétaires.....	{ M. PICQUET. M. DE POLIGNAC.
Membres du Conseil	{ M. ANDRÉ Désiré). M. BIENAYMÉ. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. BRISSE. M. CHASLES. M. COLLIGNON. M. DE LA GOURNERIE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. PUISEUX. M. RESAL.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. AOUST (l'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les correspondances entre les points de deux courbes ;
par M. HALPHEN.

(Séance du 15 novembre 1876.)

1. Dans ma Note *sur la conservation du genre* ⁽¹⁾, j'ai montré d'une manière directe que, si deux courbes se correspondent *point par point*, elles sont du même genre. L'analyse employée m'a conduit en même temps à une relation plus générale qui a lieu entre deux courbes, lorsqu'à un point de l'une correspond un point de l'autre, et à un point de la seconde *plusieurs* points de la première. M. Zeuthen était antérieurement parvenu, pour le cas où les courbes ne possèdent que des singularités ordinaires, à une relation plus générale concernant les correspondances quelconques ⁽²⁾. Cette relation s'étend avec facilité au cas où les courbes possèdent des singularités élevées. L'importance de ce sujet au point de vue des applications me détermine à y revenir. L'objet de cette Note est donc de démontrer le théorème de M. Zeuthen, étendu comme je viens de le dire, et d'en donner des applications.

2. Dans ma Note précitée, j'ai envisagé deux courbes S , Σ , telles

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 29.

⁽²⁾ *Mathematische Annalen*, t. III.

qu'à un point a de S corresponde un point α de Σ , et qu'à un point α de Σ correspondent k points a de S . Pour passer de là à une correspondance quelconque entre deux courbes Σ , Σ' , il suffit de concevoir une courbe S à chaque point de laquelle corresponde un seul couple de points correspondants α , α' de Σ et Σ' . La courbe S peut être réalisée d'une infinité de manières, et il est inutile d'insister sur ce point. Grâce à l'intermédiaire de cette courbe S , on peut étendre, d'une manière utile, les théorèmes I et II de ma Note précitée ⁽¹⁾.

Soient (S) , (Σ) , (Σ') trois systèmes circulaires de branches, se correspondant sur les trois courbes, et n , ν , ν' leurs ordres respectifs de multiplicité. Je suppose qu'à un point de (Σ) répondent g points de (S) . D'après le théorème I, à un point a pris sur (S) à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de (S) , répond sur (Σ) un point α à distance infiniment petite d'ordre $\sigma = g\nu$ de l'origine de (Σ) . Soit g' le nombre analogue à g pour (Σ') ; alors à a répond sur (Σ') un point dont la distance à l'origine de (Σ') est infiniment petite de l'ordre $\sigma' = g'\nu'$.

De là résulte, en changeant les notations :

THÉORÈME I. — *Si entre les points de deux courbes S , S' existe une correspondance quelconque, et que (S) , (S') soient des systèmes circulaires de branches se correspondant, dont les ordres de multiplicité soient respectivement n , n' ; si à un point de (S) correspondent g points de (S') , et à un point de (S') g' points de (S) , à un point placé sur (S) à distance infiniment petite d'ordre gn de l'origine de (S) correspondent sur (S') des points à distance infiniment petite d'ordre $g'n'$ de l'origine de (S') .*

3. Reprenons les trois courbes S , Σ , Σ' , et appliquons l'équation (16) (p. 38 du t. IV) aux couples S , Σ et S , Σ' . Nous obtenons

$$h(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n = h'(\gamma' - 2\mu') + \Sigma\sigma'.$$

Je change, comme précédemment, les notations, je remplace σ et σ' par leurs valeurs, et j'ai la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Soient deux courbes S , S' telles qu'à un point*

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 32.

de S correspondent k points de S' , et à un point de S' , k' points de S . Si l'on désigne par m, m' les ordres et par c, c' les classes de S et de S' , et par g, n, g', n' les mêmes nombres qu'au théorème I, on a

$$(1) \quad k(c - 2m) - k'(c' - 2m') = \Sigma(g'n' - gn),$$

la sommation s'étendant à tous les couples $(S), (S')$ pour lesquels $(g'n' - gn)$ est différent de zéro.

Dans la sommation, on peut, sans troubler l'égalité, introduire tant d'autres couples $(S), (S')$ que l'on voudra, pourvu qu'on n'omette aucun des précédents. J'écris (1) sous la forme

$$k(c - 2m) - k'(c' - 2m') + \Sigma g(n - 1) - \Sigma g'(n' - 1) = \Sigma(g' - g).$$

Pour évaluer séparément $\Sigma g(n - 1)$, je puis, d'après la remarque précédente, adjoindre à chaque (S) tous les correspondants (S') et par suite écrire

$$\Sigma g(n - 1) = k \Sigma(n - 1).$$

La même remarque s'applique à la somme suivante; j'ai donc

$$k[c - 2m + \Sigma(n - 1)] - k'[c' - 2m' + \Sigma(n' - 1)] = \Sigma(g' - g),$$

et, en désignant par p et p' les genres de S et S' ,

$$(2) \quad 2k(p - 1) - 2k'(p' - 1) = \Sigma(g' - g).$$

C'est une autre forme de la relation (1), que l'on peut exprimer en disant :

Si a et a' sont deux points correspondants sur S et S' et qu'à un point infiniment voisin de a répondent g points infiniment voisins de a' , et à un point infiniment voisin de a' , g' points infiniment voisins de a ; si, en outre, p et p' sont les genres des courbes S, S' , la relation (2) a lieu, le signe sommatoire s'étendant à tous les couples a, a' , pour lesquels $(g' - g)$ est différent de zéro.

C'est précisément sous cette forme que M. Zeuthen a énoncé la proposition, en la limitant au cas où les courbes S et S' n'ont que des singularités ordinaires. Mais de ce cas particulier on peut remonter au cas général. Tous les éléments qui figurent dans (2) se conservent dans les transformations uniformes. Or on sait qu'il

est possible de trouver une courbe correspondant point par point à une courbe quelconque, et qui n'ait que des singularités ordinaires. On peut même faire en sorte que la transformée n'ait que des branches simples, ainsi que je l'ai démontré de diverses manières. Donc la relation (2), démontrée pour le cas des singularités ordinaires, s'étend d'elle-même au cas général.

4. Si l'on considère deux courbes gauches dont S et S' soient les perspectives, tous les éléments ci-dessus considérés sur les courbes ou sur les perspectives ont, dans l'un et l'autre cas, les mêmes définitions. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S et S' sont gauches.

Autre remarque : dans les démonstrations de ma Note sur la conservation du genre, et dans les déductions actuelles, rien n'empêche de supposer que les courbes S et S' soient égales. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S et S' coïncident. Dans ce cas, où, bien entendu, la courbe peut être gauche, la formule (1) devient

$$(3) \quad (h - k')(c - 2m) = \Sigma (g' n' - gn).$$

5. Soient deux courbes algébriques planes ou gauches S , S' et un système de surfaces A . On peut faire correspondre les points a et a' de S , S' , par la condition que les points correspondants a , a' soient sur une même surface A . Appliquant alors à cette correspondance le théorème II, on trouvera que : *le nombre des surfaces d'un système qui touchent une courbe gauche de degré m , arête de rebroussement d'une développable de degré c , est égal à $m\nu + c\mu$, μ étant le nombre des surfaces du système qui passent par un point, et ν le nombre de celles qui touchent une droite*, théorème bien connu et qui a été démontré de diverses autres manières. Je n'insiste pas ici sur cette application, à cause de l'analogie qu'elle présente avec celle que je vais faire en détail. J'y aurai recours à ce théorème même, restreint au cas où la courbe est plane, mais entendu, d'autre part, d'une manière un peu plus générale, savoir :

THÉORÈME III. — *Le nombre des éléments d'un connexe plan qui sont composés d'un point d'une courbe et de la tangente en*

ce point, est égal au produit des ordres de la courbe et du connexe augmenté du produit de leurs classes.

Je donnerai d'ailleurs à la fin de cette Note une démonstration directe d'un théorème un peu plus étendu que le théorème III. Pour le moment, j'en admettrai l'exactitude.

6. On donne une série doublement infinie (A) de courbes A dans un plan, et deux courbes de ce plan S, S'. Je fais correspondre les points a, a' de S, S', par la condition qu'une courbe A touche S en a et passe en a' . Je forme alors l'équation (1).

Soit ρ le nombre des courbes A qui passent en un point et y touchent une droite. Désignant par M le degré de A, j'ai $k = \rho M m'$.

Soit μ le nombre des courbes A qui passent par deux points, et soit ν le nombre de celles qui passent par un point et touchent une droite. D'après le théorème III, j'ai

$$k' = m\nu + c\mu.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le second membre de (1), c'est-à-dire de chercher tous les binômes ($g'n' - gn$) qui ne sont pas nuls. A cet effet, je considère deux divisions principales, savoir : B ($n = n' = 1$ ou g' supérieur à l'unité); et C (n ou n' supérieur à l'unité). J'envisage d'abord les cas B.

Je suppose que a, a' soient deux points simples correspondants, et que g soit supérieur à l'unité. Il peut arriver que, parmi les ρ courbes A qui touchent S en a , quelques-unes soient confondues en une seule. Si ce fait n'a pas lieu, quelques-unes des courbes A peuvent être réduites à des courbes plus simples comptant plusieurs fois dans le degré de A. Enfin les courbes A peuvent ne présenter aucune de ces particularités; c'est qu'alors une d'elles est tangente à S' en a' . Je réunis les deux premières circonstances en admettant que, parmi les ρ courbes A touchant S en a , il y en ait h qui se réunissent en une seule, composée elle-même de différentes courbes A_i dont l'ordre M_i compte s_i fois dans M.

Si l'on suppose la courbe S placée d'une manière arbitraire dans le plan de (A), cette circonstance ne peut se présenter que si elle a lieu pour chaque point l du plan, sous la condition qu'on adjoigne à ce point une droite déterminée λ . On doit donc supposer que cette décomposition des courbes A a lieu toutes les fois que le point l

par où on les fait passer et la droite λ qu'on leur assigne pour tangente en ce point font partie d'un certain connexe. Soient alors ν'' et μ'' l'ordre et la classe de ce connexe. Le nombre des points a de S où cette circonstance se présente est, d'après le théorème III, $m\nu'' + c\mu''$. On a alors

$$n = n' = 1, \quad g = hs_i, \quad g' = 1, \quad n'g' - ng = -(hs_i - 1).$$

La courbe A_i donne lieu à $M_i m'$ points analogues a' . On a ensuite à envisager les autres courbes qui s'adjoignent à A_i pour former une courbe A . Il peut y avoir, en outre, d'autres décompositions analogues. On voit que la somme de tous les binômes ($g'n' - gn$) qui y sont relatifs est de la forme

$$\Sigma_1 = -(m\nu_1 + c\mu_1) m',$$

ν_1 et μ_1 étant des nombres qui ne dépendent que de (A) .

Le second cas où, n et n' étant égaux à l'unité, g est supérieur à l'unité, est celui où A touche S et S' . Le contact avec S' est alors du premier ordre, si l'on suppose les courbes S et S' placées d'une manière arbitraire. Chacun de ces contacts donne

$$n = n' = 1, \quad g = 2, \quad g' = 1, \quad n'g' - ng = -1.$$

Le théorème III fournit le nombre de ces contacts, qui est celui des courbes A touchant S et S' . D'où, pour la somme des binômes ($g'n' - gn$), l'élément

$$\{ \Sigma_1 = -[m m' \mu' + (mc' + m'c) \nu + cc' \mu],$$

formule dans laquelle μ' désigne le nombre des courbes A qui touchent deux droites. Cette formule, je le répète, est une conséquence facile et connue du théorème III.

Dans la division B, j'ai à considérer maintenant les cas où g' diffère de l'unité. Ce cas s'offre ou bien si le système des courbes A passant en a' présente une décomposition analogue à la précédente, ou bien si A a, avec S , un contact du second ordre. Pour le cas de décomposition, on a une somme d'éléments

$$\Sigma_2 = (m\nu_2 + c\mu_2) m',$$

que l'on trouve en raisonnant comme ci-dessus. Tout d'abord, la décomposition étant supposée avoir lieu en a' , les éléments de la

somme relatifs à a' sont d'une forme telle que $(mv_2 + c\mu_2)$. Secondement, pour que cette décomposition ait lieu en a' , il faut qu'il y ait, dans le plan, un lieu de points où elle se produise ; d'où le facteur m' dans l'expression de Σ_2 .

Enfin, si l'on désigne par N le nombre des courbes A ayant avec S des contacts de second ordre, le second cas donne lieu à l'élément suivant de la somme cherchée :

$$\Sigma_2 = M m' N.$$

J'arrive maintenant à la division C , relative aux cas où les nombres n , n' sont différents de l'unité. A ces cas ne répond aucune des décompositions ci-dessus ; en outre, un seul des nombres n , n' est supérieur à l'unité. Les hypothèses contraires répondraient à des positions particulières des courbes S , S' . Soit donc d'abord $n' > 1$. On a alors

$$n = 1, \quad g = n', \quad n' > 1, \quad g' = 1, \quad n'g' - ng = 0.$$

Ainsi ce cas ne donne lieu à aucun élément de la somme cherchée. Soit enfin $n > 1$. Ici g est l'unité ; il faut déterminer g' . C'est à quoi on peut utilement employer le théorème I. Soient a , a' les points considérés sur S et S' . Si, sur une des branches de (S) , système circulaire dont l'origine est en a , on prend un point a_1 , à distance infiniment petite d'ordre n de a , il y correspond un point a'_1 dont l'ordre infinitésimal de la distance à a' est égal à g' . Par suite, g' est égal à l'ordre de la variation de la courbe A quand on passe de a à a_1 . Soit ν l'ordre infinitésimal de l'angle dont la tangente de S a tourné quand on passe de a en a_1 . La variation de la courbe A a pour ordre le plus petit des deux nombres ν , n . Donc g' est le plus petit de ces deux nombres ; d'où résulte aisément ce dernier élément de la somme cherchée :

$$\Sigma_3 = -\rho M m' \Sigma(n - \nu) = -\rho M m' r,$$

le nombre r représentant la somme des nombres $(n - \nu)$ relatifs à tous les systèmes circulaires de branches de S pour lesquels ν est inférieur à n . Ce nombre r est donc ce que j'appelle le nombre des *inflexions effectives* des courbes corrélatives de S ; c'est aussi le nombre des rebroussements ordinaires qui remplacent les singularités de la courbe S dans les équations de *Plücker*.

J'ai maintenant tous les éléments de l'équation (1) et je puis la former. On voit aisément que les termes contenant c' en facteur disparaissent, et que m' se trouve alors en facteur commun. Ce facteur supprimé, il ne reste plus aucun élément de la courbe S' , et l'on obtient une relation de la forme

$$(4) \quad N = \alpha c + \beta m + \rho r,$$

où α , β , ainsi que ρ , ne dépendent que de la série (A). La formule (4) donne le nombre des courbes A qui ont des contacts du second ordre avec la courbe S. C'est celle que j'ai obtenue par une voie toute différente dans un autre travail, et à un point de vue un peu plus étendu (¹). La formule elle-même fixe le sens des lettres α , β ; quant à ρ , sa signification est déjà connue. De là l'énoncé suivant :

THÉOREME IV. — *Soit une série doublement infinie de courbes algébriques A dans un plan, et telle que β soit le nombre de ces courbes qui ont une droite pour tangente d'inflexion, ρ le nombre de celles qui passent par un point et y touchent une droite, $(\alpha - 3\rho)$ le nombre de celles qui ont un point donné pour point de rebroussement : le nombre des courbes A qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée est $(\alpha c + \beta m + \rho r)$, c et m étant la classe et l'ordre de cette courbe, et r le nombre des rebroussements ordinaires qui représentent ses singularités dans les équations de Plücker.*

En désignant par s le nombre corrélatif de r , c'est-à-dire le nombre des inflexions qui représentent les singularités de S dans les équations de Plücker, et posant

$$3q = r + 3c = s + 3m,$$

mettant en outre les lettres P, D, initiales de *point* et *droite* au lieu de $(\alpha - 3\rho)$ et β , et désignant par C le nombre des courbes A qui ont des contacts du second ordre avec une conique, on peut mettre la relation (4) sous la forme

$$N = \frac{1}{3} qC - rP - sD.$$

(¹) Mémoire sur la recherche des points d'une courbe, etc., *Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. II, p. 377.

C'est sous cette forme que j'ai employé la relation (4) dans ma Note *Sur les degrés et les classes de certains lieux géométriques* ⁽¹⁾.

7. Au moyen de la même série (A) on peut faire correspondre de la même manière les points d'une même courbe S. Grâce à la formule (3) et au résultat précédent, on pourra ainsi calculer le nombre des courbes A qui touchent en deux points différents la courbe S. Je me borne à cette indication, la formule à laquelle on parvient étant, dans sa généralité, trop compliquée pour être utile. J'arrête ici ce qui concerne les applications de la formule de M. Zeuthen, et je vais donner une démonstration directe d'un théorème comprenant la proposition III, ainsi que je l'ai annoncé.

8. Soient, dans un plan, deux courbes S, S' entre les points desquelles existe comme ci-dessus une correspondance (k, k') . On considère un *connexe* C du même plan, c'est-à-dire une série triplement infinie de couples composés chacun d'un point l et d'une droite λ . Si l'on se donne λ , l décrit une courbe dont l'ordre est celui du connexe; je le désigne par ν . Si l'on se donne l , λ enveloppe une courbe dont la classe est celle du connexe; je la désigne par μ . Je vais chercher le nombre des éléments (l, λ) du connexe, qui sont composés d'un point a de S et de la tangente α' en un point a' de S', correspondant à a .

A chaque point a' correspondent divers points a . A chacun de ces points a correspondent, dans le connexe, diverses droites α passant par a' . L'ensemble de ces droites enveloppe une courbe dont je désigne par ω la classe. Je fais correspondre, sur une droite arbitraire L, les points A où L est rencontrée par les droites α , avec le point A' où L est rencontrée par la tangente α' en a' . Au point A correspondent ω points A', et aux points A', $k'c'\mu$ points A. On a donc $\omega + k'c'\mu$ coïncidences, parmi lesquelles chaque point a' situé sur L en entraîne $k'\mu$. Il reste donc pour le nombre des points cherchés

$$N = \omega + c'k'\mu - m'k'\mu.$$

Il reste à déterminer ω . Soit p un point arbitraire : pour chaque

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII, p. 705.

droite B menée par p , je détermine les points a qui lui correspondent dans le connexe et qui sont situés sur S. Je prends les points a correspondants sur S' , et je les joins à p par des droites B'. Je considère B et B' comme des droites correspondantes de deux faisceaux issus de p . Les coïncidences répondent aux tangentes menées de p à l'enveloppe des droites a ; leur nombre est donc ω .

A une droite B répondent $m\nu$ points a , et par suite $mk\nu$ droites B'. A une droite B' répondent m' points a' , $m'k'$ points a , $m'k'\mu$ droites B; donc

$$(5) \quad \begin{cases} \omega = mk\nu + m'k'\mu. \\ N = c'k'\mu + mk\nu. \end{cases}$$

THÉORÈME V. — Si entre deux courbes S, S' a lieu la correspondance définie au théorème II, le nombre des éléments d'un connexe d'ordre ν et de classe μ , qui sont composés d'un point de S et d'une tangente correspondante de S', est égal à $c'k'\mu + mk\nu$.

Si S et S' coïncident, k et k' sont égaux à l'unité, et l'on obtient comme corollaire le théorème III.

9. La conception du couple (l, λ) comme élément du plan donne lieu à celle des trois êtres géométriques : *connexe* triplement infini; *coïncidence* doublement infinie; *couple de courbes* simplement infini. A la proposition qui, dans la Géométrie plane ordinaire, fournit le nombre des points d'intersection de deux courbes, répondent ici deux propositions. La première donne le nombre des intersections d'un connexe avec un couple de courbes : c'est le théorème V. La seconde donne le nombre des intersections de deux coïncidences. Cette seconde proposition se déduit immédiatement du théorème suivant établi par M. Zeuthen ⁽¹⁾ :

Soit donnée dans un plan une correspondance telle :

1° Qu'à un point quelconque X correspondent α' points X', et à un point X' α points X;

2° Que le lieu des points X ou X' dont les homologues se trouvent sur une droite donnée soit une courbe d'ordre β .

Alors il existe dans le plan $\alpha + \alpha' + \beta$ points où deux points homologues X et X' coïncident.

(¹) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII, p. 1553.

Soit G une coïncidence, c'est-à-dire une série doublement infinie de couples (l, λ) telle, qu'à une droite λ correspondent c points l , et à un point l , γ droites λ , et en outre, que h soit le nombre des couples (l, λ) dans lesquels l est sur une droite donnée et λ passe par un point donné. Je considère une seconde coïncidence analogue G' , et je désigne par c' , γ' , h' les nombres analogues. Je fais correspondre les points l et l' par la condition que les droites correspondantes λ , λ' coïncident. Si alors l et l' coïncident en même temps, j'obtiens une intersection des deux figures G , G' . Il suffit donc d'appliquer ici la proposition de M. Zeuthen. On a évidemment

$$\alpha' = c'\gamma, \quad \alpha = c\gamma', \quad \beta = hh';$$

d'où, pour le nombre des intersections de G et G' ,

$$(6) \quad N = c\gamma' + hh' + c'\gamma.$$

Les deux formules (5) et (6) se confondent dans un seul énoncé si l'on emploie les notations symboliques que j'ai introduites dans cet ordre de recherches et que M. Schubert a employées avec tant de succès ⁽¹⁾.

Par la lettre D j'indique la condition, pour le point l , d'être situé sur une droite donnée, et par la lettre P , la condition, pour la droite λ , de passer par un point. Par D^2P^2 on indique alors le nombre des couples (l, λ) tels, que l soit l'intersection de deux droites données, c'est-à-dire un point donné, et que λ soit une droite donnée. Ainsi le symbole D^2P^2 est égal à l'unité; les autres symboles du quatrième ordre sont nuls. Cela posé, j'appelle *modules* d'un connexe et d'un couple de courbes les quantités

$$(\mu P + \nu D), \quad PD(c'h'D + mkP),$$

et *module* d'une coïncidence la quantité

$$\gamma P^2 + hPD + cD^2.$$

On peut alors énoncer les formules (5) et (6) en disant que l'ensemble des éléments (l, λ) défini par i équations ($i = 1, 2, 3$) est

⁽¹⁾ Notamment dans son Mémoire : *Beiträge zur abzählenden Geometrie* (*Math. Annalen*, t. X, p. 1).

représenté par un module, qui est une fonction homogène et d'ordre i des symboles P. D. Le nombre des intersections de deux pareils êtres est égal au produit symbolique de leurs modules.

Ce théorème s'étend à la Géométrie, où l'on considère comme élément de l'espace le couple formé par un point et un plan. Je le montrerai dans une autre occasion.

Sur l'enveloppe de la droite de Simpson : par M. H. BOUTARD.

Séance du 29 novembre 1876.

Le mode de démonstration que j'ai suivi dans ma première Communication à la Société mathématique, sur l'enveloppe de la droite de Simpson ou ligne perpendiculaire d'un triangle rectiligne, a suggéré à un de nos honorables collègues, M. Lapière, quelques remarques intéressantes que je me fais un plaisir de soumettre à la bienveillante attention de la Société.

Conservons les notations des deux §§. 3 et 4 qui accompagnent cet article dans le *Bulletin*, t. I, p. 215.

La démonstration repose sur la propriété de la droite DE de passer par le milieu I de MH.

Cette remarque étant faite, on observera que la rotation de UI est double de celle de IE et de sens inverse, de sorte que le théorème devient immédiat, comme cas particulier de l'un des théorèmes suivants, que leur enonce suffit à rendre évidents :

Une droite mobile m est définie par le mouvement d'un de ses points m et son orientation. Pour avoir le point : la sin enveloppe, il suffit de projeter en c le centre C_c de courbure de la courbe m sur la droite m et de prendre

$$\frac{m'c}{mc} = \frac{\nu}{\omega},$$

ν et ω étant les vitesses angulaires d'orientation respectives m C_c et de la droite m au point considéré.

Remarques. — Les positions de la droite m qui sont normales



à la courbe (m) sont les tangentes aux points de rebroussement de l'enveloppe.

Les droites mn tangentes à la courbe (m) sont, aux mêmes points, tangentes aux sommets de l'enveloppe.

Corollaire. — Si les vitesses ω et ω' sont proportionnelles et que (m) soit une circonférence de rayon R , l'enveloppe de la droite sera une épicycloïde concentrique à la circonférence (m) qui est la circonférence de ses sommets, et l'on aura pour les rayons R' de la circonférence directrice et r du cercle décrivant

$$\frac{R}{\omega} = \frac{R'}{\omega - \omega'} = \frac{2r}{\omega'}.$$

Dans le cas de la droite dont il s'agit,

$$\omega = -\frac{\omega'}{2},$$

d'où

$$= \frac{R'}{3} = -r,$$

ce qui résout complètement la question.

Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique;
par M. G. FOURET.

(Séance du 29 novembre 1876.)

I. La question qui a pour objet la détermination du nombre des points de contact des courbes d'un système (μ, ν) avec une courbe algébrique a , comme on sait, été traitée par plusieurs géomètres. La formule qui donne ce nombre a été démontrée de diverses manières, dans le cas des systèmes de courbes algébriques et aussi tout récemment dans le cas des systèmes de courbes quelconques. Mais, de toutes ces démonstrations, la plus simple et la plus lumineuse est, à notre avis, celle qui a été imaginée par M. Brill (*Math.*

Ann., t. VIII, 1875). Bien que l'auteur ne l'ait donnée que pour le cas des systèmes de courbes algébriques, on reconnaît sans peine qu'elle s'applique de tout point aux systèmes de courbes quelconques. Cette démonstration, basée sur l'emploi du principe de correspondance, donne véritablement la *raison d'être* du théorème, si bien que, si nous l'avions connue plus tôt, nous nous serions dispensé d'en chercher une autre (1).

II. Le mode de démonstration employé par M. Brill nous a paru pouvoir s'appliquer avec succès à d'autres questions concernant les systèmes de courbes. Nous allons tout d'abord en faire usage pour compléter le théorème relatif au contact des courbes d'un système avec une courbe algébrique, en considérant le cas, jusqu'à présent exclu, où il y aurait croisement ou convergence d'une infinité de branches du système en un ou plusieurs points de la courbe algébrique. A cet effet, nous allons reprendre la démonstration de M. Brill, en y introduisant seulement l'hypothèse que nous venons d'indiquer.

Dans le plan de la figure, prenons une droite D quelconque. La courbe fixe C étant supposée du $m^{\text{ième}}$ degré et de la $n^{\text{ième}}$ classe, menons d'un point x de D les n tangentes à C. En chacun des n points de contact passent μ courbes du système. Les tangentes à ces courbes en ces n points vont couper D en $n\mu$ points y , qui correspondent au point x choisi. Inversement, prenons un point y quelconque sur D. Les tangentes aux courbes du système issues de y ont leur point de contact sur une courbe de degré $\mu + \nu$ qui possède en y un point multiple d'ordre μ . Ce dernier lieu a de plus un point singulier en chacun des points de C par lesquels passent une infinité de branches du système. Il coupe par suite C en un nombre total de points égal à $m(\mu + \nu)$, parmi lesquels figurent avec un certain degré de multiplicité les points singuliers précités. Si nous désignons par ω le nombre total des points ainsi absorbés, il reste $m(\mu + \nu) - \omega$ points d'intersection simples, et les tangentes à C en ces derniers points vont couper D en $m(\mu + \nu) - \omega$ points x , correspondant au point initial y .

En vertu du principe de correspondance, il y a par suite sur D

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 1328.

$\mu + m(\mu + \nu) - \omega$ coïncidences d'un point x avec son correspondant y . D'ailleurs, chacune de ces coïncidences fournit un contact d'une branche du système avec la courbe C , à moins toutefois que ces coïncidences n'aient lieu aux points d'intersection de C avec D . Or chacun de ces points d'intersection, au nombre de m , comprend μ coïncidences étrangères à la question. En déduisant $m\mu$ du nombre total trouvé ci-dessus, il reste $n\mu + m\nu - \omega$. Tel est le nombre des contacts des branches du système avec la courbe algébrique, en dehors des points singuliers.

Dans le cas où les courbes du système sont indépendantes de C , ω est nul, et l'on retrouve le théorème connu consistant en ce que *le nombre des contacts des branches d'un système (μ, ν) avec une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré et de la $n^{\text{ième}}$ classe, indépendante du système, est égal à $n\mu + m\nu$.*

III. Il est facile de voir quelle est la marche à suivre pour déterminer le nombre ω à soustraire du nombre précédent, dans le cas où il existe en un ou plusieurs points de C un croisement d'une infinité de branches du système. En effet, de la démonstration précédente il résulte que ce nombre ω n'est autre chose que le nombre des points d'intersection de C et de la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point quelconque aux courbes du système, qui sont confondus avec les points singuliers de ce dernier lieu provenant des points singuliers du système. On est ainsi ramené au problème qui consiste à trouver le nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, qui sont confondus en un point commun, multiple pour l'une au moins des deux courbes. Cette question a été traitée par plusieurs géomètres, parmi lesquels nous citerons MM. Cayley, de la Gournerie, Painvin, Halphen ⁽¹⁾.

Il est bon de remarquer que le cas où une ou plusieurs des tangentes de la courbe C seraient touchées par une infinité de branches du système se traiterait de la même manière et donnerait lieu à un certain abaissement du nombre $n\mu + m\nu$.

IV. Nous allons montrer maintenant comment on peut, par un procédé analogue à celui employé par M. Brill, *déterminer le nombre*

(¹) Voir, pour l'histoire de cette question, le Mémoire de M. Halphen, publié dans le *Bulletin de la Société*, t. III, p. 76.

des points d'une courbe algébrique en lesquels cette courbe est coupée sous un angle donné par une des branches d'un système donné.

Nous prendrons comme point de départ ce théorème, d'ailleurs connu, d'après lequel, *si une courbe algébrique plane du $m^{\text{ème}}$ degré et de la $n^{\text{ème}}$ classe a deux points multiples d'ordre r confondus avec les deux points circulaires à l'infini, le nombre des droites issues d'un point quelconque du plan et coupant la courbe donnée sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation est égal à $m + n - 2r$.*

Ce théorème se conclut du reste immédiatement du théorème relatif au contact des courbes d'un système avec une courbe algébrique. Considérons, en effet, le système des spirales logarithmiques ayant pour pôle un point quelconque du plan O , et coupant les rayons vecteurs issus de ce pôle sous l'angle donné compté dans le sens de rotation assigné. Ce système a pour caractéristiques $\mu = 1$, $\nu = 1$, et, ainsi que je l'ai fait remarquer dans un travail précédent, il a une infinité de branches imaginaires convergeant asymptotiquement vers chacun des points circulaires de l'infini. Comme, d'ailleurs, chacun de ces points est simple sur le lieu des points de contact des tangentes au système issu d'un point quelconque (cercle), on a

$$\omega = 2r \quad \text{et} \quad n\mu + m\nu - \omega = m + n - 2r.$$

Tel est le nombre des obliques inclinées de l'angle donné dans un sens déterminé sur la courbe C , que l'on peut mener par le point O .

Cela posé, prenons une droite D quelconque dans le plan qui contient la courbe C et le système donné; puis, par un point x quelconque de cette droite, menons les $m + n - 2r$ droites coupant C sous l'angle donné de grandeur et de sens de rotation. En chacun de ces points passent μ branches du système et leurs μ tangentes qui déterminent sur DB μ points y , d'où résultent $(m + n - 2r)\mu$ points y correspondant au point x . Inversement, prenons un point y quelconque sur D , et considérons le lieu des points de contact des tangentes menées de y aux courbes du système. Ce lieu, de degré $\mu + \nu$, coupe la courbe C en $m(\mu + \nu) - \omega$ points, ω ayant la signification indiquée ci-dessus. En chacun de ces $m(\mu + \nu) - \omega$ points, traçons la droite qui coupe C suivant l'angle

donné. Les $m(\mu + \nu) - \omega$ droites ainsi obtenues déterminent sur D autant de points x qui correspondent au point de départ y . Par suite, et en vertu du principe de correspondance, il y a

$$(m + n - 2r)\mu + m(\mu + \nu) - \omega$$

coïncidences d'un point x avec son correspondant y . De ce nombre il faut déduire les $m\mu$ coïncidences confondues avec les m points d'intersection de C avec D, qui ne répondent pas à la question. Le nombre restant, à savoir $(m + n - 2r)\mu + m\nu - \omega$, fournit la solution cherchée.

En particulier, lorsque les courbes du système (μ, ν) sont indépendantes de C, ω est nul, et l'on obtient le théorème suivant :

Le nombre des points d'une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré, de la $n^{\text{ième}}$ classe et ayant deux points multiples d'ordre r aux points circulaires de l'infini en lesquels cette courbe est rencontrée sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation par les branches d'un système (μ, ν) indépendant de la courbe, est égal à $(m + n - 2r)\mu + m\nu$ ⁽¹⁾.

Le même procédé de démonstration s'applique à un très-grand nombre de questions relatives, comme la précédente, à l'intersection dans des conditions données d'une courbe algébrique avec les branches d'un système. Nous avons l'intention de traiter ce sujet d'une manière plus complète dans un prochain travail.

V. L'objet principal de cette Note était de montrer comment les singularités des systèmes de courbes s'introduisent, sans occasionner d'autres difficultés que celles déjà connues et en partie résolues dans la théorie des courbes algébriques. La définition analytique, que nous avons donnée des systèmes de courbes dans le plan, peut devenir ici d'un grand secours. En effet, si

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

est l'équation d'un pareil système, on reconnaît qu'un point $x = a$, $y = b$ est un point singulier par lequel passent une infinité de

⁽¹⁾ Voir une autre démonstration du même théorème (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII, p. 633).

branches du système, si l'équation

$$\varphi(a, b, p) = 0$$

est vérifiée quel que soit p . Si ce même point $x = a, y = b$ est un point simple ou multiple d'une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

la portion du nombre désignée ci-dessus par ω , qui se rapporte au point $x = a, y = b$, n'est autre chose que le nombre des points communs à la dernière courbe et à la courbe

$$\varphi(x, y, p) = 0,$$

qui sont confondus au point considéré. Cela résulte immédiatement des démonstrations données plus haut, et de cette simple remarque que la dernière équation définit le lieu des points de contact des tangentes aux courbes du système menées parallèlement à la droite $y = px$.

Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre;

par M. LAGUERRE.

(Séance du 17 mai 1876.)

1. Soient A une surface du second ordre et K l'une quelconque de ses lignes de courbure. On peut faire passer par K une infinité de surfaces du second ordre; soit A' l'une quelconque d'entre elles.

Cela posé :

La surface développable, circonscrite à A et A' , touche A suivant une de ses lignes de courbure.

En d'autres termes :

Étant donné un plan tangent quelconque à la surface A qui la touche au point M , on peut, par K , mener deux autres surfaces du second ordre qui touchent le plan; si l'on désigne par A et B leurs points de contact, les droites MA et MB sont les tangentes aux lignes de courbure de A qui se croisent au point M .

2. Les surfaces quadricuspidales, étudiées par M. de la Gournerie, jouissent de propriétés analogues à celles des surfaces du second ordre A' .

Si, par la biquadratique K , on mène une quadricuspide quelconque, la surface développable circonscrite à A et à la quadricuspide touche A suivant une de ses lignes de courbure.

Sur le lieu des points tels, que les tangentes menées de ces points à deux courbes planes soient égales entre elles ; par
M. LAGUERRE.

(Séance du 31 mai 1876.)

1. Soient S et S' deux courbes planes, m et m' deux points situés respectivement sur ces courbes et tels que, les tangentes menées en ces points se coupant en t , on ait $mt = m't$.

Pour déterminer le lieu du point t , je m'appuierai sur le lemme suivant, dont l'évidence est immédiate :

Si l'on fait la perspective stéréographique des courbes S et S' sur une sphère, en appelant O le centre de la projection, Σ et Σ' les courbes perspectives de S et de S' , μ et μ' les points correspondant à m et m' , les tangentes menées en μ et μ' aux courbes Σ et Σ' se rencontrent en un point de l'espace Θ qui est situé sur la rayonne Ot .

La réciproque est évidemment vraie.

2. De ce lemme résulte immédiatement la construction suivante du lieu des points t .

Faisons, sur une sphère quelconque, la perspective stéréographique des courbes données S et S' et imaginons les deux surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les deux courbes perspectives Σ et Σ' . Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe gauche K ; imaginons maintenant le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective ; ce cône coupera le plan de S et de S' suivant le lieu cherché.

3. Étant donnée une courbe plane S , on peut se proposer de dé-

terminer une courbe T telle, que deux des tangentes que l'on peut mener de chacun des points de cette courbe à S soient égales entre elles.

Pour résoudre ce problème, faisons sur une sphère quelconque la projection stéréographique de S . La courbe perspective Σ est l'arête de rebroussement d'une surface développable; soit K la ligne nodale de cette surface.

Si l'on imagine le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective, ce cône coupe le plan de S suivant la courbe T .

Sur un problème d'Algèbre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 10 janvier 1877.)

1. En désignant par S_μ la somme des puissances d'ordre μ des racines, de l'équation de degré n , $f(x) = 0$, on peut se proposer de déterminer le polynôme $f(x)$ connaissant $S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}$.

Comme on a ainsi n équations de condition pour déterminer les coefficients du polynôme, il est clair que le problème est généralement déterminé. Il peut se faire néanmoins qu'il y ait une infinité de solutions; car, si l'on satisfait à la question, ce qui, dans certains cas, sera évidemment possible, en prenant pour $f(x)$ un polynôme de degré inférieur à n , en désignant par $\varphi(x^2)$ un polynôme quelconque ne renfermant que des puissances paires de x , on y satisfera aussi en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \varphi(x^2)x^n$, les coefficients de $\varphi(x^2)$ et l'exposant m étant du reste arbitraires, pourvu que le degré de l'expression précédente soit égal à n .

2. Pour poser d'une façon plus précise le problème à résoudre, je l'énoncerai ainsi :

Déterminer un polynôme $f(x)$, de degré égal ou inférieur à n , jouissant de la propriété énoncée et tel, que $f(x)$ et $f(-x)$ n'aient aucun facteur commun.

Il est facile alors de démontrer que, si le problème a une solution, le polynôme $f(x)$ est parfaitement déterminé.

A cet effet, posons $f(-x) = \varphi(x)$; d'après ce que je viens de dire, la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ sera irréductible. Soient de plus $a, b, c, \dots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, on aura évidemment

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum \frac{1}{x+a} - \sum \frac{1}{x-a} = \sum \frac{-2a}{x^2-a^2} \\ &= -\frac{2S_1}{x^2} - \frac{2S_3}{x^4} - \dots - \frac{2S_{2n-1}}{x^{2n}} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right), \end{aligned}$$

l'expression $\left(\frac{1}{x^n} \right)$ désignant, en général, sans que je me préoccupe des valeurs des coefficients, une série développée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme d'un degré au plus égal à $-m$.

En intégrant l'équation précédente entre les limites x et ∞ , il viendra

$$\log \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 2 \left[\frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}} \right] + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

ou en posant, pour abréger,

$$W = \frac{S_1}{x} + \frac{S_3}{3x^3} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}},$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$(1) \quad e^{2W} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right).$$

3. La détermination du polynôme $f(x)$ est donc ramenée à la question suivante :

Déterminer une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur et le numérateur soient d'un degré au plus égal à n , et qui soit égale au développement de e^{2W} , en négligeant les termes d'un ordre supérieur à celui de $\frac{1}{x^{2n}}$. Il faut, en outre, qu'en désignant par $f(x)$ ce dénominateur, le numérateur de la fraction soit égal à $f(-x)$; mais, comme je le ferai voir, il n'y a pas à se préoccuper de cette condition, qui sera satisfaite d'elle-même si la première condition est remplie.

Je démontrerai d'abord qu'il ne peut exister qu'un seul polynôme $f(x)$ qui y satisfasse; en effet, si $f_1(x)$ était une autre solution, on aurait évidemment

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

d'où

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = f(x)f_1(x) \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

relation évidemment impossible, à moins que le premier membre ne soit nul; car c'est un polynôme entier en x , tandis que le second membre (s'il n'est pas nul) se développe suivant une série commençant par un terme en $\frac{1}{x}$, puisque chacun des polynômes $f(x)$ et $f_1(x)$ est d'un degré au plus égal à n .

La relation précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a

$$\varphi(x)f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = 0,$$

ou encore

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et, si l'on suppose ces fractions irréductibles, $f_1(x)$ ne doit différer que par un facteur constant de $f(x)$.

Ce polynôme n'étant pas d'ailleurs, par hypothèse, divisible par x , on peut supposer que le terme constant qui y entre est égal à l'unité; il est alors complètement déterminé.

4. Cela posé, il est facile de prouver que, la fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ayant été déterminée par la condition ci-dessus énoncée, $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$.

En effet, W ne renfermant que des puissances impaires de x , en changeant x en $-x$ dans l'équation (1), il viendra

$$e^{-iW} = e^{i\bar{W}} = \frac{\varphi(-x)}{f(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

d'où, par une transformation facile,

$$e^{iW} = \frac{f(-x)}{\varphi(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right);$$

le polynôme $\varphi(-x)$, d'après ce que je viens d'établir, ne peut différer que par un facteur constant de $f(x)$; d'ailleurs, e^{xw} , pour $x = 0$, se réduit à l'unité; donc le premier terme de $\varphi(-x)$ est aussi l'unité et, par suite,

$$\varphi(-x) = f(x).$$

5. Le problème est donc entièrement ramené à trouver un polynôme $f(x)$, de degré au plus égal à n , et satisfaisant à l'équation (1); mais on peut supposer que $f(x)$ soit effectivement de degré n , en faisant abstraction de la condition imposée jusqu'ici, à savoir que $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont premiers entre eux.

Effectivement, si $f(x)$ était d'un degré $m < n$, il suffirait de multiplier les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ par un polynôme arbitraire de degré $(n - m)$ pour obtenir une fraction satisfaisant à la relation (1) et dont le dénominateur soit du degré n .

Nous poserons donc $f(x) = 1 + ax + bx^2 + \dots + lx^n$; $a, b, \dots, l$ désignant n coefficients indéterminés, et nous exprimerons que le produit $e^{xw} f(x)$ manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}$; nous aurons ainsi, pour déterminer les n coefficients inconnus, n équations linéaires avec second membre.

Généralement, le déterminant de ces équations étant différent de zéro, elles fourniront pour les coefficients des valeurs bien déterminées; le polynôme $f(x)$ sera donc effectivement du degré n .

Si le déterminant est nul, il se peut que le problème n'ait pas de solution; s'il y en a une infinité, on déterminera l'un quelconque des polynômes $f(x)$ satisfaisant aux équations, et l'on en déduira le numérateur correspondant $\varphi(x)$; on réduira ensuite la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ à sa plus simple expression: le dénominateur de la fraction irréductible ainsi obtenue sera la solution cherchée, et son degré sera inférieur à n .

6. Il est clair que l'on peut remplacer l'expression e^{xw} par toute autre expression dont le développement coïnciderait avec elle jusqu'aux termes de l'ordre de $\frac{1}{x^n}$ inclusivement.

Ainsi, si l'on développe en fraction continue l'expression $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$, où m désigne un nombre quelconque, et si l'on forme la réduite dont le dénominateur $f(x)$ est de degré n , les racines de l'équation $f(x) = 0$ jouiront de la propriété que les sommes $S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}$ soient toutes égales à m .

7. Les résultats obtenus dans cette Note peuvent s'énoncer ainsi :

Les coefficients d'un polynôme de degré n s'expriment rationnellement en fonction des fonctions symétriques $S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}$ des racines de l'équation $f(x) = 0$. C'est ce qu'il est facile du reste de vérifier au moyen des formules de Newton, au moins pour de petites valeurs du nombre n .

Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique ; par M. LAGUERRE.

(Séance du 24 janvier 1877.)

1. Je m'appuierai sur le beau théorème suivant, dû à M. Liouville ⁽¹⁾ :

Si, aux quatre points d'intersection d'un cercle et d'une conique, on mène des normales à la conique, et si, par le centre du cercle, on mène une sécante quelconque, le centre harmonique du centre du cercle, par rapport aux quatre points où la sécante coupe les normales, est situé à l'infini.

Considérons maintenant ⁽²⁾ les quatre normales Ma, Mb, Mc et Md , que d'un point M on peut abaisser sur une conique donnée. Désignons par A le centre du cercle qui passe par les pieds b, c, d de trois de ces normales, déterminons le point M' symétrique du point M par rapport au centre O de la conique, et par ce point menons une parallèle Ma' à la normale Ma . Puisque $OM' = OM$,

⁽¹⁾ *Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination.* (Journal de Mathématiques, t. VI, 1^{re} Serie, p. 403.)

⁽²⁾ Le lecteur est prie de faire la figure.

il est clair que a et a' sont deux points diamétralement opposés de la conique, et, d'après une élégante proposition due à Joachimsthal, on sait que les quatre points a' , b , c , d sont situés sur un même cercle.

Par suite, d'après le théorème de M. Liouville, si l'on mène par le point A une sécante quelconque, le conjugué harmonique de A par rapport aux quatre points où la sécante coupe les droites $M'a'$, Mb , Mc , Md est situé à l'infini.

Considérons, en particulier, la sécante $A\mu$ parallèle à $M'a'$ et par conséquent à Ma , le point de rencontre avec $M'a'$ étant rejeté à l'infini, on en déduit immédiatement que Ma est la conjuguée harmonique de MA relativement au faisceau des normales Mb , Mc , Md .

Supposons maintenant que la sécante passe par le point M , on aura

$$\frac{1}{A\alpha} + \frac{3}{AM} =$$

d'où il suit

$$\alpha A = \frac{AM}{3}.$$

Menons par le point A une parallèle à Ma , et soit μ le point où cette parallèle coupe le diamètre OM ; le point μ décrira le segment MM' dans le rapport de 3 à 1. On voit donc qu'il est situé sur le prolongement du rayon MO et à une distance du centre égale à la moitié de ce rayon; ce point sera d'ailleurs le même, quelle que soit celle des quatre normales que l'on considère.

On peut donc énoncer les deux propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point M à une conique, la droite qui joint le point M au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale que l'on peut mener du point M à la courbe.*

THÉORÈME II. — *Si l'on désigne par a , b , c , d les pieds des quatre normales que l'on peut mener d'un point M à une conique, et par A , B , C , D les centres des cercles circonscrits aux triangles bcd , cda , dab et abc , les droites menées respectivement par ces*

points, parallèlement aux normales Ma , Mb , Mc et Md , se coupent en un même point μ .

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.

2. Il résulte de là que, si l'on considère l'une quelconque des normales Ma que l'on peut mener par le point M , la droite MA , qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle bcd , est l'une des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement au faisceau Mb , Mc , Md .

Par suite, si l'on détermine pour chacune des normales sa polaire conique par rapport aux trois autres, on obtiendra huit droites sur lesquelles se trouveront les quatre centres A , B , C et D des cercles circonscrits.

Soit

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0$$

une équation du quatrième degré dont les racines déterminent les directions des quatre normales issues du point M , et α une racine de cette équation déterminant une des normales. Les directions des trois autres seront données par l'équation

$$\frac{U}{x - \alpha y} = ax^3 + (4b + a\alpha)x^2y + \dots = 0,$$

et la polaire conique de la première normale, par rapport aux trois autres, par l'équation

$$\alpha[3ax^3 + 2(4b + a\alpha)xy + \dots] + [(4b + a\alpha)x^3 + \dots] = 0.$$

Pour obtenir l'équation déterminant les huit droites dont j'ai parlé plus haut, il faut éliminer α entre cette relation et la relation $U(\alpha, 1) = 0$; comme, d'ailleurs, le résultat doit être un covariant de U , nous n'avons besoin que de calculer le terme du degré plus élevé. Nous ferons donc $y = 0$, et il restera à éliminer α entre les équations $a\alpha + b = 0$ et $U(\alpha, 1) = 0$; le résultant, multiplié par x^3 , devient

$$\begin{aligned} x^3 &= 3b^4 + 6cab^3 - 4da^2b + ea^3) \\ &= (ae - 4bd + 3c^2)a^2x^3 - 3(ac - b^2)x^3. \end{aligned}$$

Si donc on désigne par H le hessien de U , et par S son invariant quadratique, l'équation qui détermine les huit droites est

$$SU^2 - 3H^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$H + \sqrt{\frac{S}{3}} U = 0 \quad \text{et} \quad H - \sqrt{\frac{S}{3}} U = 0.$$

Comme je le montrerai plus loin, le faisceau des quatre droites MA , MB , MC et MD est déterminé par l'une de ces équations.

3. THÉORÈME III. — *Si l'on joint le point M au centre O de la conique, et si, par le même point, on mène des parallèles MX et MY aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante :*

La conjuguée harmonique de chacune d'elles, par rapport au faisceau des normales issu du point M , se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux deux autres droites.

La vérification de ce théorème se fait très-simplement en remarquant que, si l'on rapporte la conique à ses axes, l'équation qui donne les coefficients angulaires de normales issues du point (ξ, η) est

$$b^2 \xi^2 m^4 - 2b^2 \eta \xi m^3 + (b^2 \eta^2 + a^2 \xi^2 - c^2) m^2 - 2a^2 \eta \xi m + a^2 \eta^2 = 0.$$

4. Soit, comme précédemment, $U = 0$ l'équation qui détermine les directions des quatre normales issues du point M ; pour abréger, je dirai simplement que c'est l'équation de ces normales, et je me servirai d'une expression semblable pour les autres systèmes de droites que j'aurai à considérer. Soit, de plus,

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

l'équation de deux quelconques des trois droites MO , MX et MY . Le théorème précédent montre qu'un certain invariant des formes u et U doit être nul; pour calculer cet invariant, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en posant $\alpha = \gamma = 0$, et les deux droites auront simplement pour équation $xy = 0$; soit, de plus, $\alpha \eta - \gamma \xi = 0$ l'équation de la troisième droite.

Les conjuguées harmoniques de $x = 0$, relativement à $U = 0$ et $\gamma(x\eta - \gamma\xi) = 0$, sont respectivement

$$dx + e\gamma \quad \text{et} \quad x\eta - \gamma\xi;$$

d'après le théorème précédent, on a donc

$$2d\xi + e\eta = 0.$$

De même, les conjuguées harmoniques de $\gamma = 0$, relativement à $U = 0$ et $x(x\eta - \gamma\xi) = 0$, sont respectivement

$$ax + b\gamma \quad \text{et} \quad 2x\eta - \gamma\xi;$$

ou a donc également

$$a\xi + 2b\eta = 0.$$

Éliminant ξ et η entre les relations précédentes, il vient

$$ae - 4bd = 0.$$

Écrivons maintenant la relation suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} 16(\alpha\gamma - \beta^2)(ae - 4bd + 3c^2) \\ - 3(\alpha\gamma^2 + 4c\beta^2 + e\alpha^2 - 4b\beta\gamma + 2c\gamma\alpha - 4d\alpha\beta)^2 = 0, \end{cases}$$

où, comme on le voit, le premier membre ne renferme que des invariants de U et de u ⁽¹⁾. D'ailleurs, quand on y fait $\alpha = \gamma = 0$, cette relation se réduit à la relation $ae - 4bd = 0$, que nous venons de trouver. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne respectivement par $u = 0$ et $U = 0$ les équations des quatre normales issues du point M et de deux quelconques des droites OM , OX et OY , les invariants des formes u et U sont reliés par la relation (1).

5. Désignons par $\frac{\xi}{\eta}$ et $\frac{x}{\gamma}$ les paramètres qui fixent les directions de deux quelconques des droites OM , OX et OY ; on pourra poser évidemment

$$\frac{\alpha}{\gamma\eta} = \frac{-2\beta}{\gamma\xi + x\eta} = \frac{\gamma}{x\xi},$$

(1) Voir SALMON. *Higher Algebra*, 3^e édition, p. 200.

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra la relation suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} \xi^2(ax^2 + 2bxy + cy^2) + 2\xi\eta(bx^2 + 2cxy + dy^2) \\ + \eta^2(cx^2 + 2dxy + ey^2) \pm \sqrt{\frac{S}{3}}(x\eta - y\xi)^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation déterminera, quand on se donnera la direction $\frac{\xi}{\eta}$ de l'une des trois droites, les directions des deux autres.

6. Je me proposerai maintenant le problème suivant :

Déterminer les coniques qui coupent orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Je ferai abstraction des cercles ayant pour centre le point M et qui satisfont évidemment au problème; il y a encore une infinité de solutions, et l'on pourra préciser la question en assujettissant, par exemple, les coniques à passer par un point fixe pris sur l'une des droites.

Je désignerai, comme ci-dessus, par $U = 0$ l'équation des quatre droites données. Cela posé, pour déterminer les droites qui joignent le point M aux centres des coniques qui sont des solutions du problème, il suffira d'exprimer que les racines de l'équation (2) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires.

Soit

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

l'équation des deux droites isotropes passant par le point M. En posant, pour abréger,

$$(c\alpha - 2b\beta + a\gamma)x^2 + 2(d\alpha - 2c\beta + b\gamma)xy + (e\alpha - 2d\beta + c\gamma)y^2 = w,$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$(3) \quad w \pm \sqrt{\frac{S}{3}}u = 0.$$

Le lieu des centres des coniques cherchées se compose donc de quatre droites que l'on peut déterminer par l'extraction de simples racines carrées.

L'une de ces droites étant déterminée, on prendra arbitrairement

un de ses points que l'on regardera comme le centre d'une conique normale aux quatre droites données. L'équation (2) déterminera les directions des axes de cette conique, et il sera facile de trouver la longueur de ses axes.

7. Comme je l'ai montré (n° 2), les quatre droites, qui joignent le point M aux centres A, B, C et D des cercles qui sont circonscrits aux triangles que l'on peut former avec les pieds des normales, sont déterminées par quatre des racines de l'équation

$$\left(H + \sqrt{\frac{S}{3}}U\right)\left(H - \sqrt{\frac{S}{3}}U\right) = 0.$$

De ce que je viens de dire plus haut, il résulte que, le polynôme U étant donné, on peut, en extrayant de simples racines carrées, déterminer toutes les coniques normales aux quatre droites, et par suite déterminer le faisceau MA, MB, MC et MD. Ce faisceau doit par suite, comme je l'avais énoncé, avoir pour équation

$$H + \sqrt{\frac{S}{3}}U = 0 \quad \text{ou} \quad H - \sqrt{\frac{S}{3}}U = 0;$$

autrement ces deux équations seraient résolubles par l'adjonction de simples racines carrées, ce que l'on sait être généralement impossible.

8. *Etant données quatre droites passant par un même point et déterminées par l'équation $u = 0$, il est clair qu'il y existe une infinité de systèmes de trois droites jouissant de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre droites données.*

En désignant par $\frac{z}{y}$ le paramètre d'une droite arbitrairement choisie, les racines de l'équation (1) détermineront deux autres droites, formant avec la première un système jouissant de la propriété énoncée.

Coupons les quatre droites données par une conique K passant par leur point de rencontre et choisis du reste arbitrairement: soient α , β , γ et δ les points où ces droites rencontrent la

conique ; un quelconque des systèmes de trois droites, jouissant de la propriété énoncée, rencontrera la conique en trois points p , q et r ; ces trois points formeront les sommets d'un triangle inscrit dans K , et il est clair que ce triangle sera déterminé dès que l'on connaîtra un de ses sommets. On en conclut immédiatement que tous ces triangles enveloppent une conique K' .

Considérons les quatre tangentes communes que l'on peut mener à K et à K' et le point où l'une de ces tangentes touche K ; si l'on prend ce point comme sommet d'un triangle inscrit dans K et circonscrit à K' , on voit facilement que deux des sommets de ce triangle seront confondus au point de contact.

Or en faisant, dans l'équation (2), $x = \xi$ et $y = \eta$, on obtient l'équation $u = 0$; donc les tangentes menées aux points α , β , γ et δ à la conique K sont tangentes à K' .

Tous les triangles satisfaisant à la question s'obtiendront donc en construisant les deux coniques touchant les tangentes menées en α , β , γ et δ à K , et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K ; on sait alors qu'on pourra en inscrire une infinité et tous ces triangles satisferont au problème proposé.

9. De là résulte la détermination suivante des coniques coupant orthogonalement quatre droites données passant par un même point M .

Par M faisons passer un cercle quelconque K rencontrant les droites données aux points α , β , γ et δ et menons en ces points les tangentes au cercle.

Nous pouvons déterminer deux coniques différentes tangentes à ces quatre droites et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K .

Soit K' l'une de ces coniques ; sans qu'il soit besoin de la tracer, on pourra la supposer déterminée, par exemple, par une cinquième tangente. Par le centre du cercle menons une tangente à K' ; soient p et q les points où cette tangente coupe le cercle et construisons le troisième sommet r d'un triangle inscrit dans le cercle et circonscrit à K' .

Cela posé, si par le point r on mène deux droites rX et rY parallèles à Mp et Mq , on pourra construire une conique ayant

pour axes rX et rY et coupant orthogonalement les quatre droites issues du point M .

On obtiendra ainsi, par la règle et le compas, les quatre solutions du problème.

Note A.

**SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE, CONNAISSANT SES AXES
ET DEUX DROITES QUI LUI SONT NORMALES.**

Soient OX et OY les axes de la conique; Ma et Mb les deux droites données; je me propose de déterminer les points α et β où les deux droites sont respectivement normales à la conique cherchée; il sera alors facile de la déterminer complètement.

Soit i le milieu du segment $\alpha\beta$: j'ai démontré que *la droite Δ menée par i perpendiculairement à $\alpha\beta$ passe par les milieux des segments interceptés sur les axes par les deux normales Ma et Mb* . Connaissant ces deux normales, on construira facilement la droite Δ et il suffira de déterminer sur cette droite un point i , tel que la perpendiculaire, menée en ce point à Δ , rencontrât les droites Ma et Mb en deux points équidistants du point i .

La construction à laquelle on est ainsi conduit serait souvent défectueuse dans la pratique; la suivante sera peut-être préférable.

La proposition que j'ai rappelée plus haut peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Etant données deux droites normales à une conique aux points α et β , ces deux normales, la droite menée par le point milieu i de la corde $\alpha\beta$ et perpendiculairement à cette corde, la corde $\alpha\beta$ et les deux axes de la conique forment un ensemble de six droites tangentes à une même parabole, dont la directrice est la droite Oi .

Pour obtenir le point i , il suffira donc, d'après une propriété bien connue, de construire le point de rencontre P des hauteurs du triangle formé par les deux normales données et l'un des axes; le point i sera alors déterminé par le point de rencontre de Δ et de la droite qui joint le point P au centre de la conique.

Le point i étant déterminé, en menant par ce point une perpendiculaire à Δ , on obtiendra les pieds des normales α et β .

Si l'on suppose que les normales Ma et Mb se confondent, on

retrouve alors une élégante construction du centre de courbure d'une conique donnée par M. Maunheim.

Note B.

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX COURBES ET AUX SURFACES
DU SECOND ORDRE.**

1. J'ai démontré plus haut la propriété suivante des normales que l'on peut mener d'un point à une conique :

Si l'on joint un point quelconque M au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point M à la conique.

Cette propriété étant évidemment projective, on en déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant donnés un point M et l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds a, b, c, d des quatre normales que l'on peut mener du point M à une conique, si l'on joint un point quelconque de l'hyperbole aux quatre points a, b, c et d , on obtient quatre droites normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

En particulier, les points a, b, c, d sont sur l'hyperbole, et, si l'on considère trois quelconques de ces points, en vertu d'un théorème bien connu, le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois points se trouve également sur cette courbe. D'où les conséquences suivantes :

Étant donnés sur une conique quatre points tels que les normales en ces points soient concourantes, si l'on joint un quelconque de ces points aux trois autres, les trois droites ainsi obtenues sont normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

Les trois hauteurs d'un quelconque des triangles, que l'on peut former avec trois de ces points, sont également normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

2. Considérons maintenant une surface du second ordre dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, soit

$$(1) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1;$$

pour déterminer les pieds des normales à cette courbe qui passent par le point (α, β, γ) , nous adjoindrons à l'équation (1) les équations

$$\frac{x - \alpha}{\frac{x}{a}} = \frac{y - \beta}{\frac{y}{b}} = \frac{z - \gamma}{\frac{z}{c}},$$

ou, en désignant par ξ une quantité indéterminée,

$$x = \frac{a\alpha}{a - \xi}, \quad y = \frac{b\beta}{b - \xi}, \quad z = \frac{c\gamma}{c - \xi};$$

en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, les formules précédentes déterminent les divers points d'une cubique gauche K passant par les six pieds des normales, les paramètres de ces points étant d'ailleurs donnés par les racines de l'équation

$$\frac{a\alpha^2}{(\xi - a)^2} + \frac{b\beta^2}{(\xi - b)^2} + \frac{c\gamma^2}{(\xi - c)^2} = 1,$$

ou, sous forme entière et en introduisant pour l'homogénéité une quantité η égale à l'unité,

$$U = (\xi - a\eta)^2(\xi - b\eta)^2(\xi - c\eta)^2 - a\alpha^2\eta^2(\xi - b\eta)^2(\xi - c\eta)^2 \\ - b\beta^2\eta^2(\xi - c\eta)^2(\xi - a\eta)^2 - c\gamma^2\eta^2(\xi - a\eta)^2(\xi - b\eta)^2 = 0.$$

Le centre de la surface et les trois points à l'infini sur les axes sont également situés sur K et leurs paramètres sont respectivement ∞ , a , b et c : ce sont les racines de l'équation

$$W = \eta(\xi - a\eta)(\xi - b\eta)(\xi - c\eta) = 0.$$

Je vais établir maintenant que le conjugué harmonique de l'un quelconque des quatre points déterminés par l'équation $W = 0$, relativement aux trois autres, se confond avec son conjugué harmonique relativement aux six pieds des normales.

Considérons, par exemple, le point A dont le paramètre est a ;

en posant, pour abréger,

$$V = \eta(\xi - b\eta)(\xi - c\eta),$$

le conjugué harmonique de A relativement aux points (∞, b, c) sera déterminé par l'équation

$$(2) \quad \xi' \left(\frac{dV}{d\xi} \right) + \eta' \left(\frac{dV}{d\eta} \right) = 0,$$

la lettre ξ ayant été remplacée par la lettre a dans les dérivées partielles.

D'autre part, le conjugué harmonique du point A, relativement aux pieds des six normales, sera déterminé par l'équation

$$\xi' \left(\frac{dU}{d\xi} \right) + \eta' \left(\frac{dU}{d\eta} \right) = 0,$$

où, dans les dérivées partielles, on doit également faire $\xi = a$. Il est clair, dans cette hypothèse, que l'on peut supprimer dans U tous les termes qui renferment $(\xi - a\eta)$ au carré et remplacer U par V^2 ; l'équation précédente devient alors

$$V \left[\xi' \left(\frac{dV}{d\xi} \right) + \eta' \left(\frac{dV}{d\eta} \right) \right] = 0,$$

et, en la comparant à l'équation (2), on en déduit la proposition que je voulais démontrer.

3. Cette proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Par un point M de l'espace, menons des parallèles aux trois axes d'une surface du second ordre, puis joignons ce point au centre de la surface, nous obtiendrons ainsi quatre droites (D) : ces droites et les normales que, du point M, on peut mener à la surface seront situées sur un même cône du second ordre.

Cela posé :

La conjuguée harmonique de l'une quelconque des droites (D), relativement aux trois autres, se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux six normales.

Note C.

**SUR UN INVARIANT DE DEUX FORMES CUBIQUES QUI SE PRÉSENTE
DANS LA THÉORIE DES NORMALES A UNE CONIQUE.**

1. En général, trois droites passant par un même point ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données.

Soit

$$u = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$

une équation du troisième degré déterminant les directions des axes et de la droite qui joint un point donné M au point d'intersection des axes; soit de plus

$$u' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3 = 0$$

une équation déterminant les directions des trois droites passant par le point M. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à une conique ayant pour axes les droites données est

$$\Delta = 2(ad^2 - 3bc' + 3cb' - da'^2) - 9[ad - bc - a'd - b'c' - 2ac - b^2 - b'd - c'^2 - 2bd - c^2 - a'c' - b'^2] = 0.$$

2. L'invariant Δ des deux formes cubiques u et u' , qui, on le remarquera, est un *combinant*, se présente dans plusieurs autres questions de Géométrie.

Soient, sur une conique, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c' , déterminés respectivement par les racines des équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° Si l'on considère les sommets du triangle formé par les tangentes en a, b, c à la conique donnée, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points et les points a, b, c soient sur une même conique est $\Delta = 0$.

2° La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse par les trois points a, b, c faire passer une conique, pour laquelle a', b', c' soit un triangle auxiliaire, est encore $\Delta = 0$.

3 Soient, sur une cubique gauche, deux systèmes de trois points

a, b, c et a', b', c' , déterminés respectivement par les racines de deux équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° La condition nécessaire et suffisante pour que le plan des trois points a', b', c' rencontre, en trois points en ligne droite, les tangentes menées en a, b et c à la cubique, est $\Delta = 0$.

2° Si l'on a la relation $\Delta = 0$, les traces, sur un plan osculateur quelconque, des tangentes menées à la cubique en a, b et c et des côtés du triangle a', b', c' , sont situées sur une même conique.

4. De l'expression de l'invariant Δ se déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant données une cubique gauche K et deux tangentes quelconques à cette cubique, ces droites et la courbe déterminent une surface du second ordre S; soit D l'intersection des plans osculateurs à K aux points de contact des deux tangentes.

Si, par D, on mène un plan sécant quelconque P, les tangentes à K, aux points où cette courbe rencontre le plan, déterminent une surface du second ordre circonscrite à S le long d'une conique située dans le plan P.

Note sur la division mécanique de l'angle; par M. H. BROCARD.

(Séance du 29 novembre 1876.)

Puisque l'occasion m'est fournie par l'article de M. Perrin, publié p. 85 du t. IV du *Bulletin*, de revenir sur la question de la trisection de l'angle, je demanderai à résumer ici quelques observations de détail.

Le mode de trisection par le *limaçon de Pascal* ou *conchoïde du cercle*, indiqué dans cette Note, est identique à celui qui a été décrit dans ma précédente Communication, insérée p. 47 du t. III. Cette propriété a été découverte par Archimède.

Depuis la publication de cette Note, M. Laisant a présenté à la Session du Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, tenu à Nantes (séance du 21 août 1875), le *compas trisecteur*, dont le principe seul avait été exposé dans le *Bulletin*.

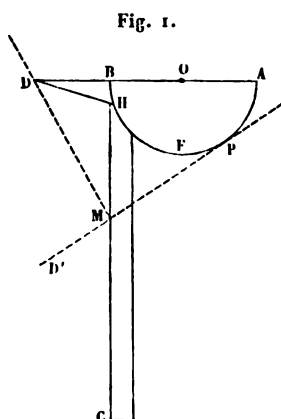
Deux dispositions ont même été proposées pour la construction de ce système articulé. Le constructeur aurait à juger quelle serait celle des deux combinaisons qu'on devrait considérer comme la plus pratique.

Une étude très-détaillée et très-complète de la trisection, ou même de la multisection mécanique de l'angle, en un nombre quelconque de parties égales, se trouve dans le t. II (année 1863) des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (26 p. avec planches).

Ce Mémoire, dû à M. Glotin, ancien lieutenant de vaisseau, est intitulé : *De quelques moyens pratiques de diviser les angles en parties égales*.

Voici quelques extraits de ce travail, qui m'ont paru devoir offrir quelque intérêt aux lecteurs du *Bulletin*.

Principe d'un trisecteur. — M. Glotin signale, comme depuis longtemps connu, un *trisecteur* composé d'une règle rectangulaire BC, d'un disque demi-circulaire BFPA tangent à la règle BC, à l'extrémité B, et d'une pointe triangulaire BDH sur le prolongement BD du diamètre AB, et d'une longueur BD égale au rayon OB du disque (*fig. 1*).



Emploi du trisecteur. — Soit DMP un angle à trisecter, il suffira d'amener la règle BC sur le sommet M, le point D sur le côté MD, et la circonférence BFPA à être tangente au côté OP. Alors BM et OM sont les deux trisectrices.

Il suffit, en effet, de remarquer que cette construction résout la question suivante, inverse de la proposée :

Etant donnés deux points D et D', situés d'un même côté d'une droite BC, trouver sur celle-ci un point M, tel qu'en joignant MD' et MD, l'angle D'MC soit double de l'angle DMB (voir P. SERRET, Des méthodes en Géométrie, 1855, p. 7).

Principe d'un multisecteur. — Si l'on ajoute au trisecteur une longueur $DN = DO$, fixée en son milieu à une perpendiculaire passant par le point M, on obtiendra un *quintisecteur*, et en répétant cette même modification, on obtiendra un instrument donnant la division en 7, 9, ... $(2n + 1)$ parties égales.

La division en $2m$ parties égales dépend du problème précédent si m est impair; elle se fait avec le compas ordinaire si m est pair.

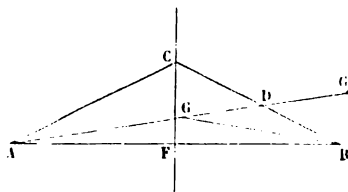
Ainsi que le fait remarquer M. Glotin, de tels instruments sont d'une construction très-délicate et très-difficile, et leur usage est assez restreint, puisqu'ils ne conviennent qu'à de grands angles.

Revenant alors à la trisection, M. Glotin a cherché une construction graphique fondée sur l'emploi d'une courbe trisectrice.

Plusieurs courbes permettent de résoudre la question :

1° La strophoïde oblique. — Soient $BAC = \alpha$ l'angle donné, FC une perpendiculaire à AB en son milieu F ; G, D les points de AD et de BC qui appartiennent à la trisectrice rectiligne DGA ;

Fig 2.

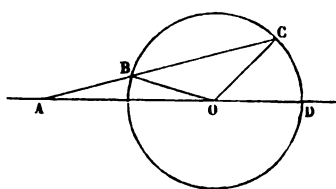


on a $GD = DB$. Le lieu des points G , lorsque AD varie et tourne autour du point A , est donc une strophoïde oblique, tangente en A à AC , ayant B pour point double, et admettant pour asymptote une parallèle à BC , à une distance double de celle du point A à BC . Le point G' de AD , symétrique du point G par rapport à D , appartient au lieu (*fig. 2*).

Si donc on donne l'angle COD, et que l'on prenne sur les rayons vecteurs issus du point C des longueurs BA, BA' égales au rayon du cercle, la courbe qui en résultera rencontrera OA au point A, et l'on n'aura qu'à joindre CA (*fig. 4*).

Le lieu des points A est la *conchoïde du cercle* ou *limaçon de*

Fig. 4.



Pascal. Son équation polaire, en prenant C pour pôle et CO pour axe polaire, est

$$\rho = 2a \cos \omega \pm a = a(2 \cos \omega \pm 1).$$

^

Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries; par M. PERRIN.

(Séance du 27 décembre 1876.)

Soit $z^n f(n)$ le terme général d'une suite S composée d'un nombre fini de termes ordonnés suivant les puissances entières et croissantes de z . Soient m et M la plus petite et la plus grande puissance de z qui figurent dans la suite considérée, et $F(z)$ la valeur de cette suite. Nous pouvons écrire l'identité

$$(1) \quad F(z) = \sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n).$$

Proposons-nous de déduire de cette identité une identité analogue pour une suite S' qui serait déduite de la suite primitive S, en multipliant les termes successifs par des coefficients arbitraires $\varphi(m)$, $\varphi(m+1)$, ..., $\varphi(M)$ finis ou nuls, assujettis seulement à

ou encore, puisque $\beta^p = 1$, quel que soit ν ,

$$(4) \quad \lambda_q = \frac{1}{p} \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu) \beta^{-\nu}.$$

Cette formule donnant toujours pour λ_q une valeur finie et déterminée, il en résulte que l'identification des suites S' et S'' est toujours possible.

Si, dans la valeur de S'' , on remplace λ_q par sa valeur tirée de l'expression (4), on obtient l'identité cherchée, savoir :

$$(5) \quad S' = \sum_{n=m}^{n=N} z^n f(n) \varphi(n) = \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{q=p} \left[F(\beta^q z) \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu) \beta^{-\nu} \right],$$

laquelle peut encore s'écrire, en renversant l'ordre des sommations dans le second membre,

$$S' = \frac{1}{p} \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \left[\varphi(\nu) \sum_{q=1}^{q=p} \beta^{-\nu} F(\beta^q z) \right],$$

ou enfin, en remplaçant β^q par z ,

$$(6) \quad \sum_{n=m}^{n=N} z^n f(n) \varphi(n) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \left[\varphi(\nu) \sum_{q=1}^{q=p} \frac{F(z z^{\nu})}{z^{\nu}} \right].$$

Dans cette dernière identité, la seconde sommation indiquée dans le second membre doit être entendue comme s'étendant à toutes les racines z de l'équation binôme (3).

Parmi toutes les suites S' que l'on peut déduire d'une suite donnée S en multipliant les termes successifs par des coefficients arbitraires qui se reproduisent périodiquement de p en p , la plus simple est évidemment celle qu'on obtient en supposant tous ces coefficients nuls, excepté un, qui est égal à l'unité, ce qui revient à ne conserver de la suite primitive qu'un terme de p en p . La formule (6) donne immédiatement, sous une forme très-simple, la valeur d'une telle suite. Si μ est l'indice de la puissance de z dans

l'un quelconque des termes conservés, il vient en effet

$$S' = \frac{1}{p} \sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^p},$$

ce que l'on peut écrire, en appelant m' et M' la plus petite et la plus grande valeur de n qui rendent $\mu + np$ compris entre m et M inclus,

$$(7) \quad \sum_{n=m'}^{n=M'} z^{\mu+np} f(\mu + np) = \frac{1}{p} \sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^p}.$$

Si enfin on suppose que S' ne renferme qu'un seul terme de S , celui qui contient z^μ , ce qui revient à dire que p est pris au moins égal à la plus grande des deux quantités $M - \mu + 1$, $\mu - m + 1$, la formule (7) se réduit à

$$(8) \quad z^\mu f(\mu) = \frac{1}{p} \sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^p},$$

et il est à remarquer que cette dernière formule est encore exacte lorsque μ cesse d'être compris entre m et M , c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$(9) \quad \sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^p} = 0,$$

pour μ plus grand que M ou plus petit que m , pourvu que p ait été pris au moins égal à $\mu - m + 1$ dans le premier cas, à $M - \mu + 1$ dans le second.

Les relations (8) et (9) conduisent à une propriété géométrique assez remarquable de toute fonction $F(z)$, développable en suite *finie* suivant les puissances entières de z (positives ou négatives). Lorsque la variable complexe z parcourt un cercle C de rayon r , ayant l'origine pour centre, la fonction $\frac{F(z)}{z^\mu}$, où μ est un entier quelconque, décrit une certaine courbe C' . Si l'on inscrit dans le cercle C un polygone régulier de p côtés, aux p sommets de ce polygone correspondront p points de la courbe C' . Les relations (8) et (9) expriment que l'on peut prendre p assez grand pour que le centre de gravité des p points dont il s'agit soit invariable :

1° quel que soit le rayon du cercle C; 2° quelque orientation que l'on donne au polygone régulier inscrit dans le cercle C; 3° quel que soit le nombre p des côtés de ce polygone; et aussi que ce centre de gravité coïncide avec l'origine si μ est en dehors de deux limites déterminées, qui sont le plus petit et le plus grand indice de puissance de z qui figurent dans le développement de $F(z)$.

Extension aux suites infinies. — Les formules (5) et (6) n'expriment qu'une identité, puisque nous avons appelé $F(z)$ la fonction de z qui est représentée par la somme des termes de la suite S ou

$$\sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n);$$

mais, pour obtenir ces formules comme applicables à une valeur donnée z_0 de la variable, nous n'avons eu à prendre en considération que p valeurs de z , savoir $\alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \dots, \alpha_p z_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ étant, comme ci-dessus, les p racines de l'équation binôme (2), en sorte que les formules (5) et (6) resteraient encore vraies pour la valeur donnée z_0 de la variable, si nous avions désigné par $F(z)$ non plus la fonction de z qui est définie par la somme des termes de la suite S, mais une autre fonction quelconque de z , continue ou non, assujettie seulement à prendre les mêmes valeurs que la précédente pour les p valeurs de $z, \alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \dots, \alpha_p z_0$. D'autre part, les raisonnements par lesquels nous avons passé pour obtenir les formules en question sont indépendants des valeurs assignées à m et M , et subsistent par conséquent si l'on suppose que m ou M augmente sans limites, c'est-à-dire que la suite finie se change en une série infinie. Il est donc permis de considérer les formules (5) et (6) comme applicables à toute série ordonnée suivant les puissances entières de la variable, pourvu que $F(z)$ soit une fonction que l'on sache être égale à la valeur de la série pour les p valeurs $\alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \dots, \alpha_p z_0$ de la variable, z_0 étant la valeur de la variable à laquelle les formules doivent être appliquées. Et, plus généralement, pour que ces formules donnent, sous forme finie et pour une valeur donnée z_0 de z , la valeur d'une série

$$S' = \sum z^n f(n) \varphi(n).$$

déduite, suivant une période quelconque, d'une autre série donnée

$$S = \sum z^n f(n),$$

il faut et il suffit que l'on connaisse une fonction finie $F(z)$ continue ou non, dont la valeur soit constamment égale à celle de S pour toute valeur de z ayant même module que z_0 ; et dès lors les formules donneront également la valeur de S' pour toute valeur de z ayant même module que z_0 .

De là la possibilité d'obtenir, au moyen des formules (5) et (6), souvent plus simplement que par d'autres méthodes, la sommation des séries qui peuvent se déduire, par des coefficients à retour périodique, de séries connues.

Soit, par exemple, proposé de sommer la série

$$S' = \frac{z}{1} + \frac{z^5}{1.2 \dots 5} + \frac{z^9}{1.2 \dots 9} + \dots$$

Cette série peut être considérée comme déduite, par coefficients à retour périodique, de la série

$$S = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots,$$

dont la valeur est e^z quel que soit z .

Faisant donc, dans la formule (6),

$$\begin{aligned} F(z) &= e^z, \quad p = 4, \quad \mu = 0, \quad \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) &= 1, \quad \varphi(2) = 0, \quad \varphi(3) = 0, \end{aligned}$$

il vient immédiatement

$$S' = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} + \frac{e^{-z}}{-1} + \frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{-\sqrt{-1}} + \frac{e^z}{1} \right) = \frac{e^z - e^{-z}}{4} + \frac{\sin z}{2},$$

formule également applicable à toute valeur de z .

La considération de la formule (5) fournit encore un théorème relatif à la convergence des séries que l'on peut déduire, par coefficients à retour périodique, d'une série donnée S dont on sait que la valeur est représentée constamment par $F(z)$, lorsque z décrit le cercle de rayon r .

Si $F(z)$ ne passe pas par l'infini, c'est-à-dire si S est convergente

pour toute valeur de z ayant pour module r , la formule (5) montre qu'il en est de même de toute série S' déduite de S avec une période quelconque. Si S est convergente pour toute valeur de z ayant pour module r , excepté pour la valeur particulière unique $z_1 = re^{\theta_1}$, la même formule prouve qu'une déduite donnée S' , suivant une période p , ne pourra être convergente pour une valeur donnée $z^0 = re^{\theta_0}$, que dans l'un des deux cas suivants : 1° si $F(z_1)$ n'entre pas dans l'expression de sa valeur, c'est-à-dire si θ_0 n'est pas compris dans l'une des valeurs de $\theta_1 + \frac{2k\pi}{p}$, k étant un entier quelconque; 2° si, θ_0 étant égal à l'une des valeurs de l'expression ci-dessus, par exemple à $\theta_1 + \frac{2k'\pi}{p}$, $F(z_0 e^{-i\frac{2k'\pi}{p}})$ a pour coefficient zéro dans la formule (5). Or ce coefficient est

$$\sum_{v=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(v) e^{i\frac{2k'\pi}{p}v}.$$

De là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si une série ordonnée S est convergente pour toutes les valeurs de z ayant un même module r , il en est de même de toute série qu'on peut en déduire par coefficients à retour périodique.*

Si S est convergente pour toutes les valeurs de z ayant même module r , excepté pour une valeur unique z_1 , toute série S' , déduite de S suivant une période p , sera divergente pour $z = z_1 e^{i\frac{2k\pi}{p}}$, k étant un entier quelconque, et convergente pour toute autre valeur de z ayant r pour module, à moins que les coefficients φ ne satisfassent à une ou plusieurs relations, telles que

$$(10) \quad \sum_{v=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(v) e^{i\frac{2k'\pi}{p}v} = 0,$$

où k' est un certain entier, auquel cas cette série S' reste convergente, par exception, pour $z = z_1 e^{i\frac{2k'\pi}{p}}$.

Soit donnée, par exemple, la série

$$S_1 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \dots,$$

qui se déduit, par une période de trois termes, de la série logarithmique, laquelle est divergente pour $z = 1$, et convergente pour toute autre valeur de z ayant pour module l'unité. En vertu du théorème précédent, S_1 sera convergente pour toute valeur de z ayant pour module l'unité, excepté pour les trois valeurs particulières

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

car les valeurs de φ sont ici

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = -1, \quad \varphi(3) = 1,$$

et ne peuvent satisfaire à la relation (10) pour aucune des trois valeurs consécutives $k' = 0, 1, 2$.

Au contraire, la série

$$S_2 = \frac{z}{1} - 2 \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - 2 \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \dots$$

serait encore divergente pour $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, mais resterait convergente pour $z = 1$, les coefficients φ satisfaisant à la relation (10) pour $k' = 0$.

On trouve d'ailleurs aisément par la formule (6), pour les valeurs de ces deux séries,

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tang} \frac{z\sqrt{3}}{2+z} - \frac{1}{3} \log(1-z^3),$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc tang} \frac{2z(z+2)\sqrt{3}}{(2+z)^2-3z^2} - \frac{1}{2} \log(1+z+z^2).$$

Il est intéressant de rechercher ce que devient la propriété géométrique exprimée par les relations (8) et (9) lorsqu'il s'agit d'une série et non plus d'une suite finie. La formule (7) ne cesse pas d'être exacte, c'est-à-dire que, si l'on désigne par S_ρ la série par-

tielle déduite d'une série donnée S , en conservant seulement un terme de p en p de part et d'autre du terme fixe $z^\mu f(\mu)$, on aura, $F(z)$ étant une fonction égale à S pour toutes les valeurs de z , de même module r que la valeur considérée $z_0 = re^{i\theta_0}$ de la variable,

$$(11) \quad (S_p)_\mu = \frac{1}{p} \sum \frac{F(\alpha z_0)}{\alpha^\mu}.$$

Le second membre de cette relation représente le centre des moyennes distances des p points

$$\frac{F(\alpha_1 z_0)}{\alpha_1^\mu}, \quad \frac{F(\alpha_2 z_0)}{\alpha_2^\mu}, \quad \dots, \quad \frac{F(\alpha_p z_0)}{\alpha_p^\mu},$$

qui ont pour coordonnées respectives les p valeurs que prend la fonction

$$\Phi_\mu = e^{i\mu(\theta_0 - \theta)} F(re^{i\theta}),$$

lorsqu'on donne à θ les p valeurs successives

$$\theta_0 + \frac{2\pi}{p}, \quad \theta_0 + 2\frac{2\pi}{p}, \quad \dots, \quad \theta_0 + 2\pi.$$

En d'autres termes, lorsque la variable z parcourt, comme précédemment, le cercle C de rayon r ayant pour centre l'origine, en s'arrêtant successivement aux p sommets du polygone régulier de p côtés, inscrit dans ce cercle de telle sorte que le dernier de ces sommets soit z_0 , la fonction Φ_μ parcourt une certaine courbe C_μ , et les p points d'arrêt de Φ_μ , correspondant sur cette courbe à ceux de z sur le cercle C , ont pour centre de moyenne distance le point représenté par la valeur que prend S_p pour $z = z_0$.

Supposons maintenant que p augmente indéfiniment, μ restant fixe. Il est clair qu'à la limite $(S_p)_\mu$ se réduira à $z^\mu f(\mu)$, du moins pour toute valeur z_0 de z qui ne rend pas S divergente. D'autre part, les sommets du polygone régulier inscrit dans le cercle C vont se rapprocher indéfiniment en restant équidistants, en même temps que leur nombre augmentera sans limite; de même les points d'arrêt de Φ_μ sur la courbe C_μ vont se rapprocher indéfiniment sur toutes les parties continues de cette courbe, en sorte qu'à la limite $\frac{1}{p} \sum \frac{F(\alpha z_0)}{\alpha^\mu}$ ne sera autre chose que le centre de gravité de la

courbe C_μ dont chaque élément infinitésimal serait considéré comme ayant un poids proportionnel à la longueur de l'élément infinitésimal correspondant du cercle C , c'est-à-dire que cette expression se transforme dans l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} e^{i\mu(\theta_0 - \theta)} F(re^{i\theta}) d\theta,$$

laquelle reste d'ailleurs invariable si l'on prend deux autres limites quelconques dont la différence soit 2π ; car il importe peu que la variable z parcoure le cercle C en partant de tel point ou de tel autre, pourvu qu'elle décrive une circonférence entière et une seule, puisqu'à chaque point de cette circonférence correspond une valeur unique et déterminée de Φ_μ (sauf aux points de discontinuité, en nombre limité), et que, par suite, on retrouvera toujours les mêmes éléments différentiels de la courbe C_μ , chacun avec son même poids relatif, pour déterminer le centre de gravité.

Nous pouvons donc écrire, comme étant ce que devient la relation (11) pour $p = \infty$ et pour toute valeur z_0 de z qui ne rend pas S divergente, l'équation suivante :

$$z_0^\mu f(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda}^{\lambda + 2\pi} e^{i\mu(\theta_0 - \theta)} F(re^{i\theta}) d\theta,$$

λ étant un angle quelconque.

On en tire

$$(12) \quad f(\mu) = \frac{1}{2\pi r^\mu} \int_{\lambda}^{\lambda + 2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-i\mu\theta} d\theta,$$

ce qui n'est autre chose que la formule bien connue qui lie le coefficient de z^μ , dans le développement d'une fonction $F(z)$ suivant les puissances entières de z , aux valeurs que prend cette fonction pour toutes les valeurs de z ayant même module que celle z_0 pour laquelle le développement a lieu.

La relation (12) comporte évidemment une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons donnée pour les relations (8) et (9), et qui n'en est d'ailleurs que l'extension au cas limite de $p = \infty$. En réunissant ce qui se rapporte aux deux cas, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si $F(z)$ est une fonction développable en suite finie ou infinie suivant les puissances entières de z , pour toutes les valeurs de z ayant un même module r , soit C_r la courbe que décrit la fonction $\frac{F(z^\mu)}{z^\mu}$, où μ est un entier quelconque, lorsque z décrit le cercle C de rayon r :

1° Le centre de gravité de la courbe C_r , dont chaque élément infinitésimal est considéré comme doué d'un poids proportionnel à la longueur de l'élément infinitésimal correspondant du cercle C , représente le coefficient de z^μ dans le développement.

2° Si, de plus, le développement est fini, ce centre de gravité coïncide avec le centre des moyennes distances des p points de C_r qui correspondent aux p sommets d'un polygone régulier inscrit dans C suivant une orientation quelconque, pourvu que p soit assez grand (au moins égal à la plus grande des deux quantités $M - \mu + 1$, $\mu - m + 1$, M et m étant respectivement le plus grand et le plus petit indice de puissance de z , qui figurent dans le développement).

Formules de sommation d'une classe de séries. — Pour terminer, nous allons appliquer les formules (5) et (6) à la sommation d'une classe de séries trigonométriques, savoir celles dont le terme général a pour expression

$$\frac{n^{p-1} \sin nx}{n^p \pm y^p},$$

p étant un entier positif pair, q un entier positif impair moindre que p , x un arc réel compris entre zéro et 2π , et y une quantité quelconque dont le module doit seulement être inférieur à l'unité.

Pour cela, nous partirons de la relation connue

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

qui est vraie pour x compris entre zéro et 2π , ces deux limites

exclues, et que nous écrirons, en posant $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$(13) \quad \sum \frac{\sin nx}{n} = a_0 x + a_1 \pi.$$

On en déduit, par intégrations successives,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sum \frac{\cos nx}{n^2} = a_0 \frac{x^2}{1.2} + a_1 \pi \frac{x}{1} + a_2 \pi^2, \\ -\sum \frac{\sin nx}{n^3} = a_0 \frac{x^3}{1.2.3} + a_1 \pi \frac{x^2}{1.2} + a_2 \pi^2 \frac{x}{1} + a_3 \pi^3, \\ \sum \frac{\cos nx}{n^4} = a_0 \frac{x^4}{1.2 \dots 4} + a_1 \pi \frac{x^3}{1.2.3} \\ \quad + a_2 \pi^2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \pi^3 \frac{x}{1} + a_4 \pi^4, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Toutes ces équations seront vraies pour x compris entre zéro et 2π , et aussi aux deux limites, si l'on détermine les constantes a_1 , a_2 , ... par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{1.2.3} + \frac{a_1}{1.2} + \frac{a_2}{1} &= 0, \\ a_3 &= 0, \\ \frac{a_0}{1 \dots 5} + \frac{a_1}{1 \dots 4} + \frac{a_2}{1.2.3} + \frac{a_4}{1} &= 0, \\ a_5 &= 0, \\ \dots\dots, \end{aligned}$$

lesquelles expriment que celles des équations (14) où figurent des sommes de sinus sont satisfaites pour $x = 0$ et $x = \pi$, ce qui entraîne le même fait pour les équations intermédiaires où figurent des sommes de cosinus, et qu'on peut déduire des premières par dérivation. Supprimons donc les quantités a_3 , a_5 , a_7 , ..., et, ne conservant que celles des équations (14) où figurent des sinus, écrivons le système d'équations que voici, supposé prolongé indé-

finiment :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} + \sum \frac{\sin nx}{n} = a_0 x + a_1 \pi, \\ - \sum \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{a_0 x^3}{1.2.3} + \frac{a_1 \pi x^3}{1.2} + \frac{a_2 \pi^2 x}{1}, \\ + \sum \frac{\sin nx}{n^5} = \frac{a_0 x^5}{1...5} + \frac{a_1 \pi x^4}{1...4} + \frac{a_2 \pi^2 x^3}{1.2.3} + \frac{a_3 \pi^3 x}{1}, \\ \dots\dots\dots, \\ \pm \sum \frac{\sin nx}{n^q} = \frac{a_0 x^q}{1...q} + \frac{a_1 \pi x^{q-1}}{1...(q-1)} + \frac{a_2 \pi^2 x^{q-2}}{1...(q-2)} \\ \quad + \frac{a_3 \pi^3 x^{q-3}}{1...(q-3)} + \dots + \frac{a_{q-1} \pi^{q-1} x}{1}, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

et le système correspondant de relations entre les constantes

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 = 0, \\ \frac{a_0}{1.2.3} + \frac{a_1}{1.2} + a_2 = 0, \\ \frac{a_0}{1...5} + \frac{a_1}{1...4} + \frac{a_2}{1.2.3} + a_3 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{a_0}{1...q} + \frac{a_1}{1...(q-1)} + \frac{a_2}{1...(q-2)} + \frac{a_3}{1...(q-3)} + \dots \\ \quad + \frac{a_{q-2}}{1.2.3} + a_{q-1} = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Considérons, en particulier, dans le système (15), les équations où les exposants les plus élevés de x sont respectivement q , $q + q + 2p$, $q + 3p$, ..., q étant un entier impair, et p un entier $> q$, et ajoutons membre à membre ces équations respectivement

multipliées par $y^q, y^{q+p}, y^{q+2p}, \dots$: il vient

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \pm \sum \left[\left(\frac{y}{n} \right)^q \pm \left(\frac{y}{n} \right)^{q+p} + \left(\frac{y}{n} \right)^{q+2p} \pm \left(\frac{y}{n} \right)^{q+3p} + \dots \right] \sin nx \\
 & = a_0 \left[\frac{(xy)^q}{1 \dots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1 \dots (q+p)} + \frac{(xy)^{q+2p}}{1 \dots (q+2p)} + \dots \right] \\
 & \quad + a_1 \pi y \left[\frac{(xy)^{q-1}}{1 \dots (q-1)} + \frac{(xy)^{q+p-1}}{1 \dots (q+p-1)} + \dots \right] \\
 & \quad + a_2 \pi^2 y^2 \left[\frac{(xy)^{q-2}}{1 \dots (q-2)} + \frac{(xy)^{q+p-2}}{1 \dots (q+p-2)} + \dots \right] \\
 & \quad + a_3 \pi^3 y^3 \left[\frac{(xy)^{q-3}}{1 \dots (q-3)} + \frac{(xy)^{q+p-3}}{1 \dots (q+p-3)} + \dots \right] \\
 & \quad + \dots \\
 & \quad + a_p \pi^p y^p \left[\frac{(xy)^q}{1 \dots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1 \dots (q+p)} + \dots \right] \\
 & \quad + a_{p+1} \pi^{p+1} y^{p+1} \left[\frac{(xy)^{q-1}}{1 \dots (q-1)} + \frac{(xy)^{q+p-1}}{1 \dots (q+p-1)} + \dots \right] \\
 & \quad + \dots
 \end{aligned}$$

Dans le premier membre de cette équation, on doit prendre le signe + ou le signe — devant Σ , suivant que q est de la forme $4r+1$ ou $4r-1$, et, sous le signe Σ , les termes sont tous positifs ou alternativement positifs et négatifs, suivant que p est ou non un multiple de 4.

Si l'on suppose que y ait un module inférieur à l'unité, l'équation (17) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \pm \sum \frac{y^q n^{p-q} \sin nx}{n^p \pm y^p} \\
 & = [a_0 + a_p (\pi y)^p + a_{2p} (\pi y)^{2p} + \dots] \left[\frac{(xy)^q}{1 \dots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1 \dots (q+p)} + \dots \right] \\
 & \quad + a_1 \pi y \left[\frac{(xy)^{q-1}}{1 \dots (q-1)} + \frac{(xy)^{q+p-1}}{1 \dots (q+p-1)} + \dots \right] \\
 & \quad + [a_2 (\pi y)^2 + a_{p+2} (\pi y)^{p+2} + \dots] \left[\frac{(xy)^{q-2}}{1 \dots (q-2)} + \frac{(xy)^{q+p-2}}{1 \dots (q+p-2)} + \dots \right] \\
 & \quad + \dots \\
 & \quad + [a_{p-2} (\pi y)^{p-2} + a_{2p-2} (\pi y)^{2p-2} + \dots] \left[\frac{(xy)^{q-p+2}}{1 \dots (q-p+2)} + \frac{(xy)^{q+2}}{1 \dots (q+2)} + \dots \right],
 \end{aligned}$$

tions (21) membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par

$$\beta^{-1}, \beta^{-2}, \beta^{-3}, \dots, \beta^{-p-1};$$

le coefficient de $\Lambda_x e^{x\beta}$ dans l'équation résultante sera, d'après ce qui précède,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{(x+2s-1)r-(2s-1)\frac{p}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\beta^{x-1+\frac{p}{2}} \sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s-r-\frac{p}{2}};$$

mais, β étant une racine primitive de l'équation

$$x^p - 1 = 0,$$

ξ^2 sera une racine primitive de l'équation

$$\xi^{\frac{p}{2}} - 1 = 0;$$

par conséquent, $\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \xi^{2s-r-\frac{p}{2}}$ n'est autre chose que la somme des puissances $r - \rho$ des $\frac{p}{2}$ racines de l'équation

$$\xi^{\frac{p}{2}} - 1 = 0,$$

somme que l'on sait être égale à $\frac{p}{2}$ ou à zéro, suivant que $r - \rho$ est ou non un multiple de $\frac{p}{2}$. Or, pour une valeur donnée de ρ comprise entre 1 et $\frac{p}{2}$, il y a deux et seulement deux valeurs de r comprises entre 1 et p , qui puissent rendre $r - \rho$ un multiple de $\frac{p}{2}$; ces deux valeurs sont $r = \rho$, $r = \rho \pm \frac{p}{2}$. Toutes les exponentielles autres que $e^{1x\beta}$ et $e^{-\frac{p}{2}x\beta}$ (puisque $\xi^{\pm \frac{p}{2}} = -\xi^{\frac{p}{2}}$) disparaissent donc

de l'équation résultante. Le coefficient de $e^{\beta^p \pi y}$ sera d'ailleurs

$$\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{(2t-1)r+p} \times \frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{2} \sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{2tr},$$

et celui de $e^{-\beta^p \pi y}$ sera

$$\sum_{t=1}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{(2t-1)\left(r \pm \frac{p}{2}\right)+p} \times \frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{p}{2} \sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{2tr}.$$

Pour pouvoir écrire complètement l'équation résultante, il reste à calculer le coefficient de $\frac{\pi \gamma}{2}$. Dans ce coefficient doit figurer chacune des exponentielles telles que $e^{\pi y}$ ou $e^{\beta^p \pi y}$, multipliée évidemment par

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s-(s-1)r} \quad \text{ou} \quad \beta^r \sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s(r-p)}.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on voit qu'il ne subsistera que les deux exponentielles

$$e^{\beta^p \pi y} \quad \text{et} \quad e^{-\beta^p \pi y},$$

multipliées l'une et l'autre par $\frac{p\beta^p}{2}$, en sorte que le coefficient de $\frac{\pi \gamma}{2}$ se réduit à

$$\frac{p\beta^p}{2} (e^{\beta^p \pi y} + e^{-\beta^p \pi y}).$$

Dès lors l'équation résultante sera

$$0 = \frac{p}{2} e^{\beta^p \pi y} \sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{2tr} - \frac{p}{2} e^{-\beta^p \pi y} \sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t} \beta^{2tr} + \frac{\pi \gamma}{2} \frac{p}{2} \beta^p (e^{\beta^p \pi y} + e^{-\beta^p \pi y});$$

v.

d'où, en réduisant,

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{\frac{p}{2}-1} A_{2i} \beta^{(2i-1)r} = \frac{\pi \gamma}{2} \frac{e^{\beta^r \pi \gamma} + e^{-\beta^r \pi \gamma}}{e^{-\beta^r \pi \gamma} - e^{\beta^r \pi \gamma}}.$$

Si maintenant, dans le second membre de l'équation (20), nous mettons en évidence le coefficient de l'une des exponentielles $e^{\alpha \gamma}$, il est clair que ce coefficient sera

$$\begin{aligned} B_n &= A_0 \alpha^{p-r} + A_2 \alpha^{p-r+2} + \dots + A_{p-2} \alpha^{p-r+2} + \frac{\pi \gamma}{2} \alpha^{p-r+1} \\ &= \alpha^{p-r+1} \left(A_0 \alpha^{-1} + A_2 \alpha + \dots + A_{p-2} \alpha^{-1} + \frac{\pi \gamma}{2} \right), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant α par β^r ,

$$B_n = \beta^{r(p-r+1)} \left[\sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-1} A_{2i} \beta^{(2i-1)r} + \frac{\pi \gamma}{2} \right],$$

expression qui devient immédiatement, en vertu de l'équation (22),

$$B_n = \beta^{r(p-r+1)} \frac{\pi \gamma}{2} \left(1 + \frac{e^{\beta^r \pi \gamma} + e^{-\beta^r \pi \gamma}}{e^{-\beta^r \pi \gamma} - e^{\beta^r \pi \gamma}} \right),$$

ou, réduisant et revenant à la racine quelconque α ,

$$B_n = \pi \gamma \alpha^{p-r+1} \frac{e^{-\alpha \gamma}}{e^{-\alpha \gamma} - e^{\alpha \gamma}}.$$

Dès lors la formule (20) prend la forme très-simple

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{p-r} \sin n x}{n^p \pm \gamma^p} = \pm \frac{\pi}{p \gamma^{r-1}} \sum_{\alpha} \frac{\alpha^{p-r+1} e^{\alpha(x-\pi)\gamma}}{e^{-\alpha \gamma} - e^{\alpha \gamma}},$$

et le problème se trouve résolu.

Il convient de rappeler que, dans la formule (23), on doit prendre dans le premier membre le signe + ou le signe —, suivant que p n'est pas ou est divisible par 4; devant le second membre le signe + ou le signe —, suivant que q est de la forme $4r+1$ ou $4r-1$; enfin, que la sommation indiquée dans ce second membre

s'étend à toutes les racines α de l'équation binôme

$$z^p - 1 = 0.$$

Si, dans la formule (23), on fait $p = 2$, $q = 1$, on obtient

$$(24) \quad \sum \frac{n \sin nx}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^y - e^{-y}},$$

formule donnée par Euler.

La formule (23) donne le résultat sous une forme compliquée d'imaginaires pour y réel. Il est facile de faire disparaître les imaginaires en groupant ceux des termes, sous le signe Σ du second membre, qui se rapportent aux quatre racines de l'unité comprises dans la formule

$$\pm y \pm \partial \sqrt{-1}.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté, et l'on obtient en définitive la formule ci-dessous :

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{n^{p-1} \sin nx}{n^p \pm y^p} &= \frac{\pi}{p y^{p-1}} \frac{\sin(\pi-x)y}{\sin \pi y} \\ &\pm \frac{\pi}{p y^{p-1}} \left[\frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^y - e^{-y}} + \sum \zeta(m) \right], \end{aligned} \right.$$

dans laquelle on a

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta(m) &= \frac{\left(e^{xy \cos \frac{2m\pi}{p}} + e^{-xy \cos \frac{2m\pi}{p}} \right) \cos \left[(2\pi-x)y \sin \frac{2m\pi}{p} + \frac{2m(q-1)\pi}{p} \right]}{\cos \left(2\pi y \sin \frac{2m\pi}{p} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{2xy \cos \frac{2m\pi}{p}} + e^{-2xy \cos \frac{2m\pi}{p}} \right)} \\ &- \frac{\left[e^{(2\pi-x)y \cos \frac{2m\pi}{p}} + e^{(x-2\pi)y \cos \frac{2m\pi}{p}} \right] \cos \left[xy \sin \frac{2m\pi}{p} + \frac{2m(q-1)\pi}{p} \right]}{\cos \left(2\pi y \sin \frac{2m\pi}{p} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{2xy \cos \frac{2m\pi}{p}} + e^{-2xy \cos \frac{2m\pi}{p}} \right)}, \end{aligned} \right.$$

et avec ces remarques essentielles :

1° Que le premier terme du second membre n'existe que si p est divisible par 4;

2° Que, devant le second terme, il faut prendre le signe + ou le signe —, suivant que q est de la forme $4r+1$ ou $4r+3$;

3° Enfin qu'il entre sous le signe Σ de ce second terme autant

de termes $\zeta(m)$ que l'on peut donner à m de valeurs entières, depuis 1 compris jusqu'à $\frac{p}{4}$ non compris.

En particulier, pour $p=4$, il n'existe pas de terme ζ , et l'on obtient

$$\begin{aligned}\sum \frac{n \sin nx}{n^4 - y^4} &= \frac{\pi}{4y^3} \left[\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y} - \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \right], \\ \sum \frac{n^3 \sin nx}{n^4 - y^4} &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y} + \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \right];\end{aligned}$$

on en déduit immédiatement

$$\sum \frac{n \sin nx}{n^2 - y^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y},$$

comme cela devait être.

Pour $p=6$, la formule (25) ne contient qu'un seul terme ζ , et l'on obtient le résultat suivant, relativement assez simple :

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{n^{6-q} \sin nx}{n^6 + y^6} &= \pm \frac{\pi}{6y^{q-1}} \left\{ \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \right. \\ &\quad + \frac{\left(e^{\frac{\pi y}{2}} + e^{-\frac{\pi y}{2}} \right) \cos \left[\left(\pi - \frac{x}{2} \right) y \sqrt{3} + \frac{(q-1)\pi}{3} \right]}{\cos \pi y \sqrt{3} - \frac{1}{2}(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \\ &\quad \left. - \frac{\left[e^{\left(\pi - \frac{x}{2} \right) y} - e^{\left(\frac{x}{2} - \pi \right) y} \right] \cos \left[\frac{xy \sqrt{3}}{2} + \frac{(q-1)\pi}{3} \right]}{\cos \pi y \sqrt{3} - \frac{1}{2}(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque p n'est pas un multiple de 4, la formule (25) fournit l'expression de

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p}.$$

Pour obtenir

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p - y^p},$$

il suffirait de remplacer y par $y\sqrt{-1}$ dans la formule, mais on réintroduirait des imaginaires. Il est plus simple de remarquer que

l'on a identiquement

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p} + \sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p - y^p} = 2 \sum \frac{n^{2p-q} \sin nx}{n^{2p} - y^{2p}},$$

$2p$ étant divisible par 4; la dernière de ces trois séries est donnée par la formule (25); il en est de même de la première, ce qui fournit immédiatement la valeur de la seconde. On obtiendrait de la même manière

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p},$$

lorsque p est un multiple de 4.

Si enfin, dans la formule (23), on fait croître p indéfiniment, et qu'on passe à la limite, le premier membre se réduit à $\sum \frac{\sin nx}{n^q}$, dont la valeur est connue sous forme finie, et le second se change en une intégrale définie. Si dans cette dernière on suppose y réel, et qu'on sépare le réel de l'imaginaire, on obtient, toutes réductions faites, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{e^{(x-2\pi)y \cos \theta} \cos[xy \sin \theta - (q-1)\theta] - e^{xy \cos \theta} \cos[(2\pi-x)y \sin \theta + (q-1)\theta]}{e^{2\pi y \cos \theta} + e^{-2\pi y \cos \theta} - 2 \cos(2\pi y \sin \theta)} d\theta \\ &= 2y^{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^q}, \\ & \int_0^{2\pi} \frac{e^{(x-2\pi)y \cos \theta} \sin[xy \sin \theta - (q-1)\theta] + e^{xy \cos \theta} \sin[(2\pi-x)y \sin \theta + (q-1)\theta]}{e^{2\pi y \cos \theta} + e^{-2\pi y \cos \theta} - 2 \cos(2\pi y \sin \theta)} d\theta = 0. \end{aligned}$$

Sur les substitutions linéaires; par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 24 janvier 1877.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution linéaire

$$x' = \frac{bx + d}{ax + c},$$

répétée μ fois, ramène à la valeur initiale, est, d'après M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*),

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

On peut obtenir ce résultat presque immédiatement par les considérations suivantes.

En portant sur une ligne droite les longueurs $x, x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}, x_{\mu} = x$, on obtient une série cyclique de points tels, que le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est constant. On trouve sans difficulté

$$\frac{\overline{13.34}}{\overline{13.24}} = \frac{bc-ad}{(b+c)^2}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème de M. Chasles, si les points doubles de la relation homographique

$$axx' - bx + cx' - d = 0,$$

qui lie deux points homologues (i . e. consécutifs), sont imaginaires, il existe un point du plan duquel ces deux points homologues sont vus sous un angle constant. Si la série forme un cycle de μ points, cet angle sera donc égal à $\frac{\lambda\pi}{\mu}$; car les rayons vecteurs menés du point en question aux μ points de la série partageront la circonférence ou la demi-circonférence en μ parties égales. Enfin on a, dans ce cas,

$$\frac{\overline{13.34}}{\overline{13.24}} = \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{4 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}}$$

ou

$$\frac{b-c}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 14 NOVEMBRE 1876.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

M. le Président rappelle à la Société la perte qu'elle a subie dans la personne de M. Charles Sainte-Claire Deville.

MM. Jordan et Halphen présentent M. *Schubert*, professeur à Hambourg, pour faire partie de la Société.

M. Jordan fait une communication *Sur les groupes, en nombre fini, de substitutions linéaires.*

M. de Polignac fait une communication *Sur les substitutions linéaires formant une série cyclique.* M. Darboux présente quelques observations sur ce sujet.

M. le Président donne lecture d'une lettre de M. le comte L. Hugo au sujet de l'Exposition scientifique de Londres.

M. Halphen communique une note *Sur les correspondances entre les points de deux courbes.* MM. Darboux et Fouret présentent diverses observations sur ce sujet.

SÉANCE DU 29 NOVEMBRE 1876.

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Fouret communique une note *Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection, sous un angle donné, des courbes d'un système avec une courbe algébrique.*

La Société a reçu de M. Brocard deux notes, intitulées : 1° *Sur la division mécanique de l'angle*; 2° *Sur l'enveloppe de la droite de Simson.*

La Société a reçu de M. Saltel deux notes *Sur la théorie des caractéristiques*, et de M. Turquan une note *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps.*

M. Schubert, présenté dans la séance précédente, est élu à l'unanimité membre de la Société.

M. Mannheim fait une communication *Sur la construction du centre de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces.*

M. Halphen présente quelques *Remarques sur les connexes et les systèmes de courbes.*

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1876.

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Darboux fait une communication *Sur l'équilibre statique et la transformation des systèmes de forces.*

La Société reçoit deux notes de M. le comte Léopold Hugo :
1° *Sur les franges d'interférence produites par les plumes d'oiseaux*; 2° *Sur le calcul du nombre π .*

SÉANCE DU 27 DÉCEMBRE 1876.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

M. le comte L. Hugo adresse une note *Sur la généralisation pan-imaginaire.*

M. Lindemann fait hommage à la Société des *Leçons de Géométrie* de Clebsch.

M. Perrin fait une communication *Sur une formule de sommation applicable à une classe de séries.*

La Société ayant reçu de la part de M. Schubert un exemplaire d'une note de MM. Schubert et Hurwitz, *Sur la théorie des caractéristiques*, M. Halphen donne quelques explications à ce sujet. M. Lindemann ajoute quelques observations.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1877.

PRÉSIDENCE DE M. RESAL.

Il est procédé à l'élection d'un président, deux vice-présidents, deux secrétaires, deux vice-secrétaires et de sept membres du Conseil ⁽¹⁾.

M. Haton de la Goupillière fait une communication *Sur la recherche de la brachistochrone, eu égard aux résistances passives.*

M. Laguerre communique une note *Sur un problème d'Algèbre.*

SÉANCE DU 24 JANVIER 1877.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

M. Laguerre adresse une communication *Sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique.*

M. Halphen fait une communication *Sur la liaison qui existe entre les douze tangentes menées d'un même point à une courbe du quatrième degré.*

M. Ed. Lucas communique une *Généralisation d'un théorème de M. Hermite concernant les nombres de Bernoulli.*

M. de Polignac fait une communication *Sur les substitutions linéaires.*

M. Fouret communique une note *Sur les normales communes à deux courbes.*

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1877.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

M. Ed. Lucas fait une communication *Sur la recherche des nombres premiers au moyen des séries récurrentes.*

M. Lindemann fait une communication *Sur la représentation géométrique des formes binaires et de leurs covariants.*

(1) Voir, en tête du volume, le résultat de ces élections.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1877.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communications :

M. le comte Hugo : *Sur l'Euclide de Lemardelé.*

M. Darboux : *Sur une classe de systèmes orthogonaux.*

M. Fouret : *Sur le nombre des points d'un plan en chacun desquels trois courbes de trois systèmes sont tangentes entre elles.*

Cette communication donne lieu à des observations présentées par MM. Halphen et Lindemann.

M. Halphen : *Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches.*

Cette communication donne lieu à des remarques faites par M. Darboux.

M. Lucas : *Généralisation du théorème de Fermat, et du Canon arithmétique.*

M. le comte Hugo : *Sur l'origine de l'analyse indéterminée.*

M. Laguerre : *Sur la partition des nombres.*

SÉANCE DU 7 MARS 1877.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. le comte Hugo : 1° *Sur un groupement de polygones, provenant d'une ancienne collection chinoise*; 2° *Sur les travaux d'Hypsicle.*

M. Ed. Lucas : *Sur la recherche des grands nombres premiers.*

M. Vicaire : *Sur la distribution de la chaleur dans les fours à cuve.*

M. Laguerre : *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationnelles.*

SÉANCE DU 21 MARS 1877.

Communications :

M. le Président présente, de la part de M. Darboux, un Mémoire intitulé : *Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution.*

M. Laguerre : *Sur le développement de $e^{\arctan \frac{1}{x}}$ en fraction continue.*

M. Fouret : *Sur les courbes et sur les surfaces qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques par rapport à une infinité de courbes ou de surfaces du second degré.*

M. Halphen : *Sur une formule de la théorie de l'élimination.*
Cette communication donne lieu à diverses remarques présentées par MM. Fouret et Lindemann.

M. Laguerre : *Sur quelques propriétés des normales à l'ellipse.*

M. Haton de la Goupillière : *Sur les développoides.*

SÉANCE DU 4 AVRIL 1877.

PRÉSIDENTE DE M. ROUCHÉ.

Présentations de nouveaux membres : M. Lindemann, privat-docent à l'Université de Wurzburg, et M. Pousset, professeur au lycée de Poitiers.

Communications :

M. le comte Hugo : 1° *Sur certains appareils à lentille construits par les Égyptiens*; 2° *Sur le papyrus Rhind.*

M. Halphen : *Sur les caractéristiques des systèmes de figures.*

M. Laguerre : *Sur la multiplication par 3 des fonctions elliptiques.*

M. Ed. Lucas : *Sur l'analyse indéterminée.*

M. Fouret : *Sur le nombre des courbes d'un système qui touchent une courbe.*

M. Saltel : *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques.*

Sur la partition des nombres; par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 février 1877.)

1. Le problème à résoudre est le suivant : *Étant donnés des nombres entiers $a, b, \dots, z$ et un nombre entier variable N , trouver le nombre des solutions en nombres entiers et positifs de l'équation*

$$N = ax + by + \dots + lz.$$

Comme l'a remarqué Euler, le nombre $T(N)$ des solutions est égal au coefficient de N dans le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\dots(1-z^l)}$$

suivant la puissance croissante de z .

Je me propose ici de trouver, non pas la valeur exacte de $T(N)$, mais une formule qui donne une valeur approchée de cette fonction, l'erreur commise ayant d'ailleurs une limite fixe *indépendante de la valeur de N* (').

2. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

LEMME. — Soit $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ une fraction rationnelle telle, que les racines de l'équation $f(z) = 0$ soient toutes inégales et aient toutes pour module l'unité; si l'on développe cette fraction en série suivant les puissances croissantes de z , tous les coefficients du développement demeurent, en valeur absolue, inférieurs à une limite déterminée.

Démonstration. — Soit

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \Phi(z) + \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \dots + \frac{L}{z-\lambda},$$

$\Phi(z)$ désignant la partie entière de la fraction et $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ les

(') Les résultats contenus dans cette Note ne sont peut-être pas nouveaux; mais ils me paraissent peu connus, et, en raison de leur simplicité, j'ai pensé qu'ils pourraient intéresser quelques lecteurs.

racines de l'équation $f(z) = 0$; le coefficient d'une puissance quelconque de z dans le développement de la fraction sera de la forme

$$p + A\alpha^n + B\beta^n + \dots + L\lambda^n,$$

designant, s'il y a lieu, le terme provenant de Φ .

Le terme complémentaire $A\alpha^n + B\beta^n + \dots + L\lambda^n$ est, en vertu d'un théorème bien connu, inférieur à la somme des modules de ses différents termes et par conséquent inférieur à $A + B + \dots + L$.

Le lemme est donc démontré.

3. Considérons maintenant l'expression

$$F(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\dots(1-z^l)};$$

décomposons cette expression en fractions simples et réunissons en un même groupe $\Phi(z)$ toutes les fractions dont le dénominateur est une puissance supérieure à la première d'un des facteurs du dénominateur $F(z)$; réunissons de même dans un groupe $\varphi(z)$ toutes les fractions qui ont l'un de ces facteurs pour dénominateur.

On aura évidemment

$$F(z) = \Phi(z) + \varphi(z),$$

et, en désignant respectivement par $\Theta(N)$ et $\theta(N)$ les coefficients de x^N dans les développements de $\Phi(z)$ et de $\varphi(z)$,

$$T(N) = \Theta(N) + \theta(N).$$

Le dénominateur de $\varphi(z)$ n'ayant que des racines simples dont le module est égal à l'unité, il suit du lemme énoncé plus haut que $\theta(N)$ reste en valeur absolue inférieur à une quantité donnée; on aura donc approximativement

$$T(N) = \Theta(N),$$

l'erreur commise étant inférieure à une limite fixe indépendante du nombre N .

4. *Applications.* — Soit à résoudre, en nombres entiers et positifs, l'équation $ax + by = N$, a et b étant deux nombres entiers

premiers entre eux; on aura dans ce cas

$$F(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)}$$

et

$$\Phi(z) = \frac{1}{ab} \frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où

$$\Theta(N) = \frac{N+1}{ab},$$

et par suite, en négligeant la quantité constante $\frac{1}{ab}$, ce qui est permis en égard à l'approximation que l'on veut obtenir,

$$T(N) = \frac{N}{ab}.$$

C'est la formule donnée par Paoli et l'on sait, dans ce cas, que l'erreur est moindre que l'unité.

Soit encore à résoudre l'équation

$$ax + by + cz = N,$$

a , b et c étant trois nombres premiers entre eux.

On aura dans ce cas

$$\Phi(z) = \frac{1}{abc} \frac{1}{(1-z)^3} - \frac{a+b+c-3}{2abc} \frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où, en négligeant une quantité constante, ce qui est permis vu l'approximation que l'on veut obtenir,

$$T(N) = \frac{N}{2abc} (N + a + b + c).$$

Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles; par M. LACERRE.

(Séance du 7 mars 1877.)

La méthode que je développe dans cette Note, pour les cas les plus simples, s'applique sans difficulté aux fonctions de la forme e^w .

où W désigne une fonction rationnelle quelconque de x , et aux fonctions de la forme

$$(ax + b)^{\alpha}(a'x + b')^{\alpha'} \dots,$$

où $\alpha, \alpha', \dots$ désignent des quantités arbitraires quelconques.

Le principe que j'ai mis en usage est le suivant : $F(x)$ étant une fonction donnée et $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ la fraction rationnelle dont le dénominateur est d'un degré donné et qui se rapproche le plus de la valeur de la fonction, je cherche à établir entre $\varphi(x), f(x)$ et leurs dérivées du premier ordre une relation algébrique qui soit linéaire par rapport à l'une de ces fonctions, $\varphi(x)$ par exemple, et par rapport à sa dérivée.

Cela posé, en considérant pour un instant $f(x)$ comme connue, et $\varphi(x)$ comme une fonction inconnue, on aura une équation linéaire du premier ordre que l'on saura intégrer au moyen d'une quadrature. Comme le résultat de l'intégration est connu d'avance, il suffira de déterminer à quelles conditions doit satisfaire $f(x)$ pour que ce résultat soit de la forme voulue.

On déterminera généralement ainsi une équation linéaire et du second ordre à laquelle satisfera le polynôme $f(x)$; cette équation admet une seconde solution qui s'exprime facilement au moyen du polynôme $\varphi(x)$, ou encore, si l'on pose

$$f(x)F(x) = \varphi(x) + R,$$

au moyen de R , comme l'a fait voir M. Christoffel ⁽¹⁾ relativement aux polynômes de Legendre.

I.

Développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1. Soit

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\varphi'(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right) \quad (2),$$

⁽¹⁾ Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben (Journal de Crelle, t. 55).

⁽²⁾ Pour abréger, je désignerai dans tout ce qui suit par $\left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)$ une série ordonnée

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent respectivement des polynômes du degré n et du degré $(n-1)$.

On en déduit

$$\log \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \log \varphi(x) - \log f(x) + \left(\frac{1}{x^{2n}} \right),$$

parce que $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est du degré (-1) en x ; puis, en prenant 1 dérivées des deux nombres,

$$-\frac{x}{x^2-1} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

et

$$(1) \quad x\varphi(x)f(x) + (x^2-1)[f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x)] = A,$$

A désignant une constante.

Si, dans cette équation, on regarde $f(x)$ comme connue, on peut déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre, on se conduit à poser

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}} z,$$

z étant déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} f^2(x) \sqrt{x^2-1} = A,$$

d'où

$$(3) \quad z = \int \frac{A}{\sqrt{x^2-1} f^2(x)} dx,$$

ou encore, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \dots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{A}{f^2(x)} = \sum \frac{p}{x-\alpha^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

$$z = \sum \int \left[\frac{p}{\sqrt{x^2-1} (x-\alpha^2)} + \frac{q}{\sqrt{x^2-1} (x-\alpha)} \right] dx,$$

suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^n}$, et par (x^∞) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^m .

ou encore, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} z &= \sum \left\{ -\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} \right. \\ &\quad \left. + \int \left[\frac{q}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} - \frac{px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right] dx \right\} \\ &= \sum \left[-\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{q(x^2-1) - px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx \right]. \end{aligned}$$

On déduit de là facilement que z se compose d'une partie algébrique, d'une expression de la forme

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$$

et de termes de la forme

$$\int \frac{q(\alpha^2-1) - p\alpha}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Chacun de ces termes doit évidemment être nul; or un calcul facile donne

$$\frac{p}{-f'(\alpha)} = \frac{q}{f''(\alpha)};$$

on a donc la relation

$$(\alpha^2-1)f''(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = 0,$$

qui doit avoir lieu pour toute racine de l'équation $f(x) = 0$; d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation différentielle du second ordre de la forme

$$(x^2-1)y'' + xy' + Py = 0.$$

La valeur de P s'obtient immédiatement en écrivant que le coefficient de x^2 , dans le premier membre, est égal à zéro. On obtient ainsi l'équation bien connue

$$(4) \quad (x^2-1)y'' + xy' - n^2y = 0.$$

2. Puisque le polynôme $f(x)$ est une solution de l'équation (4),

on obtiendra une seconde solution de cette équation en posant

$$y = f(x) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1} f'(x)},$$

ou bien, en vertu de l'équation (3),

$$y = f(x) z,$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$y = \varphi(x) \sqrt{x^2 - 1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (4) est donc

$$A f(x) + B \varphi(x) \sqrt{x^2 - 1}.$$

3. Supposons maintenant que, dans l'équation (1), $\varphi(x)$ soit regardée comme connue; pour intégrer cette équation, nous posons

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \varphi(x) t,$$

t étant déterminée par l'équation différentielle

$$-\frac{dt}{dx} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \varphi^2(x) = \Lambda,$$

d'où

$$-t = \int \frac{\Lambda dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \varphi^2(x)}.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\Lambda}{\varphi^2(x)} = \sum \frac{p}{(x - \alpha)^2} + \frac{q}{(x - \alpha)},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ désignant les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, un calcul entièrement analogue à celui que j'ai développé plus haut montre que l'on doit avoir pour chacune des racines

$$q(\alpha^2 - 1) - 3p\alpha = 0,$$

et par suite

$$(\alpha^2 - 1)\varphi''(\alpha) + 3\alpha\varphi'(\alpha);$$

d'où l'on conclut que $\varphi(x)$ est une solution de l'équation différen-

tielle du second ordre

$$(5) \quad (x^2 - 1)u'' + 3xu' + (1 - n^2)u = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que cette équation n'est autre que la dérivée de l'équation (4), dans laquelle on aurait remplacé y' par u , on en conclut qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f'(x)$.

Il est clair du reste, ce qui est facile à vérifier, que l'équation (5) se déduit aussi de l'équation (4) par la substitution

$$y = u \sqrt{x' - 1}.$$

II.

Développement de $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$.

4. Soit m une quantité quelconque ; posons

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} + \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes entiers du degré n .

On en déduit

$$m \log \frac{x+a}{x+b} = \log \varphi(x) - \log f(x) + \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right);$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{m(b-a)}{(x+a)(x+b)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{n+2}}\right),$$

d'où

$$(6) \quad m(b-a)\varphi(x)f(x) + (x+a)(x+b)[\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x)] = A,$$

A désignant une constante.

Si dans cette équation on regarde $f(x)$ comme connue, on a, pour déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre ; en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre, on posera

$$(7) \quad \varphi'(x) = f(x) \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m z,$$

6.

z étant déterminée par la relation

$$(8) \quad -z = \int \frac{\Lambda(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f'(x)} dx.$$

On doit chercher quelle forme doit avoir $f(x)$ pour que z ait une expression de la forme donnée par la relation (7); m étant quelconque, on y parviendrait aisément en suivant une marche analogue à celle que j'ai suivie dans le paragraphe précédent; mais on parviendra plus vite à l'équation du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$ en supposant que m est un nombre entier.

Dans ce cas, je ferai remarquer d'abord qu'en vertu de l'équation (6), $f(x)$ ne peut être divisible par $(x+a)$, car autrement ce binôme diviserait la constante Λ qui n'est pas nulle; il est clair également que $f(x) = 0$ a toutes ses racines distinctes. En appelant donc $\alpha, \beta, \dots$ les racines de cette équation, on aura un développement de la forme

$$\frac{\Lambda(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f'(x)} = \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha} + \frac{\Lambda_m}{(x+a)^{m+1}} + \frac{\Lambda_{m-1}}{(x+a)^m} + \dots + \frac{\Lambda_0}{x+a};$$

et, pour que z ait la forme donnée par la relation (7), il faut que $\Lambda_0 = 0$, et ensuite que $q = 0$ pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$. En tenant compte seulement de cette dernière condition, le calcul de q montre facilement que, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$, on doit avoir

$$(\alpha+a)(\alpha+b)f''(\alpha) + [2\alpha - m(a-b) + a+b]f'(\alpha) = 0;$$

d'où l'on voit que $f(x)$ satisfait à l'équation du second ordre

$$(9) \quad (x+a)(x+b)y'' + [2x - m(a-b) + a+b]y' - n(n+1)y = 0.$$

5. Cette équation pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x+a)^{m+1}}{\Lambda(x+b)^{m-1}} y' \right] + P y = 0;$$

on voit que, le polynôme $f(x)$ étant une de ses solutions, une autre

sera donnée par la formule

$$y = f(x) \int \frac{A(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1} f^2(x)} dx,$$

ou, en vertu des équations (8) et (7),

$$y = -\varphi(x) \left(\frac{x+b}{x+a} \right)^m.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(x) \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^m = \varphi(x) + R,$$

une seconde solution sera également donnée par l'équation

$$(10) \quad y = R \left(\frac{x+b}{x+a} \right)^m.$$

6. L'équation à laquelle satisfait le polynôme $\varphi(x)$ s'obtiendrait par la même méthode; mais on voit immédiatement qu'elle se déduit de la première en changeant m en $-m$; cette équation est donc

$$(x+a)(x+b)u'' + [2x + m(a-b) + a+b]u' - n(n+1)u = 0.$$

Elle se déduit évidemment de l'équation (9), et il est facile de le vérifier par la substitution

$$y = u \left(\frac{x+b}{x+a} \right)^m.$$

7. Pour obtenir sous forme explicite les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, je remarque qu'en posant

$$x = a - b\xi - a$$

l'équation (9) devient

$$(\xi - \xi') \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (m+1 - 2\xi) \frac{dy}{d\xi} + n(n+1)y = 0;$$

cette équation est un cas particulier de celle qui définit la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$,

$$\xi - \xi' \frac{d^2 y}{d\xi^2} + [\gamma - \alpha - \beta - 1 - \xi] \frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0;$$

on a

$$\gamma = m + 1, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n + 1.$$

Le polynôme $f(x)$ sera donc donné par la formule

$$f(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{m+1} \left(\frac{x+a}{a-b} \right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \left(\frac{x+a}{a-b} \right)^2 \\ + \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)} \left(\frac{x+a}{a-b} \right)^n.$$

Le polynôme $\varphi(x)$ s'obtiendrait, à un facteur numérique près, en changeant le signe de m dans la formule précédente.

8. Comme application, supposons $a = 1$ et $b = -1$, on aura alors

$$f(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{m+1} \left(\frac{1+x}{2} \right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \left(\frac{1+x}{2} \right)^2 - \dots$$

et

$$\varphi(x) = \left[1 - \frac{n(n+1)}{1-m} \left(\frac{1+x}{2} \right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (1-m)(2-m)} \left(\frac{1+x}{2} \right)^2 + \dots \right] \\ \times \frac{(1-m)(2-m) \dots (n-m)}{(1+m)(2+m) \dots (n+m)} (-1)^n.$$

Comme $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, on en conclut que les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, donnés par les formules précédentes, sont liés par la relation

$$\varphi(x) = f(-x).$$

Faisons, par exemple, $m = \frac{1}{2}$ et $n = 3$, il viendra

$$f(x) = 1 - 4(1+x) + 4(1+x)^2 - \frac{8}{7}(1+x)^3$$

et

$$\varphi(x) = -\frac{1}{7} [1 - 12(1+x) + 20(1+x)^2 - 8(1+x)^3],$$

ou, en réduisant,

$$f(x) = \frac{1}{7}(-1 + 4x + 4x^2 - 8x^3)$$

et

$$\varphi(x) = \frac{1}{7}(-1 - 4x + 4x^2 + 8x^3).$$

Si l'on désigne par S_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$, on doit avoir

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2} \quad (1).$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier au moyen des formules de Newton.

9. Si l'on considère l'expression $\frac{1}{m} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m - 1 \right]$, son développement en fraction continue donnera des réduites dont le dénominateur $f(x)$ sera le même que celui des réduites auxquelles conduit le développement de $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m$.

En faisant, dans l'équation (9), $b = -1$ et $a = +1$, on voit donc que ce dénominateur satisfait à l'équation différentielle

$$(9)' \quad (x^2 - 1)y'' + 2(x - m)y' - n(n+1)y = 0;$$

et, de ce que j'ai dit plus haut, il résulte qu'en posant

$$f(x) \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m = \varphi(x) + R$$

l'équation (9)' a encore pour solution $R \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^m$.

Si nous supposons maintenant que m tende vers zéro,

$$\frac{1}{m} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^m - 1 \right]$$

(1) Voir ma Note *Sur un problème d'Algèbre*. (Bulletin de la Société mathématique, t. V).

Je saisis cette occasion pour déclarer que M. Borchardt était déjà parvenu antérieurement aux résultats renfermés dans cette Note.

a pour limite $\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, l'équation (9)' devient l'équation bien connue qui définit les polynômes de Legendre et l'on voit, comme l'a fait voir M. Christoffel, que R en est une solution.

10. Considérons maintenant l'expression

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\alpha + \beta x}{m(\gamma + \delta x)}\right]^m &= \left[\frac{(m\delta + \beta)x + m\gamma + \alpha}{m\gamma + m\delta x}\right]^m \\ &= \left(\frac{m\delta + \beta}{m\delta}\right)^m \left(\frac{x + \frac{m\gamma + \alpha}{m\delta + \beta}}{x + \frac{\gamma}{\delta}}\right)^m; \end{aligned}$$

pour avoir son développement en fraction continue, nous poserons

$$\frac{m\gamma + \alpha}{m\delta + \beta} = a \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\delta} = b;$$

le dénominateur de degré n de la fraction satisfera à l'équation suivante, que l'on déduit immédiatement de l'équation (9) :

$$\begin{aligned} &\left(x + \frac{m\gamma + \alpha}{m\delta + \beta}\right) \left(x + \frac{\gamma}{\delta}\right) \\ &+ \left[2x - \frac{m(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\delta(m\delta + \beta)} + \frac{m\gamma + \alpha}{m\delta + \beta} + \frac{\gamma}{\delta}\right] - n(n+1)y = 0. \end{aligned}$$

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre m , la fonction $\left[1 + \frac{\alpha + \beta x}{m(\gamma + \delta x)}\right]^m$ aura pour limite $e^{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}$, et l'équation précédente deviendra

$$(11) \quad (\gamma + \delta x)^2 y'' + [2\delta(\gamma + \delta x) - (\alpha\delta - \beta\gamma)]y' - n(n+1)\delta^2 y = 0.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur $f(x)$ d'une réduite de la fonction $e^{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}$; en posant

$$f(x) e^{\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}} = \varphi(x) + R,$$

$\varphi(x)$ désignant le numérateur de la réduite, une deuxième solution

de cette équation sera donnée par la formule

$$y = \varphi(x) e^{-\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}},$$

ou encore par celle-ci

$$y = R e^{-\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}.$$

De ce que j'ai dit plus haut, il résulte aussi que $\varphi(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(\gamma + \delta x)^2 u'' + [2\delta(\gamma + \delta x) + (\alpha\delta - \beta\gamma)] u' - n(n+1)\delta^2 u = 0,$$

et cette équation se déduit de l'équation (11) par la substitution

$$y = u e^{-\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}.$$

III.

Développement de $e^{F(x)}$.

11. Pour traiter un cas un peu plus général, considérons la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme quelconque de degré m et posons

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + (x^{2n+1}),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes du degré n .

On en déduit

$$F(x) = \log \varphi(x) - \log f(x) + (x^{2n+1})$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + (x^{2n}),$$

puis

$$(12) \quad F'(x) \varphi(x) f(x) - \varphi'(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) = x^{2n} \Theta(x),$$

$\Theta(x)$ désignant un polynôme du degré $m - 1$.

Si dans cette équation on considère $f(x)$ comme connu, on a une équation linéaire et du premier ordre par rapport à $\varphi(x)$. On l'intégrera en considérant d'abord le second membre comme

égal à zéro, et posant

$$(13) \quad \varphi(x) = e^{F(x)} f(x) z,$$

z étant déterminé par la relation

$$(14) \quad -z = \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n} \Theta(x) dx}{f^2(x)}.$$

En désignant par $\alpha, \beta, \dots$ les diverses racines de l'équation $f(x) = 0$, on pourra poser

$$\frac{x^{2n} \Theta(x)}{f^2(x)} = P + \sum \frac{p}{(x - \alpha)^2} + \sum \frac{q}{x - \alpha},$$

P désignant un polynôme du degré $(n - 1)$ en x ; d'où

$$-z = \int e^{-F(x)} P dx + \sum \int \frac{e^{-F(x)} p dx}{(x - \alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-F(x)} q dx}{x - \alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le second terme de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-F(x)} P dx - \sum \int \frac{p e^{-F(x)}}{x - \alpha} + \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - p F'(x)}{x - \alpha} dx,$$

ou encore

$$\begin{aligned} -z &= \int e^{-F(x)} P dx - \sum \int \frac{p e^{-F(x)}}{x - \alpha} \\ &\quad - \sum \int e^{-F(x)} \frac{p [F'(x) - F'(\alpha)]}{x - \alpha} dx \\ &\quad + \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - p F'(\alpha)}{x - \alpha} dx. \end{aligned}$$

Si l'on examine cette expression de z , on voit que, pour qu'elle ait la valeur assignée par la relation (13), on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$q - p F'(\alpha) = 0.$$

Or un calcul facile donne

$$\frac{p}{f'(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \right] f'(\alpha) - f''(\alpha)};$$

on aura donc, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$f''(x) - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - F'(x) \right] f'(x) = 0;$$

d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$(15) \quad y'' + \left[F'(x) - \frac{2n}{x} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} \right] y' + H(x)y = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{F(x)}}{x^{2n}\Theta(x)} y' \right] + H_1(x)y = 0;$$

on en conclut qu'une seconde solution est donnée par la formule

$$y = f(x) \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n} \Theta(x)}{f'(x)} dx,$$

ou, en vertu des équations (13) et (14)

$$y = \varphi(x) e^{-F(x)}.$$

12. On déterminerait de même l'équation du second ordre à laquelle satisfait $\varphi(x)$; sans refaire tous les calculs précédents, on voit immédiatement que cette équation est de la forme

$$(16) \quad u'' - \left[F'(x) + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} \right] u' + K(x)u = 0;$$

c'est du reste la transformée de l'équation (15), quand on pose

$$y = ue^{-F(x)}.$$

Effectuant cette transformation sur l'équation (15), il vient

$$(17) \quad u'' - \left[F'(x) + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} \right] u' + \left[H(x) + \frac{2n}{x} F'(x) + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} F'(x) - F''(x) \right] u = 0.$$

13. Nous avons encore, pour former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$, à déterminer le polynôme

$\Theta(x)$ et la fraction rationnelle $H(x)$, qui est de la forme

$$\frac{K(x)}{x\Theta(x)},$$

$K(x)$ désignant un polynôme du degré $(2m - 2)$. A cet effet, si nous posons

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

et

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots,$$

et si nous désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les coefficients inconnus des polynômes Θ et K , les équations (16) et (17) permettront d'exprimer, au moyen de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$.

D'ailleurs, l'équation (12) donne également des relations entre ces coefficients et les coefficients inconnus de Θ ; de ces relations on déduira facilement les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Dans une prochaine Note, je communiquerai à la Société le résultat de mes recherches sur le développement de la fonction e^{ax+bx^2} et de la fonction $e^{ax^2+bx^3}$.

Sur quelques théorèmes de Joachimsthal; par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 mars 1877.)

1. Joachimsthal termine ainsi ⁽¹⁾ une des Notes nombreuses et élégantes qu'il a publiées sur la théorie des normales à une conique :

« Je vais indiquer une proposition qui est fondamentale dans cette théorie : »

» THÉORÈME. — Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales en ces points concourent en un même point. Si l'on tire, par un sommet S de la conique, trois parallèles à pq, qr, rp , le centre de gravité des trois points où ces parallèles rencontrent la courbe est situé sur l'axe qui contient le sommet S . »

⁽¹⁾ Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement trouvée (Journal de Crellé, t. 48).



La proposition précédente, ainsi que beaucoup d'autres dues au même géomètre, peuvent se déduire très-simplement des considérations suivantes.

2. Étant donnés une conique K et deux points fixes A et B , dont le premier A soit sur la courbe, si l'on imagine les divers cercles qui passent par ces deux points, chacun d'eux rencontre la conique en trois points distincts du point A , et il est clair que le triangle déterminé par ces points enveloppe, lorsque le cercle varie, une parabole.

Réciproquement, si divers triangles, inscrits dans une conique K , sont circonscrits à une parabole, les cercles qui leur sont circonscrits passent par deux points fixes, dont l'un est situé sur la conique et dont l'autre, situé en dehors de cette conique, est le foyer de la parabole.

On en déduit immédiatement que :

Si divers triangles, inscrits dans une conique K , sont circonscrits à une parabole :

1° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles sont situés sur une même droite ;*

2° *Les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur une ligne droite.*

3. Soient M un point situé sur une conique K et MN la normale en ce point ; si de chaque point m de la droite MN on mène des normales à la courbe, les pieds des normales distinctes de MN formeront un triangle dont les côtés enveloppent évidemment une parabole.

On en conclut que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un point fixe de la courbe. Soient a, a' et b, b' les extrémités des axes de la conique, M' et M'' les symétriques du point M relativement à ces axes ; si l'on abaisse les normales du point α où MN rencontre aa' , les pieds des normales distinctes de M sont a, a' et M' ; de même, si l'on abaisse les normales du point p où MN coupe bb' , les pieds des normales distinctes de M sont b, b' et M'' . Or il est évident que les cercles circonscrits aux deux triangles $aa'M'$ et $bb'M''$ se coupent tous deux sur la courbe, au point μ symétrique de M par rapport au centre.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, en quatre points d'une conique p, q, r, s , les normales concourent en un même point, le cercle circonscrit aux trois points q, r, s passe par le point p' symétrique du point p par rapport au centre de la conique. (JOACHIMSTHAL.)

On peut remarquer de plus que le centre de gravité du triangle $aa'M'$ et le centre de gravité du triangle $bb'M''$ sont situés sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point M . Donc :

Si les normales menées en trois points p, q, r d'une conique concourent en un même point μ , le centre de gravité du triangle pqr se trouve sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le pied de la quatrième normale que l'on peut abaisser du point μ .

4. Il est à remarquer que toutes les propriétés des normales à une même conique sont multiples. Si l'on considère, en effet, le triangle formé par les deux axes et la droite de l'infini, chacun des côtés de ce triangle joue le même rôle relativement aux normales. Cela résulte immédiatement de cette propriété très-simple : *Si l'on effectue une transformation homographique de façon qu'aux foyers d'une conique correspondent les deux ombilics ⁽¹⁾ du plan, les normales à cette conique deviennent après la transformation les normales à la conique transformée.*

En particulier, si l'on prend pour point de départ la proposition de Joachimsthal énoncée plus haut et que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le point diamétralement opposé à p , les droites rs et qp' sont également inclinées sur les axes,

(¹) J'appelle ici *ombilics* les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles d'un plan; j'appelle de même *ombilicale* la conique imaginaire située à l'infini et commune à toutes les sphères de l'espace.

Les propriétés des normales à une surface du second ordre sont également multiples; car, si l'on effectue une transformation homographique, de telle sorte qu'à la focale d'une surface du second ordre corresponde l'ombilicale, les normales à la surface ont pour transformées les normales à la surface transformée.

on en déduira immédiatement la proposition suivante qui, sous une autre forme, a été donnée également par Joachimsthal :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le symétrique du point p par rapport à l'un des axes, les droites rs et qp' rencontrent cet axe en deux points situés à égale distance du centre.

5. En conservant les notations précédentes (3), soit MN la normale menée en un point M d'une conique K . De chaque point m de cette droite on peut mener trois normales à la courbe distinctes de MN ; soient a, b, c les pieds de ces normales. Par un sommet S de la conique, menons des droites parallèles à bc, ca, ab et soient respectivement α, β, γ les points où ces droites coupent la courbe. En remarquant qu'on ne peut mener à la parabole enveloppée par les côtés du triangle abc qu'une tangente parallèle à une direction donnée, on verra facilement que le point α détermine les points associés β et γ ; par suite le triangle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique que l'on voit immédiatement être une parabole. Le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit par suite une ligne droite; en plaçant successivement le point m sur chacun des axes, on voit que, pour chacun des triangles correspondants, le centre de gravité est sur l'axe passant par le point S .

La proposition de Joachimsthal que j'ai énoncée au commencement de cette Note est donc démontrée.

Sur le développement en fraction continue de $e^{a \cdot c \operatorname{tang} \left(\frac{1}{x} \right)}$;
par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 mars 1877.)

1. Posons

$$e^{a \cdot c \operatorname{tang} \left(\frac{1}{x} \right)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes du degré n et $\left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right)$ une

série développée suivant les puissances décroissantes de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme de la forme $\frac{\varepsilon}{x^{2n+1}}$.

Comme $e^{\operatorname{arctang}(\frac{1}{x})}$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, il en résulte qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$; d'ailleurs pour $x = \pm \infty$, le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ se réduit à l'unité; on a donc

$$\varphi(x) = (-1)^n f(-x).$$

En employant la méthode que j'ai exposée dans une Note précédente (1), on obtient facilement l'équation différentielle suivante, à laquelle satisfait le polynôme $f(x)$,

$$(1) \quad (1+x^2)y'' + (2x-1)y' - n(n+1)y = 0.$$

Le polynôme $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$(1+x^2)u'' + (2x+1)u' - n(n+1)u = 0,$$

équation qui se déduit de la précédente par la substitution

$$y = ue^{-\operatorname{arctang}(\frac{1}{x})},$$

ou encore

$$y = ue^{\operatorname{arctang} x}.$$

On en conclut que l'intégrale générale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$y = Af(x) + Bf(-x)e^{\operatorname{arctang} x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

2. Posons

$$x = i(1-2z),$$

d'où

$$z = \frac{1+ix}{2},$$

(1) Sur l'approximation d'une fonction d'une variable au moyen de fractions rationnelles (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 78 de ce tome).

l'équation (1) deviendra

$$(z - z^2)y'' + \left(1 + \frac{i}{2} - 2z\right)y' + n(n+1)y = 0,$$

équation qui définit une série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, pour laquelle on a

$$\gamma = 1 + \frac{i}{2}, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n+1.$$

Cette série est évidemment un polynôme du degré n en z ; on a, par suite, en désignant par K un facteur indépendant de x ,

$$f(x) = K F\left(-n, n+1, \gamma, \frac{1+ix}{2}\right).$$

Convenons de déterminer le polynôme $f(x)$ par la condition que $\frac{f(x)}{x^n}$ soit, pour $x = +\infty$, égal à

$$\frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n};$$

en divisant les deux membres de la relation précédente par x^n et en faisant croître indéfiniment x , il viendra

$$1 = K \frac{i^n}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)},$$

d'où

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = \frac{i^n f(x)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)}.$$

Si, pour plus de clarté, nous représentons $f(x)$ par V_n , et si nous posons, pour abrégé,

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = F(-n),$$

on déduit de là

$$(2) \quad \frac{F(-n)}{V_n \frac{i}{\gamma+n-1}} = \frac{F(-n+1)}{V_{n-1}} = - \frac{F(-n-1)}{V_{n+1}(\gamma+n)(\gamma+n-1)}.$$

3. Cela posé, en désignant respectivement par Φ , Φ_1 et Φ_2 les

trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, z) \quad \text{et} \quad F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, z),$$

on déduit facilement, des relations données par Gauss ⁽¹⁾, la relation suivante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)z + \frac{\alpha(\gamma - \alpha - 1)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{(\gamma - \alpha)(\alpha - 1)}{\beta - \alpha + 1} \right] \Phi \\ & - \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha + 1} \Phi_1 - \frac{\alpha(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha - 1} \Phi_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette relation, on fait

$$z = \frac{1 + ix}{2}, \quad \alpha = -n, \quad \beta = n + 1 \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{i}{2},$$

Φ , Φ_1 et Φ_2 deviennent respectivement $F(-n)$, $F(-n - 1)$, $F(-n + 1)$, et l'on obtient l'équation

$$-i(2n + 1)x F(-n) - (\gamma + n)F(-n - 1) + (\gamma - n - 1)F(-n + 1) = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation, $F(-n)$, $F(-n + 1)$ et $F(-n - 1)$ par les valeurs proportionnelles déduites des relations (2) et γ par sa valeur $1 + \frac{i}{2}$, il viendra

$$(4) \quad V_{n+1} = -(2n + 1)x V_n + \left(n^2 + \frac{1}{4}\right) V_{n-1}.$$

4. Déduisons de (4) les valeurs de V_{n+1} , V'_{n+1} et V''_{n+1} , et portons-les dans l'identité

$$V''_{n+1} + (2x + 1)V'_{n+1} - (n + 1)(n + 2)V_{n+1} = 0,$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$(5) \quad 2(1 + x^2)V'_n - (2nx - 1)V_n + 2\left(n^2 + \frac{1}{4}\right)V_{n-1} = 0.$$

5. Des formules précédentes on déduit les valeurs suivantes des

⁽¹⁾ *Disquisitiones generales circa seriem* (Gauss Werke, t. III, p. 130).

polynômes V_n :

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{1}{2} - x, \quad V_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + 3x^2, \quad \dots$$

Si l'on désigne, en général, par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $V_n = 0$, il est clair que l'on aura

$$S_1 = S_3 = S_5 = \dots = \frac{1}{2}$$

et

$$S_2 = S_4 = S_6 = \dots = -\frac{1}{2},$$

m étant au plus égal à $2n - 1$.

6. De la relation (4) résulte le développement suivant de $e^{\text{arc tang} \left(\frac{1}{x}\right)}$ en fraction continue :

$$e^{\text{arc tang} \left(\frac{1}{x}\right)} = 1 - \frac{1}{\frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{4}}{-3x + \frac{4 + \frac{1}{4}}{-5x + \frac{9 + \frac{1}{4}}{-7x + \dots}}}}$$

dont la loi est évidente.

7. Les considérations qui précèdent s'appliquent, sans aucun changement, au développement en fonction de $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)$, quelles que soient les quantités a , b et m .

Du reste, cette expression donne en particulier la fonction $e^{\text{arc tang} \left(\frac{1}{x}\right)}$ quand on y fait $a = i$, $b = -i$ et $m = -\frac{i}{2}$.

*Étude d'une question relative au mouvement d'un point
sur une surface de révolution; par M. G. DARBOUX.*

(Séance du 21 mars 1877.)

I.

Dans un article inséré aux *Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 849, M. Bertrand s'est proposé de rechercher, parmi toutes les lois d'attraction émanant d'un centre fixe, celles pour lesquelles la trajectoire d'un point libre sera toujours fermée. Je me propose d'étendre la même recherche au mouvement d'un point sur une surface de révolution, en admettant que le point est soumis à la seule action de forces émanant de différents points de l'axe ou bien de forces parallèles à l'axe et fonctions de la distance du point sur lequel elles agissent à un plan fixe parallèle à l'axe. Ces hypothèses se résument en une seule : il y a une fonction des forces qui conserve la même valeur en tous les points d'un parallèle de la surface.

Prenons pour l'axe des z l'axe de la surface. Désignons par r la distance d'un point quelconque à cet axe, et soit

$$z = \varphi(r)$$

l'équation de la surface. La fonction des forces sera, par hypothèse, une fonction de r , que je désignerai par

$$f(r).$$

En désignant par ω l'angle que fait le plan méridien contenant le mobile avec un méridien fixe, l'équation différentielle de la trajectoire sera, comme on sait,

$$(1) \quad \frac{(1 + \varphi'^2) dr^2}{r^4 d\omega^2} = C^2 f(r) + h - \frac{1}{r^2},$$

C^2 et h désignant deux constantes arbitraires.

Si la courbe est fermée, les valeurs de r seront comprises entre deux limites a , b , et la trajectoire sera comprise tout entière entre les deux parallèles de rayons a et b . Pour ces deux parallèles ex-

trêmes, $\frac{dr}{d\omega}$ doit s'annuler, r étant maximum ou minimum. On a donc

$$C^2 f(a) + h - \frac{1}{a^2} = 0,$$

$$C^2 f(b) + h - \frac{1}{b^2} = 0.$$

Ces équations nous permettent d'exprimer C^2 et h en fonction de a et de b . Si l'on pose

$$(2) \quad \Delta = \begin{vmatrix} f(r) & 1 & \frac{1}{r^2} \\ f(a) & 1 & \frac{1}{a^2} \\ f(b) & 1 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix},$$

l'équation de la trajectoire devient ainsi

$$(1 + \varphi'^2) \frac{dr^2}{r^4 d\omega^2} = \frac{\Delta}{f(b) - f(a)},$$

et l'on a par conséquent

$$\omega = \int \frac{dr \sqrt{1 + \varphi'^2} \sqrt{f(b) - f(a)}}{r^2 \sqrt{\Delta}}.$$

En employant le mode de raisonnement proposé par M. Bertrand, on reconnaît qu'il est nécessaire et suffisant, pour que la courbe soit fermée, que l'on ait

$$3) \quad \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2} \sqrt{f(b) - f(a)}}{r^2 \sqrt{\Delta}} dr = \mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant. Ainsi il y a à déterminer les deux fonctions arbitraires $f(r)$, $\varphi(r)$, de manière à satisfaire à l'égalité précédente. Dans le problème traité par M. Bertrand, il y avait, au contraire, une seule fonction inconnue.

Je commencerai par réserver le cas où l'on suppose la fonction $f(r)$ constante, ce qui revient à chercher les surfaces de révolution pour lesquelles les lignes géodésiques sont fermées. Alors on pourra effectuer le changement de notations suivant.

Posons

$$(4) \quad f(r) = x, \quad f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad \frac{1}{r^2} = \varpi(x), \quad \frac{1 + \varphi'^2}{r^4} = F(x).$$

L'équation (3) se transformera dans la suivante :

$$(5) \quad \Omega = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{F(x)} \sqrt{\beta - \alpha} dx}{\sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ \alpha & 1 & \varpi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varpi(\beta) \end{vmatrix}}} = \mu\pi.$$

Posons $\beta = \alpha + \varepsilon$, $x = \alpha + \varepsilon u$, et supposons ε suffisamment petit. Nous allons chercher les trois premiers termes du développement de l'intégrale précédente suivant les puissances de ε .

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ \alpha & 1 & \varpi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varpi(\beta) \end{vmatrix} = \frac{u(1-u)}{2} \varepsilon^3 \left[\varpi'' + \frac{\varpi'''}{3} (\varepsilon + \varepsilon u) + \frac{\varepsilon^2 \varpi^{(4)}}{12} (1 + u + u^2) + \dots \right],$$

ϖ'' , ϖ''' , $\varpi^{(4)}$ désignant les dérivées de ϖ pour $x = \alpha$. Par suite

$$(6) \quad \left\{ \Delta^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u(1-u)}{2} \varpi'' \varepsilon^3}} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\varpi'''}{\varpi''} \varepsilon (1+u) - \frac{\varpi^{(4)}}{24 \varpi''} \varepsilon^2 (1+u+u^2) + \frac{\varpi^{(5)}}{24 \varpi''^2} \varepsilon^3 (1+u)^2 + \dots \right] \right\}.$$

On a de même

$$(7) \quad \sqrt{F(x)} = \sqrt{F(\alpha)} \left(1 + \frac{F'}{2F} \varepsilon u + \frac{F''}{4F} \varepsilon^2 u^2 - \frac{1}{8} \frac{F'^2}{F^2} \varepsilon^2 u^2 + \dots \right).$$

On trouve ainsi sans peine d'abord le premier terme de Ω

$$\Omega = \sqrt{\frac{2F(\alpha)}{\varpi''(\alpha)}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} + \varepsilon(\dots) + \dots$$

Pour $\varepsilon = 0$, Ω se réduit à son premier terme. En effectuant l'intégrale qui y est indiquée, on obtiendra l'équation

$$\pi \sqrt{\frac{2F(\alpha)}{\varpi''(\alpha)}} = \mu\pi,$$

et par conséquent

$$(8) \quad F(x) = \frac{\mu^2}{2} \varpi''(x).$$

Ainsi tout se réduit à calculer la fonction $\varpi(x)$. Pour obtenir cette fonction, nous allons compléter le développement de Ω . En mettant à la place de $F(x)$ sa valeur dans la formule (7) et substituant les développements de $F(x)$ et $\Delta^{-\frac{1}{2}}$ dans l'expression de Ω , nous obtenons le résultat suivant :

$$\Omega = \mu \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \left[1 + \frac{\varpi'''}{6\varpi''} (2u-1)\varepsilon + \frac{\varpi^{iv}}{24\varpi''} (5u^2-u-1)\varepsilon^2 + \frac{\varpi'''}{24\varpi''} \varepsilon^2 (1-4u^2) + \dots \right].$$

Or on a

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi, \quad \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{3}{8}\pi.$$

Substituons ces valeurs dans Ω , et nous aurons

$$\Omega = \mu\pi + \pi\varepsilon^2 \left(\frac{\varpi^{iv}}{64\varpi''} - \frac{\varpi'''}{48\varpi''} \right) + \dots;$$

Ω devant être égal à $\mu\pi$, il faut que le coefficient de toutes les puissances de ε et, en particulier, celui de ε^2 , soient nuls, ce qui donne l'équation

$$(9) \quad 3\varpi''\varpi^{iv} - 4\varpi'''^2 = 0,$$

qui fera connaître ϖ .

Cette équation admet deux espèces de solutions. La première s'obtiendra en supposant $\varpi''(x)$ constant. On a ainsi

$$(10) \quad \varpi(x) = Cx^2 + Bx + A.$$

Toutes les autres seront comprises dans la formule

$$(11) \quad \varpi(x) = \frac{A}{x-\alpha} + Bx + C.$$

Il est aisé de voir d'ailleurs que ces deux formes sont acceptables

et donnent toutes les deux, jointes à l'équation

$$(12) \quad F(x) = \frac{\mu^2}{2} \varpi''(x),$$

des solutions du problème posé.

Il nous reste à les discuter et à reconnaître la nature des surfaces et des forces auxquelles elles correspondent. Rappelons d'abord les notations primitives.

Nous avons posé

$$(13) \quad f(r) = x;$$

x est donc la fonction des forces, et l'on pourra sans inconvénient lui ajouter ou lui retrancher une constante.

Nous avons d'ailleurs

$$(14) \quad \frac{1}{r^2} = \varpi(x),$$

et, en résolvant cette équation par rapport à x , nous aurons la fonction des forces exprimée en r . Enfin, d'après la définition de $F(x)$, nous pouvons écrire

$$(15) \quad \frac{1 + \varphi'^2}{f'^2(r)r^4} = F(x) = \frac{\mu^2}{2} \varpi''(x).$$

Les équations (13), (14), (15) nous feront connaître $f(r)$, $\varphi(r)$, et, par conséquent, à la fois la nature de la surface et celle des forces.

II.

Appliquons d'abord ces formules à la première hypothèse, celle pour laquelle on a

$$\varpi(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

En augmentant la fonction des forces x d'une constante arbitraire et remarquant que A ne peut être nulle [sans quoi $F(x)$ serait nulle], on peut écrire

$$\varpi(x) = \frac{1}{r^2} = \frac{x^2}{A} + \frac{C}{A},$$

ou

$$(16) \quad x^2 = \frac{A}{r^2} - C.$$

De l'équation (15) on tire

$$(17) \quad 1 + \varphi'^2 = \frac{A \mu^2 r^2}{A - C r^2}.$$

Commençons par supposer $\mu = 1$, nous aurons

$$\varphi' = \sqrt{\frac{C}{A - C r^2}} r$$

et, en intégrant,

$$\varphi^2 + r^2 = \frac{A}{C},$$

c'est-à-dire

$$z^2 + r^2 = \frac{A}{C}.$$

La surface est donc une sphère.

Quant à la force, on peut en donner différentes expressions. Voici la plus élégante. En vertu de l'équation de la surface, la fonction des forces x peut s'écrire

$$x = \sqrt{C} \frac{z}{r},$$

et, en différentiant cette expression, on obtiendra les deux composantes R , Z de la force, l'une perpendiculaire à l'axe des z , l'autre parallèle à cet axe. On trouve

$$R = -\sqrt{C} \frac{z}{r^2}, \quad Z = \frac{\sqrt{C}}{r}, \quad \sqrt{Z^2 + R^2} = \frac{\sqrt{C}}{r^2}.$$

Ces expressions nous montrent : 1° que la force est tangente au méridien; 2° qu'elle est en raison inverse du carré de r , c'est-à-dire du carré du sinus de l'arc de cercle θ compris entre le point attiré et le pôle.

On sait en effet qu'avec cette nature de forces la trajectoire sera une conique sphérique dont le pôle sera un des foyers.

Supposons maintenant que μ ne soit plus égal à l'unité; alors la formule (17) nous montre que, pour la surface de révolution cherchée, on aura

$$ds^2 = \frac{\mu^2 A r^2 dr^2}{A + C r^2} + r^2 d\omega^2.$$

Or, si l'on pose

$$\omega = \mu \omega',$$

on a

$$ds^2 = \mu^2 \left(\frac{A r^2 dr^2}{A + C r^2} + r^2 d\omega'^2 \right),$$

expression qui ne diffère de celle qui est relative au cas de $\mu = 1$ que par la présence d'un facteur constant μ . L'hypothèse actuelle conduit donc simplement à des surfaces de révolution applicables sur la sphère.

Ce résultat pouvait se prévoir *a priori*, car on sait que les équations du mouvement d'un point sur une surface demeurent les mêmes quand on déforme la surface en conservant à la fonction des forces la même expression en fonction des coordonnées curvilignes d'un point sur la surface.

Ainsi le cas où μ est quelconque ne donne rien d'essentiellement nouveau.

L'analyse précédente exclut le cas où $C = 0$. Examinons cette hypothèse.

On a alors

$$x = \frac{a}{r}, \quad 1 + \varphi'^2 = \mu^2.$$

Supposons d'abord $\mu = 1$, on a

$$\varphi' = 0, \quad z = \text{const.}$$

C'est le cas où le mouvement a lieu dans un plan et où la force est en raison inverse du carré de la distance à un point fixe et dirigée vers ce point.

Si μ est quelconque, on a

$$z = \sqrt{\mu^2 - 1} \, r,$$

équation qui convient à un cône de révolution, la force étant une attraction dirigée vers le sommet du cône et en raison inverse du carré de la distance.

III.

Examinons maintenant la seconde hypothèse, celle pour laquelle on a

$$\varpi(x) = \frac{A}{x - \alpha} + Bx + C,$$

expression qu'en changeant x en $x + \alpha$ on peut toujours ramener à la forme

$$\varpi(x) = \frac{A}{x} + Bx + C.$$

On aura ici

$$(18) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{A}{x} + Bx + C,$$

et, pour n'avoir pas à tirer x de cette équation, nous conserverons x comme variable indépendante. Nous trouverons ainsi

$$(19) \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{4\mu^2 A(A + Bx^2 + Cx) - (A - Bx^2)^2}{4x(A + Bx^2 + Cx)^2}.$$

Il faudra effectuer la quadrature qui donne z , puis éliminer x entre l'équation obtenue et l'équation (18). Pour avoir la fonction des forces, on exprimera x en fonction de r en résolvant l'équation (18). Les résultats sont, on le voit, assez compliqués.

Traisons d'abord le cas où $B = 0$, et prenons $2\mu = 1$. Nous savons que toute autre hypothèse sur μ nous conduirait à des surfaces applicables sur celle que nous allons trouver. Nous pouvons donc nous borner à considérer cette valeur particulière de μ .

On a alors

$$z = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C} \sqrt{A + Cx}}, \quad r^2 = \frac{x}{A + Cx},$$

et, par conséquent,

$$z^2 + r^2 = \frac{1}{C}.$$

Ainsi la surface correspondant à ce cas est encore une sphère. La fonction des forces x peut s'écrire

$$x = \frac{A}{C} \frac{r^2}{z^2}.$$

sous cette forme, elle donne naissance aux deux composantes

$$R = \frac{A}{C} \frac{2r}{z^2}, \quad Z = -\frac{A}{C} \frac{2r^2}{z^3}.$$

On voit que la force est encore dirigée suivant la tangente au méridien. Quant à sa grandeur, elle est

$$\sqrt{R^2 + Z^2} = \frac{2A}{C\sqrt{C}} \frac{r}{z^3} = \frac{2A}{C} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta},$$

θ désignant la distance au pôle, du point considéré.

On trouve, en effet, dans cette hypothèse, comme trajectoire, une conique sphérique ayant le pôle pour centre.

Si B et C sont nuls en même temps, on a

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{(4\mu^2 - 1)}{4Ax}$$

et, en prenant $2\mu = 1$,

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad z = \text{const.};$$

on obtient ainsi un plan. La fonction des forces est alors

$$x = Ar^2;$$

c'est le cas où il y a une attraction proportionnelle à la distance.

Si μ était quelconque, on obtiendrait un cône de révolution, et la force serait une attraction émanant du sommet et proportionnelle à la distance.

Les autres suppositions sur A, B, C conduisent à des résultats compliqués; je ne les examinerai pas.

IV.

Dans ce qui précède, nous avons pris d'abord le rayon r du parallèle comme une variable arbitraire. Mais il n'arrive pas toujours que, sur une surface de révolution, cette variable puisse prendre toutes les valeurs possibles. Par exemple, dans la sphère, le rayon du parallèle doit être inférieur à celui de la sphère; par conséquent, si la trajectoire du mobile est située dans les deux hémisphères,

r pourra croître d'une limite inférieure a à R , puis décroître de R à une autre limite. Or les intégrations que nous avons faites pour obtenir Ω supposent que r soit réellement in dépendante et ne s'appliquent pas à cette hypothèse. La méthode que nous avons suivie est donc sujette à une objection qu'il est d'ailleurs facile de lever.

En effet, si la courbe est fermée, comme nous le supposons, on pourra toujours déterminer les constantes C et h qui figurent dans l'équation (1), de telle manière que $\frac{dr}{d\omega}$ s'annule pour deux valeurs a et b aussi rapprochées qu'on le voudra et que *la courbe soit, par conséquent, comprise entre deux parallèles ne comprenant pas un équateur ou parallèle de rayon maximum*; alors notre méthode deviendra applicable et nous voyons qu'elle nous donne bien toutes les surfaces et toutes les lois de la force pour lesquelles la trajectoire sera toujours fermée. Mais nous allons voir que cet examen des parallèles de rayon maximum joue un rôle prépondérant dans la discussion de ce cas particulier de notre problème que nous avons réservé, celui où l'on cherche les surfaces de révolution dont toutes les lignes géodésiques sont fermées.

En effet, considérons une surface de révolution et une ligne géodésique quelconque tracée sur cette surface. Si i désigne l'angle que fait la ligne géodésique en un point quelconque avec le parallèle qui passe en ce point, l'équation différentielle de la ligne géodésique sera

$$r \cos i = a.$$

Partons du parallèle de rayon a . La ligne géodésique lui est tangente et elle se dirige du côté où le rayon du parallèle augmente. Si ce rayon croît toujours, la ligne géodésique s'éloignera indéfiniment en coupant les parallèles sous un angle qui s'approchera de plus en plus d'être droit. S'il n'y a pas de parallèle de rayon égal à a , on partira d'un parallèle quelconque et l'on obtiendra les mêmes conclusions.

Supposons, au contraire, qu'il y ait un parallèle de rayon maximum que j'appellerai *un équateur* de rayon R . Si je prends a un peu inférieur à R , il y aura deux parallèles de rayon a voisins l'un de l'autre, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'équateur, et une

ligne géodésique définie par l'équation

$$r \cos i = a,$$

comprise entre ces deux parallèles et tout entière à distance finie. Je vais chercher la condition pour qu'une telle ligne soit toujours fermée.

Reprenons l'équation différentielle (1) où nous supposons nulle la fonction des forces

$$(20) \quad \frac{(1 + \varphi'^2) dr^2}{r^4 d\omega^2} = h - \frac{1}{r^2},$$

et qui conviendra alors à une ligne géodésique; $\frac{dr}{d\omega}$ s'annulant pour $r = a$, on aura

$$h = \frac{1}{a^2},$$

et l'équation de la surface sera, nous l'avons vu,

$$(21) \quad z = \varphi(r).$$

On déduit de l'équation (20)

$$\omega = \int_a^r \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2} dr}{r^2 \sqrt{h - \frac{1}{r^2}}},$$

et si nous désignons par ω_1 l'angle dont le plan méridien passant par le point décrivant aura tourné quand on arrivera sur l'équateur, on aura

$$(22) \quad \omega_1 = \int_a^R \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2} dr}{r^2 \sqrt{h - \frac{1}{r^2}}}.$$

Le point, après avoir décrit cette portion de la ligne géodésique que nous supposons placée dans la région inférieure à l'équateur, passera dans la région opposée, et si

$$(23) \quad z = \psi(r)$$

est l'équation de cette nouvelle région de la surface, l'angle ω_2 dont

le plan méridien aura tourné quand le point décrivant arrivera au parallèle supérieur de rayon a sera donné par la formule

$$(24) \quad \omega_1 = \int_a^R \frac{\sqrt{1 + \psi'^2} dr}{r^2 \sqrt{h - \frac{1}{r^2}}}.$$

L'angle total dont le plan méridien aura tourné quand on passera du parallèle inférieur de rayon a au parallèle supérieur de même rayon sera donc

$$(25) \quad \Omega = \omega_1 + \omega_2 = \int_a^R \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2} + \sqrt{1 + \psi'^2}}{r \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}}} dr,$$

et, pour que la ligne géodésique soit fermée, il faudra que l'on ait

$$\Omega = 2\mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant. Ainsi l'intégrale Ω doit être constante.

Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître que cette intégrale est, aux notations près, celle qu'on rencontre dans la recherche des courbes tautochrones pour un point matériel pesant et l'on est ainsi conduit à la solution du problème donnée par la formule

$$(26) \quad \sqrt{1 + \varphi'^2} + \sqrt{1 + \psi'^2} = \frac{4\mu R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

On voit que l'on pourra choisir arbitrairement l'une des fonctions φ ou ψ ; l'autre sera déterminée par une quadrature.

Traisons le cas où la surface est symétrique par rapport à l'équateur. On aura alors

$$\varphi'^2 = \psi'^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(27) \quad \sqrt{1 + \varphi'^2} = \frac{2\mu R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Étudions d'abord le cas où l'on a

$$2\mu = 1,$$

on trouve alors

$$d\varphi = \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = dz$$

et, en intégrant,

$$z^2 + r^2 = R^2.$$

C'est l'équation de la sphère.

On peut rattacher à cette solution celles pour lesquelles μ est un nombre commensurable quelconque.

En effet, il résulte de la formule (26) que la distance de deux points infiniment voisins sur la surface est donnée par la formule

$$ds' = \frac{4\mu^2 R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\omega^2.$$

Si l'on remplace ω par $2\mu\omega'$, on a

$$ds^2 = 4\mu^2 \left(\frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\omega'^2 \right),$$

et l'on voit que la surface est applicable sur une sphère de rayon $2\mu R$.

On peut même donner les formules qui établissent la correspondance entre les points des deux surfaces. En posant

$$(28) \quad 2\mu r = r', \quad 2\mu R = R',$$

l'équation précédente devient

$$ds^2 = \frac{R'^2 dr'^2}{R'^2 - r'^2} + r'^2 d\omega'^2,$$

et elle convient à une sphère de rayon R' pour laquelle r', ω' seraient les coordonnées polaires d'un point quelconque.

On a, entre les coordonnées des points correspondants des deux surfaces, les relations

$$\begin{aligned} 2\mu r &= r', \\ \omega &= 2\mu\omega', \end{aligned}$$

μ étant commensurable; posons $2\mu = \frac{p}{q}$, on aura

$$q\omega = p\omega'.$$

On voit donc que, pour établir d'une manière complète la correspondance entre les deux surfaces, il faudra considérer la sphère comme composée de q feuillets superposés et la surface comme composée de même de p feuillets.

Nous avons donc le théorème suivant :

Les seules surfaces de révolution ayant leurs lignes géodésiques fermées et admettant un de leurs parallèles pour plan de symétrie sont la sphère et les surfaces applicables sur une sphère, de telle manière que le rapport de leur aire à celle de la sphère de même courbure soit un nombre commensurable.

On sait que, parmi les surfaces de révolution applicables sur la sphère, les unes ne rencontrent pas leur axe, les autres ont un point saillant sur cet axe. Pour les premières, il y aura des lignes géodésiques non fermées, toutes celles qui couperont sous un angle fini le parallèle minimum; pour les autres, toutes les lignes géodésiques seront fermées.

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires; par M. LINDEMANN.

(Séance du 7 février 1877.)

Les formules qui servent à la représentation typique des formes binaires d'ordre pair par trois covariants quadratiques sont susceptibles d'une interprétation géométrique, peut-être assez remarquable pour être expliquée en peu de mots.

Nous désignerons par ξ_1, ξ_2 des variables binaires, par x_1, x_2, x_3 des coordonnées ternaires ponctuelles. Alors les coordonnées des points d'une conique se représentent comme des fonctions rationnelles du paramètre $\xi_1 : \xi_2$ sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \zeta x_1 = \sum \sum h_{ik} \xi_i \xi_k = h_1^2 = h_1'^2 = \dots, \\ \zeta x_2 = \sum \sum l_{ik} \xi_i \xi_k = l_1^2 = l_1'^2 = \dots, \\ \zeta x_3 = \sum \sum m_{ik} \xi_i \xi_k = m_1^2 = m_1'^2 = \dots, \end{cases}$$

à moins que l'invariant simultané des trois formes quadratiques

$$D = - (kl)(lm)(mk) = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{22} \\ l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \end{vmatrix}$$

ne s'évanouisse. En éliminant les quantités ζ, ξ_1, ξ_2 des équations (1), on obtient l'équation de la conique (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{xx}x_1^2 + A_{\lambda\lambda}x_2^2 + A_{\mu\mu}x_3^2 + 2A_{\lambda\lambda}x_1x_2 + 2A_{\lambda\mu}x_1x_3 + A_{\mu\mu}x_2x_3 \\ \equiv F \equiv p_x^2 \equiv p_x'^2 \equiv p_x''^2 \equiv \dots = 0, \end{array} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} A_{xx} = (xx')^2, & A_{\lambda\lambda} = (\lambda\lambda')^2, & A_{\mu\mu} = (\mu\mu')^2, \\ A_{\lambda\mu} = (\lambda\mu)^2, & A_{\mu\lambda} = (\mu\lambda)^2, & A_{\lambda\lambda} = (\lambda\lambda)^2, \\ x_\xi^2 = (lm)l_\xi m_\xi, & \lambda_\xi^2 = (mk)m_\xi k_\xi, & \mu_\xi^2 = (kl)k_\xi l_\xi. \end{array}$$

Pour l'invariant simultané des formes $x_\xi^2, \lambda_\xi^2, \mu_\xi^2$, dont nous aurons besoin plus tard, on trouve la valeur [voir CLEBSCH, *loc. cit.*, formule (19), p. 207]

$$(3) \quad -(\lambda\lambda)(\lambda\mu)(\mu\lambda) = \frac{1}{2} D^2.$$

L'équation (2) s'écrit aussi sous la forme

$$(4) \quad \begin{vmatrix} A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & A_{\lambda\lambda} & x_1 \\ A_{\lambda\mu} & A_{\mu\mu} & A_{\mu\lambda} & x_2 \\ A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & A_{\mu\mu} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

car on a

$$(5) \quad A_{\mu\mu} = \frac{1}{2}(A_{\lambda\lambda}A_{\mu\mu} - A_{\lambda\mu}^2), \quad A_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(A_{\lambda\lambda}A_{\mu\mu} - A_{\lambda\mu}A_{\mu\lambda}), \quad \dots$$

Cela posé, la représentation d'une forme binaire quadratique a_ξ^2 est donnée par la formule

$$(6) \quad Da_\xi^2 = (ax)^2k_\xi^2 + (a\lambda)^2l_\xi^2 + (a\mu)^2m_\xi^2;$$

par conséquent, la représentation d'une forme d'ordre $2n$ est

(1) Voir CLEBSCH : *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 205 et 415.

donnée par

$$\begin{aligned} D^n a_{\xi}^{2n} = & [(a\kappa')^2 k_{\xi}'^2 + (a\lambda')^2 l_{\xi}'^2 + (a\mu')^2 m_{\xi}'^2] \\ & \times [(a\kappa'')^2 k_{\xi}''^2 + (a\lambda'')^2 l_{\xi}''^2 + (a\mu'')^2 m_{\xi}''^2] \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times \{[a\kappa^{(n)}]^2 k_{\xi}^{(n)2} + [a\lambda^{(n)}]^2 l_{\xi}^{(n)2} + [a\mu^{(n)}]^2 m_{\xi}^{(n)2}\}. \end{aligned}$$

Dans le second membre de cette égalité, nous effectuons la substitution (1). Égalé à zéro, ce membre nous donne alors l'équation d'une courbe de l'ordre n qui passe par les $2n$ points de la conique fondamentale $F = 0$, correspondant, en vertu des équations (1), aux $2n$ racines de l'équation $a_{\xi}^{2n} = 0$. Nous allons faire connaître les relations particulières par lesquelles cette courbe est attachée à ces $2n$ points et à la conique $F = 0$.

A cet effet, nous posons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n \equiv \beta_x^n \dots = & [(a\kappa')^2 x_1 + (a\lambda')^2 x_2 + (a\mu')^2 x_3] \\ & \times [(a\kappa'')^2 x_1 + (a\lambda'')^2 x_2 + (a\mu'')^2 x_3] \\ & \times \dots \dots \dots \\ & \times \{[a\kappa^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3\}, \end{aligned} \right.$$

de sorte que $\alpha_x^n = 0$ est l'équation de ladite courbe et que l'on a la formule symbolique

$$(8) \quad \alpha_x = (a\kappa)^2 x_1 + (a\lambda)^2 x_2 + (a\mu)^2 x_3.$$

Formons maintenant l'expression

$$(pp'\alpha)^2 \alpha_x^{n-2},$$

covariant simultané de la courbe $\alpha_x^n = 0$ et de la conique $F \equiv p_x^2 = 0$. Le contrevariant $(pp'u)^2$ de F est donné par l'expression

$$-\frac{1}{2} (pp'u)^2 = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{x\lambda} & A_{x\mu} & u_1 \\ A_{\lambda x} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & u_2 \\ A_{\mu x} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix};$$

on trouve donc le covariant dont il s'agit, en posant, dans la dernière colonne verticale de ce déterminant,

$$u_1 = \alpha_1 = (a\kappa')^2, \quad u_2 = \alpha_2 = (a\lambda')^2, \quad u_3 = \alpha_3 = (a\mu')^2,$$

et dans la dernière ligne horizontale,

$$u_1 = \alpha_1 = (ax'')^2, \quad u_2 = \alpha_2 = (a\lambda'')^2, \quad u_3 = \alpha_3 = (a\mu'')^2,$$

et en multipliant le déterminant ainsi transformé par

$$\begin{aligned} \alpha_x^{n-2} = & [(ax'')^2 x_1 + (a\lambda'')^2 x_2 + (a\mu'')^2 x_3] \\ & \times \dots \dots \dots \times \{ [ax^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3 \}. \end{aligned}$$

Alors on obtient une expression dont nous envisageons le facteur symbolique

$$\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{x\lambda} & A_{x\mu} & (ax')^2 \\ A_{\lambda x} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & (a\lambda')^2 \\ A_{\mu x} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & (a\mu')^2 \\ (ax'')^2 & (a\lambda'')^2 & (a\mu'')^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

De l'équation (6) découlent les formules suivantes :

$$\begin{aligned} D(ax)^2 &= A_{xx}(ak)^2 + A_{x\lambda}(al)^2 + A_{x\mu}(am)^2, \\ D(a\lambda)^2 &= A_{\lambda x}(ak)^2 + A_{\lambda\lambda}(al)^2 + A_{\lambda\mu}(am)^2, \\ D(a\mu)^2 &= A_{\mu x}(ak)^2 + A_{\mu\lambda}(al)^2 + A_{\mu\mu}(am)^2. \end{aligned}$$

On peut donc remplacer les termes $(ax')^2$, $(a\lambda')^2$, $(a\mu')^2$, 0, qui forment la dernière colonne du déterminant considéré, respectivement par

$$0, 0, 0, -[(ax'')^2(ak)^2 + (a\lambda'')^2(al)^2 + (a\mu'')^2(am)^2].$$

La dernière somme devient, au signe près, égale au second membre de l'équation (6) quand on y pose $\xi_1 = a_1$, $\xi_2 = -a_1$; elle est donc égale à $D(aa)^2$, et par conséquent identiquement nulle. Il en résulte que le déterminant envisagé s'évanouit aussi identiquement; par suite, le covariant cherché est nul pour tous les points x de la conique $F = 0$; et, puisqu'il ne contient pas le facteur F , il doit être nul pour tous les points du plan, de sorte que

$$(9) \quad (pp'\alpha)^2 \alpha_x^{n-2} \equiv 0.$$

Cette relation exprime que la conique $F = 0$ est harmoniquement inscrite à toutes les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de triangles conjugués par rap-

port à la conique $F = 0$, qui sont inscrits à la conique polaire du point x , relative à la courbe $\alpha_x^n = 0$. Par cette propriété de ses coniques polaires, la courbe $\alpha_x^n = 0$ est parfaitement fixée. En effet, l'équation (9) nous représente $\frac{1}{2}n(n-1)$ conditions différentes de la forme

$$(10) \quad (pp'\alpha)^2 \alpha_i^r \alpha_j^s \alpha_k^t = 0,$$

où

$$r + s + t = n - 2;$$

et, en y ajoutant les $2n$ conditions qui expriment que la courbe $\alpha_x^n = 0$ passe par les $2n$ points de la conique, représentés par l'équation $\alpha_i^n = 0$, on obtient justement $\frac{1}{2}n(n+3)$ conditions linéaires pour ladite courbe.

Entre chaque système de six des équations (10), on peut éliminer les six quantités $(pp')_i (pp')_k$, coefficients de l'équation tangentielle $(pp'u)^2 = 0$ de la conique $F = 0$. C'est ainsi que l'on trouve un grand nombre de relations invariantes auxquelles la courbe $\alpha_x^n = 0$ doit satisfaire. Pour les écrire sous une forme convenable, nous effectuons cette élimination d'abord pour le cas $n = 4$. Dans ce cas, on n'arrive qu'à une condition, à savoir

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1111} & \alpha_{1122} & \alpha_{1133} & \alpha_{1123} & \alpha_{1131} & \alpha_{1112} \\ \alpha_{2211} & \alpha_{2222} & \alpha_{2233} & \alpha_{2223} & \alpha_{2231} & \alpha_{2212} \\ \alpha_{3311} & \alpha_{3322} & \alpha_{3333} & \alpha_{3323} & \alpha_{3331} & \alpha_{3312} \\ \alpha_{2311} & \alpha_{2322} & \alpha_{2333} & \alpha_{2323} & \alpha_{2331} & \alpha_{2312} \\ \alpha_{3111} & \alpha_{3122} & \alpha_{3133} & \alpha_{3123} & \alpha_{3131} & \alpha_{3112} \\ \alpha_{1211} & \alpha_{1222} & \alpha_{1233} & \alpha_{1223} & \alpha_{1231} & \alpha_{1212} \end{vmatrix} = 0,$$

si

$$\alpha_x^4 = \sum \sum \sum \sum \alpha_{rstu} x_r x_s x_t x_u.$$

La courbe du quatrième ordre satisfaisant à la question est donc cette courbe particulière qui a été étudiée par MM. Clebsch et Lue-roth ⁽¹⁾.

(1) Voir le *Journal de Crelle*, t. 59, et *Mathematische Annalen*, t. I.

En appliquant la notation symbolique, on peut écrire la condition trouvée sous la forme ⁽¹⁾

$$(11) \quad [(\alpha\gamma\delta)(\alpha\epsilon\zeta)(\beta\gamma\epsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\epsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\epsilon\zeta)]^2 = 0,$$

si

$$\alpha_x^4 \equiv \beta_x^4 \equiv \gamma_x^4 \equiv \delta_x^4 \equiv \epsilon_x^4 \equiv \zeta_x^4.$$

Multiplions le premier membre par les facteurs symboliques

$$\alpha_x^{n-4} \beta_x^{n-4} \gamma_x^{n-4} \delta_x^{n-4} \epsilon_x^{n-4} \zeta_x^{n-4}.$$

Si nous supposons alors que l'équation (11) ait lieu, quel que soit le point x , elle exprime la condition pour que toutes les coniques polaires par rapport aux polaires du quatrième ordre de la courbe $\alpha_x^n = 0$, c'est-à-dire pour que toutes les coniques

$$(12) \quad \alpha_x^{n-4} \alpha_y^2 \alpha_z^2 = 0,$$

où z_i sont les variables ponctuelles, soient harmoniquement inscrites à la conique $F = 0$. Cela a donc lieu, en particulier, pour $x = y$, c'est-à-dire pour toutes les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$.

Réciproquement, si toutes les coniques $\alpha_x^{n-4} \alpha_z^2 = 0$ jouissent de cette propriété, il en est de même pour toutes les coniques représentées par l'équation (12). En effet, on a, d'après l'équation (8),

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x^{n-4} \alpha_z^2 = [(ax')^2 z_1 + (a\lambda')^2 z_2 + (a\mu')^2 z_3] \\ \quad \times [(ax'')^2 z_1 + (a\lambda'')^2 z_2 + (a\mu'')^2 z_3] \\ \quad \times [(ax''')^2 z_1 + (a\lambda''')^2 z_2 + (a\mu''')^2 z_3] \\ \quad \dots\dots\dots \\ \quad \times \{ [a\lambda^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3 \}. \end{array} \right.$$

La courbe d'ordre $n-2$ représentée par l'équation $\alpha_x^{n-4} \alpha_z^2 = 0$, deuxième polaire du point z par rapport à la courbe $\alpha_x^n = 0$, est donc évidemment attachée à la forme binaire $a\xi^{n-4} a_\xi^4$, de la même manière que la courbe $\alpha_x^n = 0$ à la forme $a\xi^n$; par suite, toutes les coniques polaires de cette courbe d'ordre $n-2$ jouissent des mêmes propriétés à l'égard de la conique $F = 0$ que les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$; ce qui était à démontrer.

(1) Voir CLEBSCH ; *Journal de Crelle*, t. 59.

Plus généralement, x et z étant des points de la conique fondamentale, on peut, en vertu de l'équation (8), exprimer chaque polaire $\alpha_x^{n-r} \alpha_z^r$ par une polaire binaire $a_i^{n-2r} a_j^r$ et aussi chaque polaire $\alpha_x^r \alpha_z^{n-r} \dots \alpha_z^n$ par $a_i^r a_j^{n-r} \dots a_j^n$. On a donc, en récapitulant ce qui précède, le théorème suivant :

Si l'on représente les zéros d'une forme binaire a_i^n d'ordre $2n$ par $2n$ points d'une conique $F = 0$, on peut mener par ces points une certaine courbe d'ordre n

$$\alpha_x^n \equiv \beta_x^n \equiv \gamma_x^n \equiv \delta_x^n \equiv \epsilon_x^n \equiv \zeta_x^n = 0,$$

dont toutes les coniques polaires sont harmoniquement inscrites à la conique $F = 0$. Elle jouit de cette propriété particulière que son covariant

$$[(\alpha\gamma\delta)(\alpha\epsilon\zeta)(\beta\gamma\epsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\epsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\epsilon\zeta)]^2 \\ \times \alpha_x^{n-1} \beta_x^{n-1} \gamma_x^{n-1} \delta_x^{n-1} \epsilon_x^{n-1} \zeta_x^{n-1}$$

s'évanouit identiquement, et elle est attachée à la forme binaire a_i^n par cette relation que la $(2\rho)^{i\text{ème}}$ polaire binaire d'un point de la conique $F = 0$ par rapport à la forme a_i^n se trouve déterminée par les intersections de cette conique avec la $\rho^{i\text{ème}}$ polaire du même point par rapport à la courbe $\alpha_x^n = 0$.

Évidemment, à chaque invariant ou covariant de la forme binaire a_i^n correspond, en vertu de ces relations, un invariant ou covariant simultané de la conique $F = 0$ et de la courbe $\alpha_x^n = 0$. Nous allons en donner quelques exemples, en développant les formules principales qui peuvent servir pour exprimer les facteurs symboliques de ces invariants et covariants binaires et ternaires, les uns par les autres.

En appliquant la formule (3), on trouve d'abord pour le facteur symbolique $(\alpha\beta\gamma)$ le résultat ⁽¹⁾

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (\alpha\beta\gamma) &= \begin{vmatrix} (a\kappa)^2 & (a\lambda)^2 & (a\mu)^2 \\ (b\kappa')^2 & (b\lambda')^2 & (b\mu')^2 \\ (c\kappa'')^2 & (c\lambda'')^2 & (c\mu'')^2 \end{vmatrix} \\ &= 2(\kappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\kappa)(ab)(bc)(ca) \\ &= -D^2(ab)(bc)(ca). \end{aligned} \right.$$

(1) Voir CLEBSCH, loc. cit., p. 204.

On en déduit que les zéros du covariant

$$(ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 a_i^{2n-4} b_i^{2n-4} c_i^{2n-4}$$

sont les points d'intersection de la conique $F = 0$ avec la courbe hessienne

$$(\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2} \gamma_x^{n-2} = 0$$

de la courbe $\alpha_x^n = 0$. Posons en particulier $n = 3$; alors on sait qu'il y a dans le faisceau de courbes du troisième ordre

$$xx_x^2 + \lambda (\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x = 0$$

quatre courbes qui se décomposent chacune en trois droites. Il y a donc dans le faisceau de formes binaires

$$kf + lj \equiv ka\xi + l(ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 a\xi b\xi c\xi$$

quatre formes dont les zéros se trouvent déterminés par une équation du troisième degré et par trois équations du second degré; et ces quatre formes sont données par les racines de cette même équation, dont dépend la détermination des points d'inflexion de la courbe $\alpha_x^3 = 0$. De même, on vérifie les énoncés suivants, qui ne reposent que sur la relation (14) et sur les résultats connus de la théorie des cubiques ternaires.

Pour chacune de ces quatre formes du faisceau, le covariant j est proportionnel à la forme fondamentale. Dans le faisceau il y a trois formes qui sont les formes fondamentales d'une forme quelconque du même faisceau, cette dernière considérée comme leur covariant j . Il y en a quatre dont les covariants j ont une réduite du troisième degré; elles satisfont à la condition

$$[(ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 (ad)^2 (bd)^2 (cd)^2]_{II} = 0,$$

correspondant à la condition ternaire $S_{\alpha\alpha} = 0$. Il y en a six pour lesquelles les covariants j de ses covariants j se confondent avec les formes fondamentales; elles sont données par l'équation

$$[(ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 (de)^2 (ef)^2 (fd)^2 (ad) (bd) (ae) (ce) (bf) (cf)]_{II} = 0,$$

correspondant à la condition ternaire $T_{\alpha\alpha} = 0$.

Pour $n = 2$ on obtient le résultat que la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée

à une forme biquadratique a_i^2 dont l'invariant

$$j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$$

s'évanouit, se décompose en deux droites; il en résulte que toutes les deuxièmes polaires de cette forme font partie de la même involution.

Quant aux facteurs symboliques

$$(\alpha\beta p) p_x = [(\alpha\beta)_1 p_1 + (\alpha\beta)_2 p_2 + (\alpha\beta)_3 p_3] p_x,$$

on a, en vertu de (1), (2) et (8),

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha\beta p) p_x = & [(a\lambda)^2 (b\mu)^2 - (a\mu)^2 (b\lambda)^2] [A_{xx} k_\xi^2 + A_{x\lambda} l_\xi^2 + A_{x\mu} m_\xi^2] \\ & + [(a\mu)^2 (b\kappa)^2 - (a\kappa)^2 (b\mu)^2] [A_{\lambda\kappa} k_\xi^2 + A_{\lambda\lambda} l_\xi^2 + A_{\lambda\mu} m_\xi^2] \\ & + [(a\kappa)^2 (b\lambda)^2 - (a\lambda)^2 (b\kappa)^2] [A_{\mu\kappa} k_\xi^2 + A_{\mu\lambda} l_\xi^2 + A_{\mu\mu} m_\xi^2]; \end{aligned}$$

et en appliquant les formules (12), p. 416 (où il faut poser $2A_m$ au lieu de B_m , etc.), et, en outre, la formule (4), p. 204 du livre de Clebsch, on trouve

$$(15) \quad \zeta(\alpha\beta p) p_x = D \begin{vmatrix} (a\kappa)^2 & (a\lambda)^2 & (a\mu)^2 \\ (b\kappa')^2 & (b\lambda')^2 & (b\mu')^2 \\ \kappa_\xi'^2 & \lambda_\xi'^2 & \mu_\xi'^2 \end{vmatrix} = 2D^2(ab)a_\xi b_\xi.$$

Il en résulte que le covariant simultané $(ab)a_\xi b_\xi$ des deux formes quadratiques a_ξ^2, b_ξ^2 est représenté par la polaire du point d'intersection des deux droites qui représentent les deux formes a_ξ^2, b_ξ^2 , par rapport à la conique $F=0$, ce qu'il est aisé de vérifier par un raisonnement géométrique. Plus généralement, on a ce résultat que le déterminant de deux formes binaires d'ordre pair est représenté par les intersections de la conique $F=0$ avec la courbe jacobienne de cette conique et des deux courbes qui sont attachées aux deux formes binaires proposées.

En prenant le carré des deux membres de l'équation (15), et en y ajoutant les facteurs symboliques $\alpha_x^{n-2}, \beta_x^{n-2}$, on obtient, pour la hessienne de la forme binaire a_ξ^{2n} , la relation

$$(16) \quad 4D^{2n+2}(ab)^2 a_\xi^{2n-2} b_\xi^{2n-2} = \zeta^{2n-2} (\alpha\beta p) (\alpha\beta p') p_x p'_x \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2}$$

Pour $n=2$, on a, en particulier, le résultat

$$4D^6(ab)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 = \zeta^2 (\alpha\beta p) (\alpha\beta p') p_x p'_x.$$

Sur la conique $F = 0$, les zéros de la forme hessienne d'une forme biquadratique a_i^2 sont donc déterminés par le lieu des points dont les polaires par rapport à $F = 0$ touchent la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée à la forme a_i^2 , c'est-à-dire *les zéros de la hessienne de la forme a_i^2 sont les points de contact des quatre tangentes communes aux coniques $F = 0$ et $\alpha_x^2 = 0$.*

D'un autre côté, des relations

$$\begin{aligned} D a_i^2 &= (a x)^2 k_i^2 + (a \lambda)^2 l_i^2 + (a \mu)^2 m_i^2, \\ D b_i^2 &= (b x')^2 k_i'^2 + (b \lambda')^2 l_i'^2 + (b \mu')^2 m_i'^2, \end{aligned}$$

découle la formule

$$\begin{aligned} D^2(ab)^2 &= (a x)^2 (b x')^2 A_{kk} + (a \lambda)^2 (b \lambda')^2 A_{ll} + (a \mu)^2 (b \mu')^2 A_{mm} \\ &\quad + 2(a x)^2 (b \lambda)^2 A_{kl} + 2(a \lambda)^2 (b \mu)^2 A_{lm} + 2(a \mu)^2 (b x)^2 A_{mk}. \end{aligned}$$

Or on a

$$D^2 A_{kk} = 2(A_{kk} A_{\mu\mu} - A_{k\mu}^2), \dots,$$

et par conséquent

$$(17) \quad D^2(ab)^2 = -2 \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{x\lambda} & A_{x\mu} & (a x)^2 \\ A_{\lambda x} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & (a \lambda)^2 \\ A_{\mu x} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & (a \mu)^2 \\ (b x')^2 & (b \lambda')^2 & (b \mu')^2 & 0 \end{vmatrix} = (pp'\alpha)(pp'\beta).$$

Si $n = 1$, on peut poser $\alpha_i = \beta_i$ dans le second membre, car alors les quantités α_i, β_i n'ont plus une signification symbolique; en effet, le discriminant $(ab)^2$ doit être nul quand la droite $\alpha_x = 0$, correspondant à la forme a_i^2 , touche la conique $p_x^2 = 0$, ce qui arrive si $(pp'\alpha)^2 = 0$.

En multipliant les deux membres par $\alpha_x^{n-1} \beta_x^{n-1}$, on obtient une nouvelle représentation de la forme hessienne, savoir :

$$(18) \quad D^{2n+2}(ab)^2 a_i^{2n-2} b_i^{2n-2} = \zeta^{2n-2} (pp'\alpha)(pp'\beta) \alpha_x^{n-1} \beta_x^{n-1}.$$

A l'aide de l'équation $p_x^2 = 0$, on peut déduire cette même formule de l'équation (16), car on a l'identité connue

$$(19) \quad \begin{cases} 2(\alpha\beta p)(\alpha\beta p') p_x p'_x = -(\alpha p p')^2 \beta_x^2 - (\beta p p')^2 \alpha_x^2 + (\alpha\beta p)^2 p_x'^2 \\ \quad + (\alpha\beta p')^2 p_x^2 + 2(\alpha p p')(\beta p p') \alpha_x \beta_x, \end{cases}$$

dans laquelle les deux premiers termes du second membre s'évalouissent identiquement suivant la relation (9). Les courbes, représentées par les seconds membres des équations (16) et (18), ont donc en effet les mêmes intersections avec la conique $F = 0$.

Le carré de l'équation (17) nous donne

$$D^2(ab)^4 = (pp'\alpha)(pp'\beta)(p''p''\alpha)(p''p''\beta).$$

Transformons le deuxième membre par l'identité (19); en y posant $x_i = (p''p'')_i$, nous obtenons

$$\begin{aligned} D^2(ab)^4 &= (\alpha\beta p)(\alpha\beta p')(pp''p'') - (\alpha\beta p)^2(p'p''p'')^2 \\ &= P - (\alpha\beta p)^2(p'p''p'')^2. \end{aligned}$$

En conséquence de la permutabilité des lettres p' , p'' , on peut remplacer le terme P du second membre par cette expression

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)(p'p''p'')[(\alpha\beta p')(pp''p'') - (\alpha\beta p'')(pp'p'')] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)^2(p'p''p'')^2 - \frac{1}{2}(\alpha\beta p)(\alpha\beta p')(pp''p'')(p'p''p'') \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)^2(p'p''p'')^2 - \frac{1}{2}P. \end{aligned}$$

Or on a, en vertu de la formule (5), p. 204 du livre de Clebsch,

$$\begin{aligned} (pp'p'')^2 &= 6 \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{x\lambda} & A_{x\mu} \\ A_{\lambda x} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} \\ A_{\mu x} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} \end{vmatrix} \\ &= 12(x\lambda)(\lambda\mu)(\mu x)(x'\lambda')(\lambda'\mu')(\mu'\lambda') = 3D^4, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(20) \quad D^4(ab)^4 = -2(\alpha\beta p)^2.$$

On en déduit, pour $n = 2$, le résultat connu, que le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de deux coniques est équi-anharmonique, quand les deux invariants simultanés des coniques s'annulent. En y ajoutant les facteurs symboliques α_x^{n-2} , β_x^{n-2} , on trouve généralement

$$D^n(ab)^4 a_x^{2n-2} b_x^{2n-2} = -2 \zeta^{2n-4} (\alpha\beta p)^2 \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2},$$

Envisageons en particulier le cas où $n = 3$. Nous venons de voir que la courbe du troisième ordre, attachée à la forme a_i^3 , se décompose en trois droites, si cette forme devient proportionnelle à son covariant j . Alors toutes les coniques polaires $\alpha_i^2 \alpha_x = 0$ passent par les sommets du triangle formé par les trois droites. Or, on sait que ce dernier est un triangle conjugué par rapport à chaque conique, à laquelle les coniques $\alpha_i^2 \alpha_x = 0$ sont harmoniquement inscrites; il l'est donc aussi pour la conique fondamentale $F = 0$. Par conséquent, on peut poser

$$p_x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \alpha_x^2 \alpha_x = z_1 x_2 x_3 + z_2 x_3 x_1 + z_3 x_1 x_2,$$

et alors on trouve

$$(\alpha\beta p)^2 \alpha_x \beta_x = C(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

C étant un facteur constant. Le covariant ternaire $(\alpha\beta p)^2 \alpha_x \beta_x$ devient donc proportionnel à p_x^2 , et, par suite, le covariant binaire

$$i = (ab)^4 a_i^2 b_i^2$$

s'évanouit identiquement. En effet, il est démontré par Clebsch que la forme a_i^2 (étant alors le covariant T d'une infinité de formes biquadratiques) se décompose à l'aide d'une équation du troisième degré en trois facteurs quadratiques pour le cas $i = 0$. M. Wedekind (1) a prouvé que le covariant

$$i = (ab)^4 a_i^{m-4} b_i^{m-4}$$

d'une forme a_i^m ne peut s'annuler identiquement sans que l'équation $a_i^m = 0$ ait une racine multiple d'ordre $m - 1$, excepté dans le cas où $m = 6$, mentionné tout à l'heure, et le cas où $m = 12$, étudié plus profondément par M. Klein (2). Donc le covariant

$$(\alpha\beta p)^2 \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2},$$

ne peut être proportionnel à p_x^2 que si $n = 3$ ou $n = 6$, pourvu que

(1) *Studien im binären Werthgebiet (Habilitationsschrift; Karlsruhe, 1876, p. 46).*

(2) *Ueber das Ikosaëder (Mathematische Annalen, Bd. 10).*

la courbe $\alpha_x^2 = 0$ n'ait pas avec la conique $F = 0$ un contact d'ordre $2n - 2$.

Nous nous bornons à indiquer ici que les mêmes raisonnements s'appliquent aussi à l'étude des formes binaires d'ordre impair, lorsqu'on considère le faisceau des premières polaires au lieu de la forme elle-même, ces polaires étant des formes d'ordre pair. De même on peut établir des méthodes pour construire les polaires d'ordre impair, quand on a trouvé les polaires d'ordre pair suivant les développements précédents. Nous allons en donner un exemple pour le cas $n = 2$. Nous connaissons la seconde polaire $a_i^2 a_j^2$ de η par rapport à a_i^2 ; elle est représentée par la polaire du point γ , correspondant au paramètre η , par rapport à la conique $\alpha_x^2 = 0$. Pour la forme hessienne de cette polaire

$$(21) \quad (ab)^2 a_i b_i a_j b_j,$$

nous avons, d'après l'équation (15),

$$4 D^2 (ab)^2 a_i b_i a_j b_j = \zeta^2 (\alpha\beta p) (\alpha\beta p') p_x p'_x;$$

elle est donc représentée par la polaire du point γ par rapport à la conique

$$(\alpha\beta p) (\alpha\beta p') p_x p'_x = 0,$$

lieu des points x dont les polaires par rapport à $F = 0$ touchent la conique $\alpha_x^2 = 0$. Les tangentes de $F = 0$ en les deux zéros, $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$, de la forme (21) et la droite qui représente la polaire $a_i^2 a_j^2$ passent par un même point, car les polaires quadratiques d'une cubique binaire forment une involution. Ces trois droites d'une part, et, d'autre part, la tangente de $F = 0$ en γ et les deux droites $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ qui joignent le point γ aux points $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ déterminent deux faisceaux de droites, projectifs l'un à l'autre, dans lesquels nous faisons correspondre la droite $u^{(2)}$ à la tangente de $\xi^{(1)}$, et la droite $u^{(1)}$ à la tangente de $\xi^{(2)}$. Alors la conique formée par les intersections des droites correspondantes de ces deux faisceaux passe par le point γ ; et ses trois autres intersections avec la conique $F = 0$ représentent la polaire $a_i^2 a_j^2$ qui était à chercher; ce qu'il est aisé de prouver.

Note sur la théorie des développoides;
par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

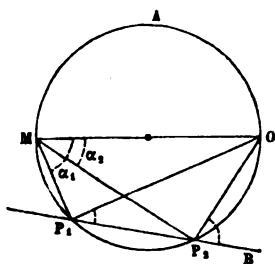
Séance du 10 janvier 1877.)

Je me propose d'appeler ici l'attention sur une propriété fort remarquable et déjà connue des développoides ⁽¹⁾, qui peut s'énoncer de la manière suivante : « Si l'on prend la développuide C_1 d'une courbe arbitraire C sous un angle α_1 , puis la développuide $C_{1,2}$ de celle-ci sous l'angle α_2 , ou si, au contraire, on construit d'abord la développuide C_2 de la proposée C pour l'angle α_2 , et ensuite la développuide $C_{2,1}$ de celle-ci sous l'angle α_1 , quelque différentes que soient entre elles les lignes intermédiaires C_1 et C_2 , les deux courbes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ ainsi obtenues finalement coïncident entre elles. »

Ce théorème n'a été établi jusqu'ici que par l'emploi des coordonnées *naturelles*, c'est-à-dire en représentant les courbes par une équation entre leur rayon de courbure et leur angle de contingence. D'une part ces considérations se rattachent à une partie des Mathématiques plus élevée que la Géométrie élémentaire sur laquelle est uniquement fondée la démonstration que je propose plus loin. Celle-ci aura donc l'avantage de faire pénétrer plus facilement dans l'enseignement ordinaire cette intéressante proposition. Mais de plus on doit, je pense, considérer la démonstration ordinaire comme tout à fait insuffisante, ou du moins comme n'établissant qu'une partie seulement de l'énoncé, tel que je l'ai formulé. En effet, en obtenant pour les deux courbes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$ la même équation entre le rayon de courbure et l'angle de contingence, on prouve seulement qu'elles sont *superposables* et non qu'elles sont *superposées*, ou ne forment qu'une seule et même ligne. C'est à la fois un avantage des coordonnées naturelles dans certaines questions et un défaut dans d'autres occasions telles que celle-ci de fournir la *forme* sans avoir égard à la *situation* des lieux géométriques. Et lors

(¹) On appelle ainsi l'enveloppe des droites qui font un angle constant avec une courbe quelconque en chacun de ses points.

même que dans un problème les diverses équations obtenues seraient par la nature des choses rattachées à un même axe de comparaison, il resterait encore une incertitude complète sur la situation, car une translation arbitraire des diverses courbes de la question parallèlement à elles-mêmes et indépendamment les unes des autres ne modifierait en rien les angles qui servent à caractériser leurs divers points, pour en déduire par leurs équations respectives leur courbure en ces points. Il ne me serait pas difficile de produire des exemples de recherches dans lesquelles on obtient la même équation pour représenter dans une même question des courbes parfaitement distinctes. Je pense donc que sous ce rapport l'ancienne démonstration doit être considérée comme insuffisante, et



qu'un procédé géométrique direct, outre l'avantage de la simplicité, ajoutera à la portée de l'ancien théorème.

Supposons que M désigne le point décrivant de la courbe C qu'il est inutile de tracer, et MO son rayon de courbure (*voir la fig.*), par suite O le centre du cercle osculateur. On sait, d'après le théorème de Réaumur, que le point où l'oblique mobile touche sa développée s'obtient en y projetant orthogonalement le centre de courbure ⁽¹⁾. Si donc nous menons les deux obliques MP₁ et MP₂ faisant respectivement avec la normale MO les angles α_1 et α_2 , les points P₁ et P₂

(¹) Réaumur a établi cette propriété dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1709. M. Habich en a donné depuis une démonstration immédiate en remarquant que le mode de description de la courbe C revient au roulement sur la développée de la normale qui fait l'angle invariable α avec l'oblique qui enveloppe la développée. Le centre instantané de ce mouvement se trouve donc au centre de courbure, et sa projection sur la droite mobile fournit le point où elle touche son enveloppe.

des développoides C_1 et C_2 seront fournis par l'intersection de ces droites avec le cercle décrit sur MO comme diamètre. Or je dis que, si l'on joint P_1P_2 , cette ligne sera à la fois tangente aux deux développoides du second ordre $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$. En effet, d'une part, elle passe par les points décrivant des premières développoides, à savoir P_1 de C_1 et P_2 de C_2 . Il suffit donc de prouver qu'elle fait en P_1 l'angle α_2 avec la normale de C_1 et en P_2 l'angle α_1 avec la normale de C_2 . Ces normales sont d'ailleurs P_1O et P_2O , puisque les tangentes des mêmes courbes sont P_1M et P_2M . Or on voit en premier lieu que l'angle P_2P_1O est inscrit sur le même arc OP_2 que P_2MO ou α_2 . En second lieu on a pour l'angle BP_2O

$$BP_2O = 180^\circ - P_1P_2O = \frac{360^\circ - \text{arc } P_1AO}{2} = \frac{\text{arc } P_1P_2O}{2} = P_1MO = \alpha_1.$$

Il est donc établi que P_1P_2 touche à la fois les deux lignes $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$. Mais la série de ces droites P_1P_2 , dont chacune correspond à un point M de la proposée C , ne peut avoir qu'une seule enveloppe, et, par conséquent, cette enveloppe fournit à la fois les deux développoides du second ordre $C_{1,2}$ et $C_{2,1}$, ainsi qu'il fallait le démontrer.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 18 AVRIL 1877.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

MM. *Lindemann* et *Pousset*, présentés dans la séance précédente, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Halphen, *Sur les invariants différentiels*.

M. Flye-Sainte-Marie, *Sur le problème du cavalier au jeu des échecs*. M. de Polignac présente, sur ce dernier sujet, quelques observations.

SÉANCE DU 2 MAI 1877.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

M. le comte Hugo adresse une Note *Sur les points d'arrêt dans la mécanique des systèmes naturels.*

Communications :

M. Perrin, *Sur une relation qui a lieu entre les singularités réelles d'une courbe algébrique quelconque.* M. Halphen ajoute quelques remarques à ce sujet.

M. Édouard Lucas, *Sur deux formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique.*

SÉANCE DU 16 MAI 1877,

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Perrin, *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Halphen, *Sur une formule d'Arithmétique.*

M. Édouard Lucas, *Sur la loi de réciprocité des nombres premiers.*

SÉANCE DU 30 MAI 1877,

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

M. Cremona est présenté par MM. Haton de la Goupillière et Halphen.

Communications :

M. le comte Hugo, *Sur les Mathématiques comme théorie de la nature et sur la philosophie de la règle des signes.*

M. Désiré André, *Sur un problème d'analyse combinatoire.*

M. Jordan, *Sur une méthode de M. Zolotareff pour démontrer que les formes quadratiques positives, d'un déterminant donné, forment un nombre limité de classes.*

M. de Comberousse, *Sur l'histoire des Mathématiques.*

M. Halphen, *Sur un théorème d'Euler, relatif aux sommes des diviseurs des nombres.*

Determination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés ; par M. G. Fouret.

(Séance du 21 février 1877.)

1. Étant donnés sur un plan trois systèmes de courbes, définis chacun par une équation différentielle du premier ordre algébrique, il existe un nombre limité de points en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à ces trois systèmes. Ce nombre de points est le nombre des solutions en $x, y, \frac{dy}{dx}$ qui vérifient simultanément les trois équations : il s'exprime assez simplement, comme on va le voir, en fonction des caractéristiques des trois systèmes. Pour y parvenir, je m'appuierai sur quelques résultats déjà connus que je vais rappeler brièvement.

2. Considérons un premier système défini par ses deux caractéristiques, à savoir le nombre μ des courbes de ce système qui passent par un point quelconque, et le nombre ν des mêmes courbes qui touchent une droite quelconque.

1° *Le lieu des points de contact des tangentes à ces courbes issues d'un point O quelconque est une courbe de degré $\mu + \nu$, ayant un point multiple d'ordre μ en O.*

2° *L'enveloppe des tangentes à ces mêmes courbes, en leurs points de rencontre avec une droite D quelconque, est une courbe de la classe $\mu + \nu$, admettant D comme tangente multiple d'ordre ν .*

Ces deux courbes, si intimement liées aux deux caractéristiques du système, sont d'un usage très-fréquent : pour cette raison, il serait commode de leur donner un nom ; j'appellerai, dans la suite, la première *indicatrice point* du système, la seconde *indicatrice droite*, en mentionnant, quand il y aura lieu, le point ou la droite dont dépendra l'indicatrice considérée.

3. Imaginons un deuxième système (μ', ν') dans le même plan que le premier. *Le lieu des points de contact de deux courbes*

appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν) , (μ', ν') , est une courbe de degré $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ ⁽¹⁾.

Cherchons en effet le nombre des points d'intersection de ce lieu avec une droite D quelconque. Les *indicatrices droites* des deux systèmes par rapport à D sont respectivement de classe $\mu + \nu$ et $\mu' + \nu'$, et admettent respectivement D pour tangente multiple d'ordre ν et ν' . Par suite, ces deux courbes ont $(\mu + \nu)(\mu' + \nu')$ tangentes communes dont $\nu\nu'$ confondues avec D, soit, abstraction faite des dernières, $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ tangentes communes dont les points de rencontre avec D sont les points du lieu cherché.

On démontre de la même manière la propriété corrélatrice consistant en ce que *l'enveloppe des droites touchées en un de leurs points par deux courbes appartenant respectivement à deux systèmes (μ, ν) , (μ', ν') est une courbe de classe $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$.*

4. Les résultats que je viens de rappeler suffisent, avec l'aide du principe de correspondance, pour résoudre la question qui fait l'objet de cette Note.

Considérons à cet effet trois systèmes de courbes (μ, ν) , (μ', ν') , (μ'', ν'') , situés dans un même plan, et un point O dans ce plan. Traçons une droite Ox quelconque : elle va couper en $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ points la courbe (A) lieu des points en chacun desquels se touchent deux courbes appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν) , (μ', ν') . Soit *a* l'un de ces points, et *at* la tangente commune aux deux courbes. Il existe ν'' courbes du système (μ'', ν'') tangentes à chacune des droites *at*. Les points de contact *b* joints à O donnent en tout $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Oy ; donc à une droite Ox correspondent $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Oy.

Réciproquement, traçons une droite Oy quelconque, et considérons d'une part l'*indicatrice droite* du système (μ'', ν'') relative à Oy, qui est de classe $\mu'' + \nu''$, et la courbe (B) enveloppe des droites touchées en un de leurs points par deux courbes appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν) , (μ', ν') , qui est de classe $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$. Ces deux courbes ont $(\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$

(¹) J'ai énoncé et démontré d'une autre manière ce théorème en 1874 dans mon *Mémoire sur les systèmes généraux*, etc. (*Ibid.*, t. II, p. 72.) — M. Schubert en a donné dernièrement une autre démonstration. (*Math. Ann.*, t. X, p. 106; 1876.)

tangentes communes. Les $(\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ points de contact a obtenus étant joints à O donnent autant de droites Ox . Donc à une droite Oy correspondent $(\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Ox . Par suite, en vertu du principe de correspondance, il existe $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu) + (\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ coïncidences d'une droite Ox avec une des droites correspondantes Oy . Chacune de ces coïncidences donne évidemment lieu à un contact de trois courbes appartenant respectivement aux trois systèmes, sauf le cas où la droite ax passe par le point O . Or du point O on peut mener à la courbe (B) $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ tangentes, dont chacune compte ν'' fois dans le nombre total des coïncidences. En déduisant de ce dernier nombre $\nu''(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$, il reste

$$\mu\nu'\nu'' + \mu'\nu''\nu + \mu''\nu\nu' + \nu\mu'\mu'' + \nu'\mu''\mu + \nu''\mu\mu'$$

pour le nombre des points de contact cherché. On peut donc énoncer le théorème suivant, dont il est inutile de faire ressortir toute la généralité :

THÉORÈME. — *Le nombre des points d'un plan en chacun desquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes (μ, ν) , (μ', ν') , (μ'', ν'') est égal à*

$$\mu\nu'\nu'' + \mu'\nu''\nu + \mu''\nu\nu' + \nu\mu'\mu'' + \nu'\mu''\mu + \nu''\mu\mu'.$$

5. Ce théorème fournit presque immédiatement de nombreux corollaires. On en déduit notamment un théorème connu sur les faisceaux de courbes algébriques. Supposons que les trois systèmes soient trois faisceaux de courbes algébriques d'ordre respectivement égal à m, m', m'' . On a alors

$$\mu = \mu' = \mu'' = 1, \quad \nu = 2(m - 1), \quad \nu' = 2(m' - 1), \quad \nu'' = 2(m'' - 1),$$

et, en substituant dans l'expression écrite plus haut, on obtient, toutes réductions faites, le résultat suivant :

Le nombre des points d'un plan en chacun desquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois faisceaux de courbes d'ordre m, m', m'' est

$$4(m'm'' + m''m + mm') - 6(m + m' + m'') + 6(1).$$

(1) SALMON, *Treatise on the higher plane curves*, p. 348.

6. Etant données sur un même plan trois courbes algébriques dont les degrés soient respectivement m, m', m'' , et les classes n, n', n'' , cherchons de combien de manières différentes on peut les amener à se toucher en un même point, en les déplaçant dans leur plan commun d'un mouvement de translation rectiligne variable en direction de l'une à l'autre.

La courbe (m, n) dans ses positions successives forme un système dont les caractéristiques s'aperçoivent immédiatement. On a en effet $\mu = m, \nu = n$ ⁽¹⁾. Les deux autres courbes donnent lieu à deux autres systèmes dont les caractéristiques sont respectivement $\mu' = m', \nu' = n'$, et $\mu'' = m'', \nu'' = n''$. Par suite, en vertu du théorème démontré plus haut, le nombre des solutions est

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn' + nm'm'' + n'm''m + n''mm'.$$

En particulier, dans le cas de trois coniques quelconques, ce nombre est égal à 48. Il se réduit à 18 dans le cas de trois paraboles ⁽²⁾.

Cherchons de combien de manières on peut amener les trois courbes en contact, en les faisant tourner chacune autour d'un point fixe du plan. Les trois courbes, en se déplaçant, forment alors trois systèmes : les caractéristiques sont $\mu = 2m, \mu' = 2m', \mu'' = 2m'', \nu = 2n, \nu' = 2n', \nu'' = 2n''$, et, en appliquant le théorème général, on obtient pour le nombre des solutions cherchées

$$8\{mn'n'' + m'n''n + m''nn' + nm'm'' + n'm''m + n''mm'\};$$

dans le cas de trois coniques quelconques, ce nombre est égal à 384.

Remarque. — Le théorème que nous avons démontré dans cette Note peut se conclure d'un théorème sur les *connexes* auquel M. Lindemann est parvenu en suivant une voie différente ⁽³⁾. Ce dernier théorème consiste en ce que : *le nombre des éléments com-*

⁽¹⁾ La caractéristique ν serait cependant inférieure à n , si la courbe était tangente à la droite de l'infini.

⁽²⁾ Il est évidemment nul dans le cas de trois cercles.

⁽³⁾ *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, bearbeitet und herausgegeben von Dr F. LINDEMANN. -- Ersten Bandes, zweiter Theil, p. 910.

muns à quatre connexes $(m, n), (m', n'), (m'', n''), (m''', n''')$ est égal à

$$mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' + mm''n'n''' + m'm'''n''n + mm'''n''n'.$$

En supposant que l'un des connexes (m''', n''') soit le *connexe identique*, la formule précédente donne le nombre des éléments communs à trois *coïncidences principales* $(m, n), (m', n'), (m'', n'')$, ou, ce qui revient au même, à un point de vue un peu différent, le nombre des points en lesquels se touchent les courbes de trois systèmes. On retombe en effet sur la formule que nous avons démontrée, en introduisant dans celle de M. Lindemann l'hypothèse

$$m''' = n''' = 1.$$

Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes ; par M. HALPHEN.

(Séance du 21 février 1877.)

Une remarque aussi simple qu'ingénieuse, due à M. Picard ⁽¹⁾, fournit un moyen de trouver les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes, et fait voir que, si la surface est algébrique, il en est de même de ses lignes asymptotiques. Je me propose d'établir ici le même résultat d'une autre manière.

Soit choisi un tétraèdre de référence dont deux arêtes opposées soient directrices de la surface : ce seront, par exemple, les arêtes $X_2 = 0, X_3 = 0$ d'une part, et $X_1 = 0, X_2 = 0$ de l'autre. Soient x, y les points où ces deux directrices sont respectivement rencontrées par une même génératrice de la surface, z un point quelconque de cette génératrice. On a

$$z_1 = \lambda x_1, \quad z_2 = \lambda x_2, \quad z_3 = (1 - \lambda)y_3, \quad z_4 = (1 - \lambda)y_4.$$

La surface est définie par une relation entre $x_1 : x_2$ et $y_3 : y_4$. Une courbe tracée sur la surface est définie par une nouvelle relation

⁽¹⁾ Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXIV. p. 229.

entre ces quantités et λ . On exprimera que cette courbe est une asymptotique en écrivant que son plan osculateur passe constamment par la génératrice rectiligne. Il suffira d'écrire cette relation pour voir qu'elle se réduit à la suivante. Posant

$$\begin{aligned}\lambda x_2 d(\lambda x_1) - \lambda x_1 d(\lambda x_2) &= u, \\ (1 - \lambda) y_1 d[(1 - \lambda) y_2] - (1 - \lambda) y_2 d[(1 - \lambda) y_1] &= v,\end{aligned}$$

on trouve

$$u dv - v du = 0,$$

d'où l'on conclut que u et v sont dans un rapport constant. Ces quantités ne contiennent qu'en apparence la différentielle de λ : en les transformant, on est ainsi conduit à la relation

$$\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 = C \left(\frac{x_2}{y_1}\right)^2 \frac{d\frac{x_1}{x_2}}{d\frac{y_2}{y_1}}.$$

Si l'on y fait $y_1 = x_2 = 1$, on obtient cet énoncé :

Soient A, B deux directrices rectilignes d'une surface gauche, x et y les distances de deux origines fixes prises sur ces droites aux points a, b où ces droites sont rencontrées par une même génératrice rectiligne. Soit enfin C une constante arbitraire. On prend sur ab le point m , tel que l'on ait

$$(1) \quad \left(\frac{ma}{mb}\right)^2 = C \frac{dx}{dy};$$

le point m décrit une ligne asymptotique de la surface.

A chaque valeur de C correspond une asymptotique qui rencontre chaque génératrice en deux points m, m' , déterminés par l'équation (1). Ces deux points forment avec a, b une division harmonique.

Si la relation qui lie x, y est algébrique, les lignes asymptotiques sont également algébriques. Il est aisé de déterminer leur degré et leur classe. Soient p, q les degrés respectifs de x, y dans la relation qui lie ces variables, cas dans lequel la surface est du degré $p + q$. Il y a $2(q - 1)p$ génératrices singulières le long de chacune desquelles le plan tangent est constant et passe par B.

D'après l'équation (1), chaque asymptotique rencontre une telle génératrice tangentiellement sur A. Par suite, chaque plan mené par A rencontre une asymptotique en $2p + 2(q-1)p$ points. Donc le degré des asymptotiques est égal au double du produit des ordres de multiplicité des directrices rectilignes, soit $2pq$, ou encore à la classe des sections planes de la surface.

Pour trouver la classe, j'applique un théorème de M. Zeuthen, en considérant la correspondance qui existe entre les points des lignes asymptotiques et ceux d'une des directrices. Je trouve ainsi que la classe des asymptotiques est égale à $6(2pq - p - q)$, c'est-à-dire égale à six fois l'excès de leur degré sur celui de la surface. Pour la surface gauche du troisième degré, on trouve ainsi que les asymptotiques sont des courbes unicursales du quatrième degré, comme on le savait d'autre part.

*Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire
et tétrasphérique; par M. Éd. LUCAS.*

(Séance du 2 mai 1877.)

1. NOTATIONS. — Nous désignerons par :

- r_i le rayon d'un cercle ou d'une sphère de centre O_i ;
- d_{ij} la distance des centres O_i et O_j de deux cercles, ou de deux sphères;
- a_{ij} le cosinus de l'angle des deux cercles ou des deux sphères O_i et O_j ;
- r_{ij} le rayon du cercle ou de la sphère qui coupe orthogonalement les deux cercles ou les deux sphères O_i et O_j et la ligne de leurs centres;
- s_{ijk} l'aire du triangle des centres O_i , O_j et O_k de trois cercles d'un plan ou de trois sphères;
- r_{ijk} le rayon du cercle orthogonal aux trois cercles d'un plan ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres;
- v_{ijkl} le volume du tétraèdre formé par les centres de quatre sphères;
- r_{ijkl} le rayon de la sphère orthogonale à quatre sphères;

x , avec l'indice correspondant, la puissance par rapport au cercle d'un point de son plan, ou la puissance par rapport à la sphère d'un point de l'espace.

De plus, nous supposons

$$\begin{aligned}\sin^2 A_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \\ \sin^2 A_{ijk} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \\ \sin^2 A_{ijkl} &= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

2. Cela posé, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}(1) \quad & 2 r_i r_j a_{ij} = r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2, \\ (2) \quad & (r_{ij} d_{ij})^2 + (r_i r_j \sin A_{ij})^2 = 0, \\ (3) \quad & (1.2 r_{ijk} s_{ijk})^2 + (r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 = 0, \\ (4) \quad & (1.2.3 r_{ijkl} v_{ijkl})^2 + (r_i r_j r_k r_l \sin A_{ijkl})^2 = 0.\end{aligned}$$

3. On a encore

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_{ij}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{1}{r_k} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_{ijk}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$7) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{1}{r_l} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & \frac{1}{r_{ijkl}} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces formules permettent de *déterminer* par comparaison, avec les précédentes (2), (3) et (4), *la longueur de la distance, l'aire du triangle ou le volume du tétraèdre formé par les centres de deux, trois ou quatre sphères dont on donne les rayons et les angles.*

On a ainsi

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{d_{ij}}{r_i r_j} \right)^2,$$

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{1}{r_k} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} \right)^2,$$

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{1}{r_l} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot v_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} \right)^2.$$

4. On a, entre les cosinus des angles de cinq sphères quelconques de l'espace, la relation

$$(11) \quad \sin' A_{ijklm} = 0;$$

on a d'ailleurs une formule analogue pour les cercles d'un plan.

Les puissances d'un point par rapport à quatre cercles O_1, O_2, O_3 et O_4 sont liées par la formule

$$(12) \quad x_i s_{jkl} - x_j s_{kli} + x_k s_{lij} - x_l s_{ijk} = K,$$

dans laquelle le second membre est constant; on a, de même, pour les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques,

$$(13) \quad x_i v_{jklm} - x_j v_{klmi} + x_k v_{lmij} - x_l v_{mijk} + x_m v_{ijkl} = K.$$

Lorsque les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, ou lorsque les cinq sphères sont orthogonales à une même sphère, le second membre des équations précédentes est nul.

5. Désignons par ξ_{ij} la distance du centre radical de trois cercles O_i, O_j et O_k à la droite des centres O_i et O_j , et par ξ_{ijk} la distance du centre radical de quatre sphères O_i, O_j, O_k et O_l au plan des trois centres O_i, O_j et O_k ; on a, pour le calcul de ces distances, les formules

$$(14) \quad (d_{ij} \xi_{ij})^2 = (r_i r_j \sin A_{ij})^2 + (d_{ij} r_{ijk})^2,$$

ou encore

$$(15) \quad \xi_{ij}^2 = r_{ijk}^2 - r_{ij}^2;$$

et, dans l'espace,

$$(16) \quad (s_{ijk} \xi_{ijk})^2 = (2 r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 + (d_{ijk} r_{ijkl})^2,$$

ou encore

$$(17) \quad \xi_{ijk}^2 = r_{ijkl}^2 - r_{ijk}^2.$$

6. On a pour l'équation linéaire du cercle orthogonal à trois cercles O_i, O_j, O_k , ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres

$$(18) \quad x_{ijk} = \frac{1}{2 s_{ijk}} (x_i d_{jk} \xi_{jk} + x_j d_{ki} \xi_{ki} + x_k d_{ij} \xi_{ij}) + 2 r_{ijk}^2;$$

de même, pour l'équation de la sphère orthogonale à quatre sphères

$$(19) \quad x_{ijkl} = \frac{1}{3v_{ijkl}} (x_i d_{jkl} \xi_{jkl} + x_j d_{kli} \xi_{kli} + x_k d_{lij} \xi_{lij} + x_l d_{ikl} \xi_{ikl}) + 2 r_{ijkl}^2.$$

On obtient encore les équations homogènes et quadratiques du cercle orthogonal à trois cercles, ou de la sphère orthogonale à quatre sphères, par les formules suivantes :

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{x_k}{r_k} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \left(\frac{x_{ijk}}{r_{ijk}} \right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{x_k}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \frac{x_l}{r_l} & \left(\frac{x_{ijkl}}{r_{ijkl}} \right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait de même l'équation linéaire et l'équation quadratique homogène du cercle ou de la sphère orthogonale à deux cercles ou à deux sphères et à la ligne de leurs centres.

Il existe entre les puissances d'un point par rapport à trois cercles quelconques la relation fondamentale

$$(22) \quad \begin{vmatrix} x_i + x_l + 2a_{il}r_i r_l & x_i + x_j + 2a_{ij}r_i r_j & x_i + x_k + 2a_{ik}r_i r_k \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_j r_i & x_j + x_l + 2a_{jl}r_j r_l & x_j + x_k + 2a_{jk}r_j r_k \\ x_k + x_i + 2a_{ki}r_k r_i & x_k + x_j + 2a_{kj}r_k r_j & x_k + x_l + 2a_{kl}r_k r_l \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est du second degré; il en existe une analogue

pour les puissances d'un point par rapport à quatre sphères; on a plus simplement pour les puissances par rapport à deux cercles, d'un point de la ligne des centres,

$$(12) \quad \begin{vmatrix} x_i + x_i + 2a_{ii}r_i r_i & x_i + x_j + 2a_{ij}r_i r_j \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_j r_j & x_i + x_j + 2a_{jj}r_j r_j \end{vmatrix} = 0.$$

7. L'ensemble de deux cercles ou de deux sphères réciproques par rapport au cercle ou à la sphère O_{ijk} a pour équation

$$(24) \quad \frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} x_{ijk} \pm \left(\frac{p_i x_i}{r_i} + \frac{p_j x_j}{r_j} + \frac{p_k x_k}{r_k} \right) = 0,$$

ou, en tirant x_{ijk} de la formule (20),

$$(25) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{x_k}{r_k} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{p_i x_i}{r_i} + \frac{p_j x_j}{r_j} + \frac{p_k x_k}{r_k} \right)^2.$$

On obtient, pour déterminer les rayons ρ de ces deux cercles, la formule

$$(26) \quad \rho \left(\frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} + \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} + \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2s_{ijk}}{r_i r_j r_k} \right) = \sqrt{\Delta},$$

en supposant

$$(27) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} \\ \frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} & \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} & \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} & -1 \end{vmatrix}.$$

On obtiendra de même les équations et les rayons de deux sphères

réiproques par rapport à la sphère orthogonale à quatre sphères données.

8. En déterminant les coefficients p_i , de telle sorte que l'ensemble des cercles ou des sphères réiproques passe par les points d'intersection des trois cercles ou des quatre sphères, on a pour le système des huit cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles donnés l'équation

$$(28) \quad \frac{2S_{ijk}}{r_i r_j r_k} x_{ijk} \pm \left(\frac{x_i}{r_i} \sin A_{jk} \pm \frac{x_j}{r_j} \sin A_{ki} \pm \frac{x_k}{r_k} \sin A_{ij} \right) = 0.$$

Cette équation devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes, après la disparition des doubles signes. L'équation précédente peut s'écrire encore

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_i}{x_i} [\cos(A_{ij} \pm A_{ik}) - \cos A_{jk}] \\ + \frac{r_j}{x_j} [\cos(A_{ji} \pm A_{jl}) - \cos A_{ki}] \\ + \frac{r_k}{x_k} [\cos(A_{kj} \pm A_{kl}) - \cos A_{il}] = 0. \end{array} \right.$$

L'ensemble du système de deux cercles réiproques, défini par la règle des signes, a pour équation

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i x_j x_k \sin \frac{A_{ki} + A_{ij} - A_{jk}}{2} + r_j x_k x_i \sin \frac{A_{ij} + A_{jk} - A_{ki}}{2} \\ + r_k x_i x_j \sin \frac{A_{jk} + A_{ki} - A_{ij}}{2} = 0. \end{array} \right.$$

Les rayons ρ de ces deux cercles sont fournis par la formule

$$(31) \quad \frac{2}{\rho} \sin \frac{A_{jk} + A_{ki} + A_{ij}}{2} = \frac{\sin A_{jk}}{r_i} + \frac{\sin A_{ki}}{r_j} + \frac{\sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2S_{ijk}}{r_i r_j r_k}.$$

Il est facile d'appliquer ces résultats au système de quatre sphères ou *tétraspère*. L'ensemble des seize sphères circonscrites à la tétraspère est donné par l'équation

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} x_{ijkl} \\ \pm \left(\frac{x_i}{r_i} \sin A_{jkl} \pm \frac{x_j}{r_j} \sin A_{kli} \pm \frac{x_k}{r_k} \sin A_{lij} \pm \frac{x_l}{r_l} \sin A_{ikl} \right) = 0, \end{array} \right.$$

qui devient du *trente-deuxième* degré en coordonnées **cartésiennes**.

Les rayons ρ des sphères circonscrites **sont donnés** par la formule

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\rho} \sin \frac{A_{jk} + A_{kl} + A_{lj} + A_{ij}}{2} \\ & = \frac{\sin A_{jk}}{r_i} + \frac{\sin A_{kl}}{r_j} + \frac{\sin A_{lj}}{r_k} + \frac{\sin A_{ij}}{r_l} \pm \frac{6V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} . \end{aligned} \right.$$

La formule (31) conduit immédiatement à ce théorème :

THÉORÈME. — *La somme des inverses des rayons des cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles orthogonaux deux à deux est nulle.*

9. Par des considérations analogues aux précédentes, on obtient l'équation du système des huit cercles tangents à trois cercles donnés et des seize sphères tangentes à quatre sphères données. On a, dans ce dernier cas,

$$(34) \quad \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{A_{ij}}{2} & \sin^2 \frac{A_{ik}}{2} & \sin^2 \frac{A_{il}}{2} & \frac{x_i}{r_i} \\ \sin^2 \frac{A_{ji}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{jk}}{2} & \sin^2 \frac{A_{jl}}{2} & \frac{x_j}{r_j} \\ \sin^2 \frac{A_{ki}}{2} & \sin^2 \frac{A_{kj}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{kl}}{2} & \frac{x_k}{r_k} \\ \sin^2 \frac{A_{li}}{2} & \sin^2 \frac{A_{lj}}{2} & \sin^2 \frac{A_{lk}}{2} & 0 & \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & \frac{x_l}{r_l} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouvera des résultats analogues pour les rayons de ces sphères et pour les équations et les rayons des cercles conjugués au système de trois cercles, et des sphères conjuguées à la tétrasphère.

*Note sur un problème relatif à la marche du cavalier
sur l'échiquier; par M. C. FLYE SAINTE-MARIE.*

(Séance du 18 avril 1877.)

La pièce nommée *cavalier* dans le jeu des échecs, se déplaçant, à chaque saut, de deux cases dans le sens d'un des côtés de l'échiquier et d'une case dans le sens de l'autre, on sait qu'on peut de plusieurs manières lui faire parcourir les 64 cases sans la faire passer deux fois par la même. La recherche du nombre de solutions que comporte ce problème paraît présenter d'assez grandes difficultés; mais si, au lieu de faire parcourir les 64 cases au cavalier, on se propose de lui faire parcourir seulement une moitié de l'échiquier, c'est-à-dire les 32 cases formant 4 rangées consécutives, le nombre des solutions du problème devient beaucoup plus facile à déterminer. C'est ce nombre que je me propose de rechercher ici.

La *fig. 1* représente la moitié de l'échiquier. J'en partage les 32 cases en 2 groupes : le premier composé des 16 cases numérotées

Fig. 1

1		5		9		13	
2		6		10		14	
	4		8		12		16
	3		7		11		15

sur la figure, le second composé des 16 autres, de sorte que les cases blanches des 2 rangées extrêmes et les cases noires des rangées intermédiaires forment un même groupe. Dans le premier groupe, les cases de même couleur sont désignées par des numéros de même parité.

J'appellerai *extérieures* toutes les cases appartenant aux deux rangées extrêmes, et *intérieures* toutes celles appartenant aux deux rangées intermédiaires. Dans le premier groupe, les cases exté-

rieures sont affectées de numéros impairs, et les cases intérieures de numéros pairs.

Je dirai qu'une case *a* bat une case *b* lorsque le cavalier peut, d'un seul saut, aller de *a* en *b*.

Si l'on représente le passage du cavalier d'une case à une autre par un trait joignant les centres de ces deux cases, le chemin complet que cette pièce aura à parcourir sera représenté par un contour polygonal de 31 côtés, dont les 30 sommets et les 2 extrémités occuperont les 32 cases de la figure.

Cela posé, je remarque qu'une case extérieure quelconque ne bat que des cases du même groupe, d'où il suit que le passage d'un groupe à l'autre ne peut se faire qu'entre deux cases intérieures. Il y aura donc forcément, dans le contour polygonal représentant le chemin suivi, au moins un trait dont les deux extrémités tomberont sur des cases intérieures. Or ce contour est formé, en tout, de 31 traits; il ne pourra donc y en avoir plus de 30 aboutissant par une de leurs extrémités à une case extérieure; mais, d'un autre côté, il ne peut pas y en avoir moins de 30, et encore, pour cela, faut-il que les points de départ et d'arrivée soient sur 2 des cases extérieures; alors celles-ci contiendront chacune l'extrémité d'un trait, et, à chacune des 14 autres, aboutiront 2 traits différents, en tout $2 + 28$ ou 30 traits qui tous seront distincts, car un même trait ne peut aboutir à la fois à 2 cases extérieures.

On tire de là les conséquences suivantes :

1° Il n'y a qu'un seul trait joignant 2 cases intérieures, c'est-à-dire un seul passage d'un groupe à l'autre. En d'autres termes, *les deux groupes sont parcourus en entier l'un après l'autre.*

2° *Le point de départ et le point d'arrivée sont sur deux cases extérieures.*

3° Il s'ensuit que *la case d'arrivée ne peut battre la case de départ.*

La première de ces conséquences introduit une grande simplification dans la recherche qui fait l'objet de cette Note; car il va nous suffire de connaître toutes les manières de parcourir un groupe, par exemple le groupe formé des cases numérotées sur la fig. 1.

Il est clair que, dans ce groupe, les deux extrémités du parcours sont nécessairement, l'une sur une case extérieure, l'autre sur une

case intérieure. Nous aurions donc à rechercher successivement de combien de manières les 16 cases du groupe peuvent être parcourues en partant de l'une des cases affectées d'un numéro impair, pour aboutir à l'une des cases affectées d'un numéro pair. Tous ces problèmes se traiteraient facilement; mais il convient de restreindre le plus possible le nombre des cas à considérer.

D'abord il est clair que les solutions dont le point de départ serait sur l'une des cases 15, 11, 7 ou 3 ont pour symétriques, par rapport au centre de la figure, les solutions dont le point de départ est en 1, 5, 9 ou 13. Il suffira donc de considérer ces dernières.

En second lieu, une solution étant trouvée, on peut en déduire une autre en remplaçant chacune des cases intérieures par la case extérieure adjacente, et *vice versa*; car si, dans le groupe, une case *a* bat une case *b*, la case *a'* qu'on substituera ainsi à *a* battra encore la case *b'* substituée à *b*. D'après cela, il y aura autant de manières, par exemple, d'aller de la case 5 à la case 14 que de manières d'aller de la case 6 à la case 13.

Enfin, si l'on détermine toutes les manières d'aller de 1 à 4, on formera toutes les solutions dans lesquelles la case d'arrivée bat la case de départ (solutions que j'appellerai *fermées*, parce qu'elles peuvent être figurées par un polygone fermé, dont deux sommets consécutifs quelconques peuvent être indifféremment pris pour extrémités du parcours).

En effet, la case 1 ne battant que les deux cases 4 et 6, tout polygone figurant une solution fermée contiendra nécessairement les deux traits 1-4 et 1-6. Donc, lorsque la case d'arrivée battra la case de départ, toutes les solutions possibles se trouveront parmi celles obtenues en prenant pour points extrêmes les cases 1 et 4.

Les cas à traiter se réduisent ainsi aux suivants :

Cases de départ.	Cases d'arrivée.
1.....	2, 4, 8, 10, 12, 14 et 16
5.....	6, 12 et 14 ⁽¹⁾
9.....	4 et 10 ⁽²⁾
13.....	4 et 14 ⁽³⁾

(¹) De 5 à 16, les solutions sont en même nombre que de 15 à 6, ou de 1 à 2.

(²) De 9 à 16, en même nombre que de 15 à 10, ou de 1 à 8.

(³) De 13 à 8, en même nombre que de 7 à 14, ou de 9 à 4.

Dans chacun de ces cas, la recherche de toutes les solutions possibles est facilitée par cette remarque, que les cases 1, 2, 15 et 16 ne battent chacune que 2 cases du groupe, de sorte que les deux traits aboutissant à celles de ces cases qui ne sont ni point de départ, ni point d'arrivée, peuvent être tracés d'avance.

Je me bornerai ici à indiquer, par le tableau suivant, le nombre des solutions possibles dans chaque cas, en réunissant devant une même accolade les différents cas dont les solutions d'un seul suffisent pour déterminer les solutions des autres, au moyen de l'une des remarques qui précèdent.

Extrémités du parcours.	Nombre et nature des solutions.
De 1 à 4 1 6 3 2 5 2 11 16 13 16 15 12 15 14	8 solutions fermées.
De 5 à 4 3 6 11 14 13 12	3 <i>id.</i>
De 5 à 8 7 6 9 12 11 10	2 <i>id.</i>
De 5 à 10 7 12 9 6 11 8	3 <i>id.</i>
De 9 à 8 7 10	6 <i>id.</i>
De 9 à 14 3 8 7 4 13 10	5 <i>id.</i>
De 1 à 2 15 16	22 solutions non fermées.

Extrémités du parcours.	Nombre et nature des solutions.	
De 1 à 8 7 2 9 16 15 10	16 solutions non fermées.	
De 1 à 10 7 16 9 2 15 8		
De 1 à 12 5 16 11 2 15 6		
De 1 à 14 3 16 13 2 15 4		
De 1 à 16 15 2	33	<i>id.</i>
De 5 à 6 11 12	2	<i>id.</i>
De 5 à 12 11 6	3	<i>id.</i>
De 5 à 14 3 12 11 4 13 6	3	<i>id.</i>
De 9 à 4 3 10 7 14 13 8	3	<i>id.</i>
De 9 à 10 7 8	6	<i>id.</i>
De 13 à 4 3 14	6	<i>id.</i>
De 13 à 14 3 4	4	<i>id.</i>

On reconnaitra, d'après ce tableau, qu'on peut, selon la case de

départ, aboutir :

A la case 2.....	De 118 manières
A la case 4.....	De 42 »
A la case 6.....	De 32 »
A la case 8.....	De 54 »

et, sans qu'il soit nécessaire de recourir au tableau pour la suite du dénombrement, on déduira de là, en raison de la symétrie de la figure, qu'on peut aboutir :

A la case 10.....	De 54 manières
A la case 12.....	De 32 »
A la case 14.....	De 42 »
A la case 16.....	De 118 »

Considérons maintenant l'ensemble des deux groupes (*fig. 2*). Je conserve, pour les cases du premier groupe, le numérotage déjà

Fig. 2.

1	3'	5	7'	9	11'	13	15'
2	4'	6	8'	10	12'	14	16'
2'	4	6'	8	10'	12	14'	16
1'	3	5'	7	9'	11	13'	15

employé sur la *fig. 1*. Dans le second groupe, les numéros se distinguent de ceux du premier par un accent, et sont disposés symétriquement à ceux-ci. Il y aura évidemment autant de manières de parcourir le second groupe à partir d'une case de numéro pair p' qu'il y a de manières de parcourir le premier en aboutissant à la case symétrique p .

Or, pour passer du premier groupe au second, on peut, de la case 2, tomber sur la case 6', ce qui fournira, d'après les chiffres précédents, 118×32 ou 3776 solutions, ou bien de 4 sur 8', ce qui fournit $42 \times 54 = 2268$ solutions, ou de 6 sur 2', ce qui ne donnera que des solutions symétriques de celles obtenues en passant de 2 à 6', solutions que je ne considérerai pas comme distinctes des

précédentes, ou bien encore de 6 sur 10', ce qui donnera 32×54 ou 1728 solutions : en tout 7772 manières distinctes de faire parcourir au cavalier la moitié de l'échiquier.

Deux de ces solutions ne peuvent pas être symétriques l'une de l'autre ni par rapport à un des axes de la figure, ni par rapport à son centre; car l'unique trait qui marque le passage d'un groupe à l'autre n'occupe jamais deux positions symétriques. Quant aux autres solutions possibles, elles se déduiraient des précédentes par voie de symétrie, et, pour cette raison, je ne les considérerai pas comme en étant distinctes.

On remarquera que les principes qui nous ont guidé dans ces recherches sont indépendants du nombre de cases contenues dans une rangée, et supposent seulement que le nombre des rangées est égal à 4; mais il est clair que le dénombrement deviendrait d'autant plus pénible que le nombre des cases de chaque rangée serait plus considérable.

Sur un problème d'analyse combinatoire;

par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 30 mai 1877.)

§ I. — PROBLÈME GÉNÉRAL.

1. Considérons n lettres distinctes, susceptibles d'être répétées; assujettissons-nous à les traiter toutes de la même façon, et formons avec elles tous les groupes possibles, de p lettres chacun, satisfaisant à des conditions données. Si p n'est point inférieur à n , il se pourra, en général, que les n lettres considérées soient contenues toutes à la fois dans certains groupes. Nous supposons connue l'expression du nombre total $G_{n,p}$ des groupes formés, et nous nous proposons de déterminer celle du nombre $g_{n,p}$ des groupes renfermant chacun les n lettres considérées.

2. Évidemment, les groupes formés peuvent se classer ainsi : ceux qui contiennent chacun les n lettres données, ceux qui n'en contiennent que $n - 1$, ceux qui n'en contiennent que $n - 2$, etc., etc. Le nombre des groupes ne renfermant chacun que $n - t$ lettres

distinctes est égal au produit du facteur $g_{n-t,p}$ déjà défini par le facteur $\frac{n!}{t!(n-t)!}$, qui représente, comme on le sait, la quotité des combinaisons simples de n lettres, soit t à t , soit $n-t$ à $n-t$. Nous pouvons donc écrire identiquement, en regardant $0!$ comme égal à l'unité,

$$G_{n,p} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{n!}{t!(n-t)!} g_{n-t,p},$$

et cette identité exprime simplement ce fait évident que le nombre total des groupes formés est la somme des nombres de groupes répondant aux différents cas de notre classification.

3. Cette relation nous montre que, si les nombres G sont connus, les nombres $g_{1,p}, g_{2,p}, g_{3,p}, \dots$ sont les termes d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes. Nous avons fait récemment connaître ⁽¹⁾ le terme général d'une série ainsi déterminée. En nous reportant à l'expression que nous en avons donnée, nous trouvons

$$g_{n,p} = \sum_r^n \Psi(n, r) G_{r,p},$$

$\Psi(n, r)$ étant égal à l'expression

$$\sum (-1)^r \frac{n_1!}{k_1!(n_1-k_1)!} \frac{n_2!}{k_2!(n_2-k_2)!} \frac{n_3!}{k_3!(n_3-k_3)!} \dots \frac{n_r!}{k_r!(n_r-k_r)!},$$

dans laquelle la caractéristique Σ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r, k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$ qui dépassent zéro et satisfont, quel que soit l'indice u , aux conditions

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r &= n - r, \\ n_1 &= k_1 + r, \\ n_u &= k_u + n_{u-1}. \end{aligned}$$

4. Si l'on tient compte de ces trois conditions, l'expression de

⁽¹⁾ Thèses soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris, le 28 mars 1877.

$\Psi(n, r)$ se simplifie beaucoup, et l'on trouve

$$\Psi(n, r) = \frac{n!}{r!} \sum \frac{(-1)^r}{k_1! k_2! k_3! \dots k_r!},$$

la caractéristique Σ s'étendant toujours aux mêmes systèmes de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$.

5. Cela étant, considérons à part l'équation

$$\varphi(v) = \sum \frac{(-1)^v}{k_1! k_2! k_3! \dots k_r!},$$

et supposons que le Σ s'y étende à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$ qui dépassent zéro et satisfont à la condition

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = v.$$

On peut voir très-facilement que, si nous convenons que $\varphi(0)$ soit égal à l'unité, nous avons, quel que soit l'entier positif v ,

$$\varphi(v) + \frac{1}{1!} \varphi(v-1) + \frac{1}{2!} \varphi(v-2) + \dots + \frac{1}{v!} \varphi(0) = 0.$$

Or cette équation, et toutes celles qui n'en diffèrent que par la valeur de v , sont évidemment satisfaites si l'on y remplace $\varphi(v)$ par $\frac{(-1)^v}{v!}$. Donc cette dernière expression est la valeur même de $\varphi(v)$.

6. Il s'ensuit immédiatement

$$\Psi(n, r) = \frac{n!}{r!} \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!};$$

par suite

$$g_{n,r} = \sum_1^n (-1)^{n-r} \frac{n!}{r! (n-r)!} G_{n-r,r},$$

ou bien

$$g_{n,r} = \sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t! (n-t)!} G_{n-t,r};$$

et telle est la solution de notre problème.



§ II. — APPLICATIONS IMMÉDIATES.

7. Dans ce qui précède, nous avons laissé tout à fait quelconque la loi de formation des groupes considérés. Nous pouvons donc, à l'aide des résultats que nous venons d'obtenir, résoudre notre problème dans tous les cas possibles. Nous nous contenterons de considérer le cas particulier des arrangements complets et le cas particulier des combinaisons complètes.

8. Les arrangements complets, p à p , de n lettres distinctes, sont, on le sait, les groupes qu'on obtient en écrivant, de toutes les manières possibles, à la suite les unes des autres, p lettres, distinctes ou identiques, prises, quant à leur nature, parmi les n lettres données, de façon que deux quelconques des groupes obtenus diffèrent entre eux soit par les lettres qui y entrent, soit par l'ordre de succession de ces lettres.

Désignons par $B_{n,p}$ le nombre total de ces arrangements complets, et par $b_{n,p}$ le nombre de ceux d'entre eux qui renferment à la fois les n lettres distinctes données. Nous aurons, d'après la formule précédente,

$$b_{n,p} = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} B_{n-t,p},$$

et, comme

$$B_{n-t,p} = (n-t)^p,$$

cette égalité deviendra

$$b_{n,p} = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^p.$$

9. Avant de passer au cas des combinaisons complètes, remarquons que la dernière formule écrite ci-dessus ne présente, à son second membre, que les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des nombres entiers 1, 2, 3, ..., n , multipliées par des coefficients indépendants de p . Il s'ensuit que les nombres

$$b_{n,n}, b_{n,n+1}, b_{n,n+2}, \dots$$

forment une série récurrente proprement dite, d'ordre n , définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3)\dots(z-n)=0,$$

dont les racines sont les n premiers nombres entiers.

10. Arrivons maintenant aux combinaisons complètes. Ce sont, comme on le sait, des groupes pareils aux arrangements complets, mais dont deux quelconques diffèrent entre eux autrement que par l'ordre de succession des lettres. Si nous représentons par $D_{n,p}$ le nombre total des combinaisons complètes, p à p , de n lettres distinctes, et par $d_{n,p}$ le nombre de celles d'entre elles qui contiennent à la fois les n lettres distinctes données, nous avons, d'après notre formule générale,

$$d_{n,p} = \sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} D_{n-t,p}.$$

Or c'est un fait bien connu que

$$D_{n-t,p} = \frac{(n-t+p-1)!}{(n-t-1)!p!};$$

donc, en définitive,

$$d_{n,p} = \sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} \frac{(n-t+p-1)!}{(n-t-1)!p!}.$$

11. On pourrait encore appliquer notre formule générale à plusieurs autres cas particuliers, à celui, par exemple, des combinaisons que nous avons nommées *combinaisons régulières* (*). Ce serait chose très-facile, que nous négligeons à cause même de sa trop grande facilité.

(*) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, année 1876).*

§ III. — AUTRE APPLICATION.

12. La résolution du problème général que nous nous sommes proposé en commençant, ainsi que celles des problèmes particuliers que nous avons traités ensuite à titre d'applications, permet de résoudre un très-grand nombre d'autres problèmes. Nous ne résoudrons que le suivant :

Parmi les arrangements complets de n lettres prises p à p , quel est le nombre de ceux qui commencent par une même lettre et qui renferment chacun les n lettres données?

13. Si nous désignons ce nombre par $x_{n,p}$, comme il est bien clair qu'il y a autant d'arrangements commençant par une certaine lettre que d'arrangements commençant par toute autre, nous avons

$$x_{n,p} = \frac{1}{n} b_{n,p},$$

c'est-à-dire

$$x_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^p.$$

C'est là une première solution du problème actuel, laquelle montre immédiatement que les nombres $x_{n,n}$, $x_{n,n+1}$, $x_{n,n+2}$, ... sont les termes d'une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3) \dots (z-n) = 0.$$

14. Pour obtenir une seconde solution, supposons qu'on ait supprimé la première lettre dans tous les arrangements dont on cherche le nombre. Les arrangements nouveaux, fournis par cette suppression, ne sont plus que des arrangements $p-1$ à $p-1$; ils se partagent en deux classes : ceux qui renferment les n lettres distinctes et ceux qui ne renferment que les $n-1$ lettres autres que la lettre supprimée; les premiers sont au nombre de $b_{n,p-1}$, les seconds au nombre de $b_{n-1,p-1}$. On a donc

$$x_{n,p} = b_{n,p-1} + b_{n-1,p-1},$$

c'est-à-dire

$$x_{n,p} = \sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^{p-1} \\ + \sum_0^{n-2} (-1)^t \frac{(n-1)!}{t!(n-t-1)!} (n-t-1)^{p-1}.$$

15. En rapprochant les deux expressions de $x_{n,p}$ qu'on vient de trouver, on obtient la relation

$$b_{n,p} = n(b_{n,p-1} + b_{n-1,p-1}),$$

qui exprime une propriété des nombres b et qui se vérifie très-facilement dès qu'on y remplace chacun de ces nombres par son expression connue.

16. Dans le cas particulier de trois lettres distinctes, les formules précédentes nous donnent l'une et l'autre ce même résultat

$$x_{3,p} = 3^{p-1} - 2 \cdot 2^{p-1} + 1^{p-1},$$

et les nombres

$$x_{3,3}, \quad x_{3,4}, \quad x_{3,5}, \quad \dots$$

forment une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3) = 0,$$

de telle sorte que nous avons, pour toute valeur de p supérieure à 5,

$$x_{3,p} = 6x_{3,p-1} - 11x_{3,p-2} + 6x_{3,p-3}.$$

§ IV. — IDENTITÉS NUMÉRIQUES.

17. Les résultats obtenus par nous soit dans le cas particulier des arrangements complets, soit dans celui des combinaisons complètes, conduisent facilement à deux identités numériques assez remarquables. Cette propriété de fournir naturellement des identités numériques est d'ailleurs commune à la plupart des résultats de l'analyse combinatoire.

18. Prenons la formule qui nous donne $b_{n,p}$. Évidemment, si p devient égal à n , les arrangements dont $b_{n,p}$ est le nombre ne diffèrent plus des permutations des n lettres données. Alors donc $b_{n,p}$ est égal au nombre de ces permutations, c'est-à-dire à $n!$, et nous avons l'identité

$$\sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^n = n!,$$

qui peut s'écrire

$$\sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{(n-t)^n}{t!(n-t)!} = 1.$$

19. Considérons de même la formule qui donne $\partial_{n,p}$, et supposons que p y devienne égal à n . Évidemment $\partial_{n,p}$ se réduit alors à l'unité, et nous avons l'identité

$$\sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} D_{n-t,n} = 1,$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{(2n-t-1)!}{t!(n-t)!(n-t-1)!} = 1.$$

§ V. — REMARQUE GÉNÉRALE.

20. Les raisonnements et les calculs faits par nous en commençant le présent travail montrent nettement que, si l'on considère deux suites de nombres

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots,$$

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

se correspondant chacun à chacun, et tels que l'on ait, quel que soit n ,

$$\Omega_n = \sum_0^{n-1} \frac{n!}{t!(n-t)!} \omega_{n-t},$$

on aura de même

$$\omega_n = \sum_0^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} \Omega_{n-t},$$

et réciproquement.

21. Les couples de suites jouissant de ces propriétés ne sont point rares. Nous venons de trouver le couple formé par les suites des nombres G et g , le couple des suites B et b , celui des suites D et d . On en pourrait indiquer encore d'autres; nous n'en citerons qu'un, celui des deux suites que forment, d'une part, les nombres des permutations de n lettres diminués chacun d'une unité, de l'autre les nombres de celles des permutations de n lettres où aucune lettre n'est à son rang.

Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers; par M. HALPHEN..

(Séance du 30 mai 1877.)

Les sommes des diviseurs des nombres naturels peuvent se calculer de proche en proche au moyen d'une formule récurrente due à Euler. L'illustre géomètre attachait le plus grand prix à la découverte de cette formule, et ne parvint à la démontrer qu'après de longs efforts ⁽¹⁾. Voici cette formule :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(n) = S(n-1) - S(n-5) + S(n-12) + \dots \\ \quad + (-1)^2 S \left[n - \frac{x(3x-1)}{2} \right] + \dots \\ \quad + S(n-2) - S(n-7) + S(n-15) + \dots \\ \quad + (-1)^2 S \left[n - \frac{x(3x+1)}{2} \right] + \dots \end{array} \right.$$

(1) Euler a publié sur ce sujet trois Notes, savoir : 1° *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs*; — 2° *Observatio de summis divisorum*; — 3° *Demonstratio theorematum circa ordinem in summis divisorum observatum*. — Ces trois Notes datent des années 1747, 1752, 1754 (Acad. de Berlin et de Saint-Petersbourg). On les trouve réunis dans le *Recueil Leonhardi Euleri Commentationes Arithmeticae collectae*, p. 234 et 146 du tome I et p. 639 du tome II.

La notation $S(a)$ y désigne la somme des diviseurs du nombre a . Chacune des deux suites doit être prolongée jusqu'au dernier terme dans la parenthèse duquel figure un nombre positif. Enfin, dans le cas où n est de l'une des deux formes $\frac{x(3x \pm 1)}{2}$, on doit remplacer $S(0)$ par n .

Euler a découvert cette formule et l'a démontrée au moyen du résultat suivant :

$$(2) \quad P = (1-z)(1-z^3)(1-z^5)(1-z^7) = \dots = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} (-1)^x z^{\frac{x(3x+1)}{2}}.$$

Le cube du même produit de facteurs se développe suivant une formule analogue à (2) et qui a été trouvée par Jacobi (*Fund. nova*, § 66, et *Journal de Crelle*, t. 21, p. 13), savoir

$$(3) \quad P^3 = \sum_{x=0}^{x=\infty} (-1)^x (2x+1) z^{\frac{x(x+1)}{2}}.$$

Il suffit de reproduire sur la formule (3) l'analyse appliquée par Euler à la formule (2) pour en conclure une formule récurrente différente de (1).

Je prends, dans les deux membres de l'équation (3), la dérivée logarithmique, je multiplie par z et je divise par 3; j'obtiens ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{z}{1-z} + \frac{2z^2}{1-z^3} + \frac{3z^3}{1-z^5} + \dots \\ & = -\frac{1}{3} \frac{\sum (-1)^x (2x+1) \frac{x(x+1)}{2} z^{\frac{x(x+1)}{2}}}{\sum (-1)^x (2x+1) z^{\frac{x(x+1)}{2}}} \end{aligned} \right.$$

On sait que le terme général du premier membre de l'équation (4), développé suivant les puissances croissantes de z , est $S(p)z^p$. Ce développement étant substitué dans l'équation (4), et le dénominateur chassé, on identifiera les deux membres, et l'on trouvera

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & S(n) = 3S(n-1) - 5S(n-3) + 7S(n-6) + \dots \\ & + (-1)^x (2x+1) S\left[n - \frac{x(x+1)}{2}\right] + \dots \end{aligned} \right.$$

La suite doit être prolongée jusqu'au dernier terme dans la parenthèse duquel figure un nombre positif. Dans le cas où n est de la forme $\frac{x(x+1)}{2}$, le terme $\frac{(-1)^x(2x+1)S(0)}{2}$ doit être remplacé par

$$(-1)^x(2x+1)\frac{x(x+1)}{6},$$

qui est effectivement un nombre entier.

La formule (5) est celle que j'avais en vue d'établir.

Sur une proposition d'Algèbre; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 juin 1877.)

Si l'on désigne par les lettres f, φ, ψ trois polynômes entiers à deux variables x, y , quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait identiquement

$$(1) \quad f = A\varphi + B\psi,$$

A et B étant aussi des polynômes entiers en x, y ?

La réponse à cette question est des plus aisées dans le cas où chacun des systèmes de solutions des équations $\varphi = 0, \psi = 0$ est simple. Dans ce cas, il faut et il suffit que chacun de ces systèmes annule f . J'admettrai ici ce résultat comme connu. Dans les autres cas, la question est plus difficile à résoudre. Cette difficulté a été surmontée par M. Nöther. On peut énoncer comme il suit la solution donnée par ce savant géomètre (*Math. Ann.*, t. VI) :

Soit (α, β) un système de solutions des équations $\varphi = 0, \psi = 0$; soient a, b deux développements procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de $(x - \alpha)$ et $(y - \beta)$. Pour que f soit de la forme (1), il faut et il suffit qu'on puisse déterminer a et b par la condition

$$(2) \quad f = a\varphi + b\psi,$$

et qu'il en soit de même pour chaque système de solutions des équations considérées.

Cette proposition étant très-importante, je crois utile d'en donner ici une nouvelle démonstration.

Je suppose, en premier lieu, $\varphi = x$. Je groupe, dans f , ψ et B , les termes indépendants de x , et j'écris

$$f = xf' + F(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad B = xB' + \mathfrak{B}(y).$$

En faisant le même groupement dans (1), et retenant seulement les termes indépendants de x , on obtient

$$(3) \quad F(y) = \mathfrak{B}(y) \Psi(y),$$

c'est-à-dire, pour l'exactitude de l'équation (1), en supposant $\varphi = x$, il est nécessaire que la partie indépendante de x dans f soit divisible par la partie indépendante de x dans ψ .

Cette condition est suffisante, comme on le voit immédiatement.

Soit β une racine de $\Psi(y)$. Je suppose la condition (2) remplie pour le système $(0, \beta)$. Par le même raisonnement, j'en conclus

$$F(y) = b_1(y) \Psi(y),$$

b_1 étant une série convergente dans le voisinage de $y = \beta$. J'en conclus que F contient le facteur $(y - \beta)$ au moins à la même puissance que Ψ .

Si maintenant il en est de même pour chaque racine de Ψ , il en résulte que F est divisible par Ψ . Donc la proposition annoncée est prouvée pour le cas où l'on a $\varphi = x$. Au moyen d'une substitution linéaire, j'en conclus que la proposition est prouvée aussi pour le cas où φ est un trinôme du premier degré en x, y .

J'arrive maintenant au cas général. Supposons, pour un instant, les coefficients de φ variables, et faisons-les varier de telle sorte que le système de solutions (α, β) multiple d'ordre n se change en n systèmes différents $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$. Soient $P_1, P_2, \dots$ des trinômes du premier degré assujettis simplement aux conditions de s'évanouir, P_1 pour $x = \alpha_1, y = \beta_1$; P_2 pour $x = \alpha_2, y = \beta_2, \dots$

En même temps, un second système de solutions (α', β') multiple d'ordre n' se change en n' systèmes différents. Soient, de même, $P'_1, P'_2, \dots$ des trinômes assujettis à des conditions analogues; et ainsi de suite.

Soient Π le produit de tous ces trinômes et φ' le polynôme φ dont

on a fait varier les coefficients. Toutes les solutions communes à $\varphi' = 0$ et $\psi = 0$ étant simples, j'ai

$$\Pi = A' \varphi' + B' \psi',$$

A' et B' étant des polynômes entiers. Cette relation subsiste à la limite, lorsque $\varphi' = \varphi$. Alors $P_1, P_2, \dots$ s'évanouissent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, et ainsi des autres.

De là cette proposition préparatoire :

Si $P_1, P_2, \dots$ sont des trinômes du premier degré en x, y , assujettis simplement à s'évanouir pour $x = \alpha, y = \beta$; si $P'_1, P'_2, \dots$ sont, de même, des trinômes assujettis à s'évanouir pour $x = \alpha', y = \beta'$; et de même pour chaque solution commune à $\varphi = 0, \psi = 0$, on peut choisir le nombre de ces trinômes de manière à avoir identiquement, en désignant par Π leur produit, et quel que soit le polynôme entier f ,

$$(4) \quad \Pi f = C\varphi + D\psi,$$

C et D étant aussi des polynômes entiers.

Je suppose maintenant la condition (2) remplie aux environs de (α, β) . Il résulte alors de (4), et dans les mêmes limites,

$$(a\Pi - C)\varphi + (b\Pi - D)\psi = 0,$$

et par suite

$$(5) \quad C = a\Pi + c\psi,$$

c désignant un développement analogue à a .

Je considère séparément dans Π le facteur P_1 . Les solutions communes à $P_1 = 0$ et $\psi = 0$ autres que (α, β) sont toutes simples et ne font pas évanouir φ . Elles font donc évanouir C , d'après (4). En ce qui concerne la solution (α, β) , l'équation (5) peut être envisagée comme exprimant que la condition (2) est remplie à l'égard de P_1, ψ, C , jouant le rôle de φ, ψ, f . D'ailleurs P_1 est un trinôme du premier degré. Donc, d'après un résultat précédent,

$$(6) \quad C = C_1 P_1 + B\psi,$$

C_1 et B désignant des polynômes entiers.

La valeur (6) de C , portée dans (4), conduit à

$$\Pi f = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\psi.$$

Comme Π contient le facteur P_1 , le coefficient de Ψ , donc cette dernière identité, contient aussi ce facteur. Je le supprime, et je désigne par Π_1 le produit des autres trinômes. J'ai alors

$$(7) \quad \Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi.$$

Je répète sur (7) et à l'égard de P_1 le même raisonnement, et ainsi de suite. Je fais ainsi disparaître du coefficient de f dans (4) tous les trinômes relatifs à la solution (α, β) .

Si maintenant les conditions analogues à (2) sont satisfaites par f pour toutes les solutions communes à $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, on fera de même disparaître tous les trinômes $P', P'', \dots$. Donc f est de la forme (1). C'est ce qu'il fallait démontrer.

Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre; par M. A. MANNHEIM.

(Séance du 25 juillet 1877.)

Dans une Communication que j'ai faite récemment sur ce sujet à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, je n'ai pu, faute de place, donner une démonstration géométrique d'un théorème établi analytiquement par M. Halphen ⁽²⁾. Voici cette démonstration :

Soient a un point d'une surface (S_R) , dont les rayons de courbure principaux sont liés entre eux, A la normale en ce point et b et c les centres de courbure situés sur cette normale. Appelons (B) et (C) les nappes de la développée de (S_R) et B et C les normales à ces surfaces issues des points b et c . Prenons pour plan de la figure le plan de la section principale de (S_R) en a pour laquelle le rayon de courbure ac ou R_1 est maximum. L'une des lignes de courbure

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 avril 1877.

⁽²⁾ Voir ce *Bulletin* pour 1876.

de (S_R) est tangente en a à ce plan. La normale à (S_R) , qui a pour directrice cette courbe, est une surface développable dont l'arête de rebroussement est tangente en c à A . Cette surface développable est circonscrite à (B) le long d'une courbe dont la tangente en b est l'axe de courbure de l'autre ligne de courbure qui passe en a . Cet axe, comme je l'ai montré ⁽¹⁾, rencontre C en i , qui est le centre de courbure pour le point c de la courbe de contour apparent de (C) , projetée orthogonalement sur le plan mené en c perpendiculairement à A .

Lorsque a se déplace sur la ligne de courbure tangente au plan de la figure, la normale A se déplace sur ce plan d'un angle $d\psi$ et le rayon de courbure ac ou R_1 varie.

On a, en appelant ε le centre de courbure de la section faite dans (C) par le plan de la figure,

$$dR_1 = c\varepsilon d\psi.$$

Le rayon de courbure ab ou R_2 varie en même temps; en menant bj perpendiculairement à la tangente bi , on a

$$dR_2 = cj d\psi;$$

on a alors

$$\frac{dR_1}{dR_2} = \frac{c\varepsilon}{cj}.$$

Mais $cj = -\frac{bc^2}{ci}$ (en mettant le signe — parce que les segments ci et cj sont nécessairement de part et d'autre du point c); il vient

$$\frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{c\varepsilon \times ci}{bc^2},$$

et comme le produit $c\varepsilon \times ci$ est égal au produit $t_1 t_2$ des rayons de courbure principaux de (C) en c , on arrive à

$$(1) \quad \frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{t_1 t_2}{(R_1 - R_2)^2}.$$

Déplaçons maintenant la normale A en faisant suivre au point a un élément de la ligne de courbure perpendiculaire au plan de la

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 7 décembre 1874.

figure et de façon que la variation de ab soit dR_1 . Alors, puisque R_1 et R_2 sont liés entre eux, l'autre rayon de courbure variera de dR_2 , et l'on trouvera comme précédemment

$$(2) \quad \frac{dR_2}{dR_1} = - \frac{r_1 r_2}{(R_1 - R_2)^2}.$$

En faisant le produit de ces deux égalités, il vient

$$r_1 r_2 t_1 t_2 = (R_1 - R_2)^4.$$

De là le théorème qu'il s'agissait d'établir :

Pour une surface (S_R), le produit des rayons de courbure principaux des nappes (B) et (C) aux points b et c est égal à $(R_1 - R_2)^4$.

Des relations (1) et (2) nous pouvons déduire quelques conséquences. Si, par exemple, on considère les surfaces pour lesquelles $R_1 - R_2 = \text{const.}$, on a

$$dR_1 = dR_2,$$

et par suite

$$r_1 r_2 = t_1 t_2 = - (R_1 - R_2)^2.$$

On peut donc dire :

Lorsque $R_1 - R_2 = \text{const.}$, les nappes (B) et (C) sont à courbures opposées ; le produit des rayons de courbure principaux de (B) est égal au produit des rayons de courbure principaux de (C) et égal à $-(R_1 - R_2)^2$.

De la même manière, on trouvera que :

Lorsque $\frac{R_1}{R_2} = \text{const.}$, le produit des rayons de courbure principaux de (B) en b est proportionnel au produit analogue pour (C) et au produit analogue pour (S_R) en a .

A ces théorèmes j'ajouterai les suivants, qui résultent facilement des théorèmes démontrés dans la Note à l'Académie dont je viens de parler :

Lorsque $R_1 - R_2 = \text{const.}$, les normales qui touchent (B) et (C) suivant des asymptotiques ont pour plans centraux les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans des sections principales. Ces

normales ont pour lignes de striction des courbes lieux des points milieux des segments tels que bc , et leur paramètre de distribution est constant et égal à $\frac{R_1 - R_2}{2}$. Les asymptotiques des nappes (B) et (C) ont même rayon de seconde courbure.

Lorsqu'une surface convexe (S_R) a ses indicatrices semblables entre elles, les normales qui touchent (B) et (C) suivant des asymptotiques ont pour directrices des courbes qui coupent sous le même angle les lignes de courbure d'un même système de (S_R). Les lignes de striction de ces normales partagent dans un rapport constant les segments tels que bc .

Théorème sur les surfaces ; par M. HAAK.

(Séance du 11 juillet 1877.)

Soit

$$(1) \quad u = f(\mu, \nu)$$

l'équation géométrique d'une surface dont u est le rayon vecteur ⁽¹⁾; μ, ν sont des variables algébriques indépendantes et la fonction f une fonction géométrique représentant une grandeur géométrique déterminée lorsqu'on attribue à μ et à ν des valeurs quelconques.

On a, par différentiation,

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \frac{df}{d\mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{df}{d\nu} \frac{d\nu}{dt},$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{d^2 f}{d\mu^2} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2 f}{d\mu d\nu} \frac{d\mu}{dt} \frac{d\nu}{dt} \\ &+ \frac{d^2 f}{d\nu^2} \left(\frac{d\nu}{dt} \right)^2 + \frac{df}{d\mu} \frac{d^2 \mu}{dt^2} + \frac{df}{d\nu} \frac{d^2 \nu}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

(¹) Nous n'emploierons pour la démonstration que nous avons en vue que les formules les plus simples du *Calcul géométrique*: ces formules ne sont qu'une extension aux quantités géométriques des règles du calcul algébrique ordinaire.

Ces formules représentent les accélérations d'ordre successif d'un point m qui se meut arbitrairement sur la surface.

Supposons d'abord que μ et ν varient d'une manière absolument quelconque. Le point m décrira, à partir d'une position initiale, une courbe quelconque sur la surface. Les coefficients géométriques $\frac{df}{d\mu}$, $\frac{df}{d\nu}$ auront alors des valeurs déterminées, tandis que les quantités algébriques $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ seront arbitraires.

L'équation (2) de la forme

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{d\mu}x + \frac{df}{d\nu}y$$

montre que *l'extrémité de la vitesse se trouve dans un plan fixe, quelle que soit la trajectoire que l'on suive.*

C'est le *théorème du plan tangent*.

Supposons maintenant que $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ soient déterminés, ce qui revient à se donner la vitesse $\frac{du}{dt}$ du point mobile. Ce point se trouvera dès lors assujéti à décrire sur la surface une trajectoire tangente à une direction donnée qui est celle de sa vitesse. L'équation (3), dans laquelle toutes les quantités géométriques et algébriques sont déterminées à l'exception de $\frac{d^2\mu}{dt^2}$, $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ qui restent arbitraires, fait voir que l'accélération est de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A + \frac{df}{d\mu}x + \frac{df}{d\nu}y,$$

A étant une constante géométrique.

Ainsi, *lorsqu'un point mobile se déplace sur une surface donnée avec une vitesse donnée, l'extrémité de son accélération se trouve dans un plan parallèle au plan tangent à la surface.*

Interprétons géométriquement ce résultat. L'accélération en question se décompose, comme on le sait, en deux composantes, l'une tangentielle, égale en grandeur à $\frac{dv}{dt}$, en désignant par v la vitesse, l'autre dirigée suivant la normale principale et égale à $\frac{v^2}{\rho}$, en

appelant ρ le rayon de courbure de la trajectoire. La seconde de ces composantes est seule à considérer pour obtenir la projection de l'accélération sur la normale à la surface : or, d'après le théorème précédent, cette projection est constante; ce théorème s'exprime donc par la relation

$$\frac{v^2}{\rho} \cos \varphi = \text{const.},$$

en désignant par φ l'angle que fait la normale principale à la trajectoire avec la normale à la surface ou en d'autres termes l'angle du plan osculateur avec le plan de la section normale correspondante. Soit R le rayon de courbure de cette section, l'équation précédente deviendra

$$\frac{v^2}{\rho} \cos \varphi = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad \rho = R \cos \varphi :$$

c'est le *théorème de Meusnier*.

On voit aisément que les remarques auxquelles les expressions de la vitesse et de l'accélération ont donné lieu peuvent s'étendre aux accélérations d'ordre quelconque. On est ainsi conduit à un théorème général qui s'énonce de la manière suivante :

Lorsqu'un point mobile est assujéti à se déplacer sur une surface à partir d'une position donnée m , si sa vitesse et ses $n - 1$ premières accélérations sont données, son accélération d'ordre n est assujéti à avoir son extrémité dans un plan parallèle au plan tangent à la surface en m .

Ce théorème, dont nous avons donné les interprétations géométriques dans le cas de la vitesse et de l'accélération, est encore susceptible pour la suraccélération d'une interprétation assez simple.

On sait qu'en appelant $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ le rayon de courbure de la trajectoire et ses dérivées successives par rapport à l'angle de contingence ⁽¹⁾ et r le rayon de seconde courbure (c'est-à-dire $\frac{ds}{\epsilon}$, ϵ étant l'angle de deux plans osculateurs consécutifs), on a pour

⁽¹⁾ Dérivées qui deviennent, dans le cas des courbes planes, les rayons de courbure des développées successives de la courbe.



les composantes de l'accélération de second ordre :

Suivant la tangente.....	$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho_1^2}$
Suivant la normale.....	$\frac{3v}{\rho_1} \frac{dv}{dt} - \frac{v^3 \rho_2}{\rho_1^3}$
Suivant la binormale (perp. au plan osculateur).	$\frac{v^3}{\rho_1 r}$

Le théorème général montre que, pour toutes les trajectoires suivies, la somme des projections des deux dernières composantes sur la normale mN à la surface doit être constante, ce qui s'exprime par la relation

$$\left(\frac{3v}{\rho_1} \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho_1^2} \rho_2 \right) \cos \varphi + \frac{v^3}{\rho_1 r} \sin \varphi = \text{const.}$$

Mais, puisque la vitesse et l'accélération sont données, les quantités $\frac{dv}{dt}$, ainsi que l'angle φ et le rayon ρ_1 , sont les mêmes pour toutes les trajectoires que le point m peut suivre.

L'équation précédente revient donc à

$$\rho_2 - \frac{\rho_1^2 \tan \varphi}{r} = \text{const.}$$

D'ailleurs, si ω est le centre de la sphère osculatrice et R son rayon, on a, par une formule connue,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2}}{r} = \frac{n\omega \rho_1}{r};$$

donc

$$\frac{n\omega - \rho_1 \tan \varphi}{r} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{n\omega - nN}{r} = \text{const.},$$

ou enfin

$$\frac{N\omega}{r} = \text{const.},$$

résultat qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient différentes courbes osculatrices entre elles tracées sur

une même surface à partir d'un point m . Si l'on porte sur la binormale commune à toutes ces courbes une longueur mr égale au rayon de seconde courbure de la courbe choisie et si l'on joint le point ainsi obtenu au centre ω de la sphère osculatrice, la droite ωr rencontre la normale à la surface en un point i qui est le même quelle que soit la courbe choisie.

Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey;
par M. HALPHEN.

(Séance du 27 juin 1877.)

1. La suite de Farey est constituée par l'ensemble des fractions, réduites à leurs plus simples expressions, dont les dénominateurs ne dépassent pas un nombre donné. Ces fractions sont, en outre, rangées par ordre de grandeur.

Si, dans cette suite, on prend deux fractions distantes de deux rangs, et que l'on compose une nouvelle fraction ayant respectivement pour numérateur et pour dénominateur la somme des termes correspondants des proposées, cette nouvelle fraction est précisément égale à celle qui, dans la suite envisagée, est placée entre les deux proposées.

Ce théorème a été énoncé par Farey à la Société philomathique (*Bulletin des Sciences* pour 1816), et démontré peu après par Cauchy (*ibid.*) (1). Je me propose de l'étendre ici à d'autres suites analogues, et de démontrer notamment la proposition suivante :

THÉORÈME I. — Soit une suite de nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions, rangés par ordre de grandeur, et choisis suivant une loi telle que, si un nombre en est exclu, tous les nombres dont les deux termes sont au moins égaux respectivement aux termes de ce dernier en soient aussi exclus : cette suite jouit de la même propriété que celle de Farey.

(1) Le tome V du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1^{re} série) contient également un petit Mémoire de M. Stouvenel sur la suite de Farey.

On peut ajouter, ainsi que Cauchy l'a fait remarquer à l'égard de la suite de Farey : *Deux nombres consécutifs ont leurs dénominateurs premiers entre eux; la différence de ces deux nombres a pour numérateur l'unité.*

2. Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions. Le nombre $\frac{a+a'}{b+b'}$ est compris entre les deux précédents. Pour abréger, j'appellerai ce troisième nombre la *moyenne* des premiers. Étant donnée une suite de n nombres, si l'on y intercale la moyenne entre chaque couple de nombres consécutifs, on forme une nouvelle suite de $(2n-1)$ nombres. Substituer cette nouvelle suite à la précédente sera dit *interpoler* la suite proposée.

LEMME I. — *En interpolant la suite $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, et successivement celles qui s'en déduisent, on reproduit tous les nombres commensurables positifs, chacun une seule fois, et réduit à sa plus simple expression ⁽¹⁾.*

1° Chacun des nombres que l'on produit n'apparaît qu'une seule fois. En effet, les nombres apparaissent toujours rangés par ordre de grandeur dans une quelconque des suites successives.

2° Soit $\frac{a}{b}$ un nombre commensurable, réduit à sa plus simple expression. Je vais chercher sa place dans les suites considérées. Le nombre $\frac{a}{b}$ s'obtient par l'addition des termes de $\frac{0}{1}$, pris b fois avec les termes correspondants de $\frac{1}{0}$, pris a fois. Pour fixer les idées, je suppose $a > b$. Je puis alors remplacer cette addition par celle des termes de $\frac{1}{0}$, pris $(a-b)$ fois, avec ceux de la moyenne $\frac{1}{1}$ de $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$, ces derniers pris b fois. Soit encore $a-b > b$, on

(¹) Cette proposition a été aperçue, bien que non énoncée ni prouvée, par l'auteur d'un intéressant opuscule intitulé : *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode* par Achille Brocot, horloger. (Paris, 1862.)

peut remplacer cette addition par celle des termes de $\frac{1}{0}$, pris $(a - 2b)$ fois, avec les termes de la moyenne de $\frac{1}{1}$ et de $\frac{1}{0}$, ces derniers pris b fois, et ainsi de suite. De la sorte, si m est l'entier contenu dans $\frac{a}{b}$, je forme m fois de suite la moyenne entre $\frac{1}{0}$ et le nombre le plus voisin précédemment obtenu; et je remplace l'opération par l'addition des termes de $\frac{1}{0}$, pris b fois, avec ceux de la dernière moyenne $A \left(A = \frac{m}{1} \right)$, pris $a - mb = a'$ fois.

J'intercale une nouvelle moyenne A' entre $\frac{1}{0}$ et A , et je remplace l'opération par l'addition des termes de A , pris $(b - a')$ fois, avec ceux de A' , pris a' fois. La suite des opérations est manifeste, et l'on voit que le nombre $\frac{a}{b}$ apparait, réduit à sa plus simple expression, après des interpolations dont le nombre est égal à la somme des quotients incomplets de la fraction continue égale à $\frac{a}{b}$.

3. LEMME II. — Si deux nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions, ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et que leur différence ait pour numérateur l'unité, les mêmes choses ont lieu à l'égard d'un quelconque de ces deux nombres et de leur moyenne.

LEMME III. — Si l'on a

$$a''b - b''a = 1, \quad a'b'' - b'a'' = 1,$$

le nombre $\frac{a''}{b''}$ est la moyenne de $\frac{a}{b}$ et de $\frac{a'}{b'}$.

Sans m'arrêter à démontrer ces deux dernières propositions, j'en tire cette conséquence :

THÉOREME II. — Si l'on interpole un nombre quelconque de fois la suite $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, deux nombres consécutifs quelconques de la suite obtenue ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et leur différence a pour numérateur l'unité.

Si, en effet, on admet cette proposition pour la suite obtenue après n interpolations, il résulte du lemme II qu'elle a encore lieu après $(n + 1)$ interpolations. Or elle a lieu pour la suite originelle $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$. Donc elle est prouvée.

COROLLAIRE.— *Dans la suite obtenue après un nombre quelconque d'interpolations opérées sur $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, chaque nombre est la moyenne de celui qui le précède et de celui qui le suit.*

Ce corollaire découle du théorème II au moyen du lemme III.

4. Appelons, pour abrégé, $n^{\text{ième}}$ suite complète celle qui se déduit de $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ par n interpolations. Je considère une suite S assujettie à cette seule condition que deux nombres consécutifs quelconques de S soient consécutifs également dans une suite complète. D'après cette définition et en vertu du théorème II, deux nombres consécutifs quelconques de S ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et leur différence a pour numérateur l'unité; par conséquent, en vertu du lemme III, si les nombres y sont rangés par ordre de grandeur, chaque nombre est la moyenne de celui qui le précède et de celui qui le suit: donc, pour prouver le théorème I, il me suffira de prouver que la suite dont il est question dans l'énoncé de ce théorème est une suite telle que S .

Soit S' la suite envisagée. Les suites complètes reproduisant tous les nombres, on formera S' en faisant des exclusions dans les suites complètes. Soient A, A' deux nombres consécutifs de la $n^{\text{ième}}$ suite complète, et qui existent dans S' . Je dis que, s'ils ne sont pas consécutifs dans S' , leur moyenne existe dans S' . Si, en effet, la moyenne A'' de A et de A' est exclue de S' , il en est de même de tous les nombres que l'on obtient par interpolation entre A et A' ; car ces nombres ont leurs termes respectivement supérieurs à ceux de A'' et sont dès lors exclus en vertu de la définition de S' (théorème I). Mais les nombres obtenus par interpolations successives entre A et A' reproduisent tous les nombres commensurables compris entre ces deux limites (lemme I). Donc A et A' sont consécutifs dans S' , à moins que leur moyenne A'' ne soit aussi

comprise dans la suite. Donc, *dans une suite satisfaisant à la condition énoncée au théorème I, deux nombres consécutifs quelconques sont aussi consécutifs dans une suite complète.*

Le théorème I est par là démontré.

5. La suite de Farey nous fournit l'exemple le plus simple. On peut aussi astreindre les numérateurs à ne pas dépasser une certaine limite; mais cet exemple ne diffère pas au fond du précédent. Soit, en général, $f(a, b)$ un polynôme entier à coefficients positifs. Si l'on astreint $f(a, b)$ à ne pas dépasser une limite assignée, les nombres $\frac{a}{b}$ forment une suite qui vérifie le théorème I.

Les suites complètes sont dans le même cas. D'après l'analyse du n° 2, on peut les définir comme il suit : *La suite complète de rang n est composée par l'ensemble des nombres commensurables dont chacun est égal à une fraction continue où la somme des quotients incomplets n'excède pas le nombre n .*

Les termes de rang pair, dans la $n^{\text{ième}}$ suite complète, donnent lieu à des fractions continues où les sommes des quotients incomplets sont toutes égales à n . On obtient par là toutes les décompositions du nombre n en une somme d'entiers positifs, et l'on en peut déduire que *le nombre des partitions de n en une somme d'entiers positifs est égal à 2^{n-1} , si l'on tient compte de l'ordre des parties.*

En effet, 2^{n-1} est le nombre des termes de rang pair de la suite. Une même partition est fournie deux fois; mais, d'autre part, à une fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta + \dots + \frac{1}{\lambda}}$$

correspondent deux partitions, savoir :

$$\begin{aligned} n &= \alpha + \beta + \dots + \lambda, \\ n &= \alpha + \beta + \dots + (\lambda - 1) + 1. \end{aligned}$$

Le nombre total des partitions est donc bien 2^{n-1} .

Soit, par exemple, $n = 5$: en ne prenant dans la suite que les fractions plus petites que l'unité, on a, pour celles de rang pair, les

suivantes :

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5},$$

qui fournissent les 16 partitions du nombre 5.

6. Les propriétés de la suite de Farey appartiennent encore à des suites qui échappent à la définition donnée dans l'énoncé du théorème I, et qu'il me paraît difficile de définir d'une manière générale. Je me contente d'un exemple : la suite des nombres dans chacun desquels la différence entre le dénominateur et le numérateur n'excède pas une limite donnée. C'est ce qu'il sera aisé de démontrer.

En dernier lieu, je signalerai une curieuse conséquence de l'analyse ci-dessus : *Si l'on interpole continuellement la suite 1, 1, chaque nombre p apparaît autant de fois qu'il y a de nombres premiers à p et inférieurs à lui.*

En effet, on engendre ainsi les dénominateurs de toutes les fractions comprises entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.

Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires ; par M. Camille JORDAN.

(Séance du 27 juin 1877.)

Soient n un nombre premier impair ; θ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ; $x_0, \dots, x_{n-1}$ des variables distinctes. Les substitutions

$$\theta = | x_p \ \theta x_p |, \quad A = | x_p \ \theta^p x_p |, \quad B = | x_p \ x_{p+1} |$$

ont pour déterminant 1, et, combinées ensemble, fourniront un groupe G d'ordre p^3 dont les substitutions ont pour forme générale

$$\theta^i A^a B^b = | x_p \ \theta^{ap+i} x_{p+b} |.$$

Cherchons à construire le groupe H formé par les substitutions de déterminant 1 qui sont permutables à G .

Ce groupe contient, outre les substitutions θ , A, B, la suivante :

$$C = \begin{vmatrix} x_p & \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_p \end{vmatrix},$$

laquelle transforme θ , A, B en θ , A, AB ; et la substitution

$$D = \begin{vmatrix} x_p & a \sum \theta^{pm} x_m \end{vmatrix},$$

qui les transforme en θ , B, A^{-1} (le coefficient a étant choisi de telle sorte que D ait pour déterminant 1).

Il est aisé de voir que H est dérivé des seules substitutions θ , A, B, C, D, et a pour ordre $(n^2 - 1)n^4$.

En effet, soit s une substitution de H. Elle devra transformer A en une substitution de la forme $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$, où ρ , α , β peuvent varier de zéro à $p - 1$. D'ailleurs α et β ne peuvent s'annuler à la fois ; car une substitution de la forme θ^ρ , étant échangeable à toute substitution linéaire, ne pourrait être la transformée de A.

D'autre part, on vérifie immédiatement qu'en combinant les substitutions A, B, C, D on peut obtenir une substitution S' qui transforme A en $\theta^\rho A^\alpha B^\beta$, quels que soient ρ , α et β , pourvu qu'on n'ait pas à la fois $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Le nombre des transformées distinctes de A par les substitutions de H sera donc $(n^2 - 1)n$; et l'on aura $S = TS'$, T étant une nouvelle substitution de H, échangeable à A.

Cette substitution T transformera θ , A, B en θ , A, $\theta^\sigma A^\gamma B^\delta$. On a d'ailleurs l'équation

$$AB = \theta BA,$$

laquelle deviendra, après la transformation,

$$A \theta^\sigma A^\gamma B^\delta = \theta . \theta^\sigma A^\gamma B^\delta . A = \theta^{1-\delta} A \theta^\sigma A^\gamma B^\delta ;$$

donc $\delta = 1$.

Or on déduit immédiatement de la combinaison de B et de C une substitution T' qui transforme θ , A, B en θ , A, $\theta^\sigma A^\gamma B$, quels que soient σ et γ ; donc le nombre des transformées distinctes de B par les substitutions de l'espèce T sera n^2 , et l'on aura $T = UT'$, U étant une nouvelle substitution de H, échangeable à θ , A, B, laquelle ne pourra évidemment être qu'une des n puissances de θ .

Donc l'ordre de H sera bien égal à $(n^2 - 1)n . n^2 n$, et ses sub-

stitutions, étant de la forme $UT'S'$, seront dérivées de θ, A, B, C, D .

Si n était égal à 2, au lieu d'être premier impair, les substitutions A, B, C auraient pour déterminant -1 ; mais, en multipliant leurs coefficients par i , on obtiendrait des substitutions de déterminant 1, auxquelles on pourrait appliquer les raisonnements précédents.

On peut étendre aisément ces résultats au cas où le nombre des variables ne serait plus n , mais une puissance de n . Supposons-le égal à p^2 , par exemple, et désignons les variables par x_{pq} , où p et q varient de zéro à $p-1$.

Nous considérerons le groupe G , d'ordre p^2 , dérivé des substitutions

$$\begin{aligned}\theta &= | x_{pq} \quad \theta x_{pq} |, \\ A &= | x_{pq} \quad \theta^p x_{pq} |, \quad A_1 = | x_{pq} \quad \theta^q x_{pq} |, \\ B &= | x_{pq} \quad x_{p+1,q} |, \quad B_1 = | x_{pq} \quad x_{p,q+1} |.\end{aligned}$$

Le groupe H , formé des substitutions de déterminant 1 permutable à G , sera dérivé des substitutions de G , jointes aux suivantes :

$$\begin{aligned}C &= | x_{pq} \quad \theta^{-\frac{p(p+1)}{2}} x_{pq} |, \quad C_1 = | x_{pq} \quad \theta^{-\frac{q(q+1)}{2}} x_{pq} |, \\ D &= | x_{pq} \quad \alpha \sum \theta^{pm} x_{mq} |, \quad D_1 = | x_{pq} \quad \alpha \sum \theta^{qm} x_{pm} |, \\ E &= | x_{pq} \quad x_{qp} |, \quad F = | x_{pq} \quad \theta^{pq} x_{pq} |,\end{aligned}$$

lesquelles transforment respectivement A, B, A_1, B_1 en A, AB, A_1, B_1 ; $A, B, A_1, A_1 B_1$; B, A^{-1}, A_1, B_1 ; A, B, B_1, A^{-1} ; A_1, B_1, A, B ; $A, A_1 B, A_1, AB_1$. Ces substitutions, combinées à celles de G , permettront : 1° de transformer A en l'une quelconque des $(n^2-1)n$ substitutions de la forme $\theta^\alpha A^\alpha B^\beta A^\gamma A^\delta$ (où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne sont pas nuls à la fois); 2° puis, sans altérer A , de transformer B en l'une quelconque des n^2 substitutions $\theta^\alpha A^\alpha B A^\gamma B$; 3° puis, sans altérer A ni B , de transformer A_1 en une quelconque des $(n^2-1)n$ substitutions de la forme $\theta^\alpha A^\alpha B^\beta$; 4° puis, sans altérer A, B, A_1 , de transformer B_1 en l'une quelconque des n^2 substitutions $\theta^\alpha A^\alpha B_1$. Enfin les n puissances de θ laisseront A, B, A_1, B_1 invariables. L'ordre de H sera donc $(n^2-1)n \cdot n^2 \cdot (n^2-1)n \cdot n^2 \cdot n$.

Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens; par
M. ÉDOUARD LUCAS.

(Séance du 11 juillet 1877.)

Les développements des fractions en séries par la formule de Maclaurin donnent lieu à un très-grand nombre de formules pour le développement des irrationnelles du second degré, et des fonctions symétriques des racines des équations du second degré à coefficients commensurables. Nous montrerons ultérieurement l'importance de ces développements, dans leur application à la théorie des nombres premiers.

1. Désignons par a et b les deux racines de l'équation

$$(1) \quad x^2 = Px - Q,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et premiers entre eux; nous ne considérerons que le cas des racines réelles. Soient, de plus, les *fonctions numériques simplement périodiques*,

$$(2) \quad U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n;$$

on a, en désignant par $\sqrt{\Delta}$ la différence des racines de l'équation (1),

$$(3) \quad \begin{cases} V_n = 2Q^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ U_n = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} Q^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ \frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \tan\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right). \end{cases}$$

Ces relations indiquent l'identité des fonctions U_n et V_n avec les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. On a ainsi les formules de récurrence

$$(4) \quad \begin{cases} U_{n+1} = PU_{n+1} - QU_n, \\ V_{n+1} = PV_{n+1} - QV_n, \end{cases}$$

qui correspondent exactement à celles de Thomas Simpson :

$$\begin{aligned}\sin(n+2)z &= 2 \cos z \sin(n+1)z - \sin nz, \\ \cos(n+2)z &= 2 \cos z \cos(n+1)z - \cos nz.\end{aligned}$$

On a de même

$$(5) \quad \begin{cases} 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m, \\ 2V_{m+n} = V_m V_n - \Delta U_m V_n; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux *formules d'addition* qui donnent $\sin(y+z)$ et $\cos(y+z)$; on a aussi

$$(6) \quad \begin{cases} V_n^2 - \Delta U_n^2 = 4Q^n, \\ U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = +Q^{n-1}, \\ V_n^2 - V_{n-1}V_{n+1} = -Q^{n-1}\Delta; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux formules

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\ \sin^2 x - \sin(x-y)\sin(x+y) &= \sin^2 y, \\ \cos^2 x - \cos(x-y)\cos(x+y) &= \sin^2 y.\end{aligned}$$

2. La première des formules (6) conduit, par la théorie de la division des fonctions numériques, à la résolution de l'équation de Pell. On a encore

$$(7) \quad \begin{cases} U_{n+r}^2 - Q^r U_n^2 = U_r U_{2n+r}, \\ V_{n+r}^2 - Q^r V_n^2 = \Delta U_r U_{2n+r}; \end{cases}$$

la première des formules (7) a été appliquée par M. Günther, pour $r=1$, à la résolution de l'équation indéterminée

$$y^2 - Qx^2 = hz,$$

en nombres entiers ⁽¹⁾; il serait facile de généraliser ces considérations.

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Resal, pages 331-341, octobre 1876.

Les deux formules (7) donnent immédiatement

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{U_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{U_{2r}}{U_r} - U_r^2 \left[\frac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r} U_{3r}} + \dots + \frac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r} U_{nr}} \right], \\ \frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{V_r}{V_0} - \Delta U_r^2 \left[\frac{Q^r}{V_0 V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \dots + \frac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r} V_{nr}} \right]; \end{cases}$$

et les deux relations

$$(9) \quad \begin{cases} U_{(n+r)} V_n - U_n V_{n+r} = 2 Q^n U_r, \\ V_{(n+r)} V_n - \Delta U_n U_{n+r} = 2 Q^n V_r \end{cases}$$

donnent ainsi

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{U_{n+kr}}{V_{n+kr}} = \frac{U_n}{V_n} + 2 Q^n U_r \left[\frac{1}{V_r V_{n+r}} + \frac{Q^r}{V_{n+r} V_{n+2r}} + \dots + \frac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+k-1r} V_{n+kr}} \right], \\ \frac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \frac{V_n}{U_n} - 2 Q^n U_r \left[\frac{1}{U_r U_{n+r}} + \frac{Q^r}{U_{n+r} U_{n+2r}} + \dots + \frac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+k-1r} U_{n+kr}} \right]. \end{cases}$$

Lorsque n augmente indéfiniment dans les égalités (8), le second membre a pour limite la plus grande α des racines de l'équation (1); et, lorsque k augmente indéfiniment, les seconds membres des égalités (10) ont pour limites $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt{\Delta}$. On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateurs l'unité : c'était un usage familier aux savants de la Grèce et de l'Égypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \epsilon,$$

rapportée par Columelle au Chapitre V de son Ouvrage *de Rusticâ*; ainsi encore cette valeur approximative

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{12.34} + \epsilon,$$

donnée par les auteurs indiens ⁽¹⁾; cette valeur est égale au quotient $\frac{V_0}{U_1}$, en supposant, dans l'équation (1), que $P = 2$ et $Q = -1$.

(¹) M. CANTOR, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*; Milano, 1877.

3. Les formules qui donnent la somme des sinus ou des cosinus d'arcs en progression arithmétique deviennent

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & U_m + Q^{-\frac{r}{2}} U_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} U_{m+2r} + \dots + Q^{-\frac{nr}{2}} U_{m+nr} \\ & \quad = U_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_r Q^{\frac{nr}{2}}}, \\ & V_m + Q^{-\frac{r}{2}} V_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} V_{m+2r} + \dots + Q^{-\frac{nr}{2}} V_{m+nr} \\ & \quad = V_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_r Q^{\frac{nr}{2}}}; \end{aligned} \right.$$

mais on a les formules plus simples

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} U_r + U_{2r} + \dots + U_{nr} &= \frac{U_r + Q^n U_{nr} - U_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}, \\ V_r + V_{2r} + \dots + V_{nr} &= \frac{V_r + Q^n V_{nr} - V_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans la relation

$$\Delta U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} = V_{r+s+2k(\rho+\sigma)} - Q^{r+2k\sigma} V_{r-s+2k(\rho-\sigma)},$$

nous supposons successivement k égal à 0, 1, 2, ..., n , nous obtenons par addition

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} &= \frac{U_{r+2n\rho} U_{s+(2n+1)\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r+(2n+1)\rho} U_{s+2n\sigma}}{\Delta Q^{n(\rho+\sigma)} U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}} \\ &+ \frac{U_r U_{s-2\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r-\rho} U_s}{\Delta U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}}, \end{aligned} \right.$$

et nous trouverions de même les sommations

$$(14) \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{U_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}}.$$

On a, en particulier,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U_r^2}{Q^r} + \frac{U_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{U_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{U_{(n+1)r}^2}{Q^{(n+1)r}} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{U_{(2n+3)r}}{U_r Q^{(n+1)r}} - 2n - 3 \right], \\ \frac{U_r^2}{Q^r} + \frac{U_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{U_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{U_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{U_{4(n+1)r}}{U_{2r} Q^{(2n+1)r}} - 2n - 2 \right], \\ \frac{V_r^2}{Q^r} + \frac{V_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{V_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{V_{nr}^2}{Q^{nr}} &= 2n - 1 + \frac{U_{(2n+1)r}}{U_r Q^{nr}}, \\ \frac{V_r^2}{Q^r} + \frac{V_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{V_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{V_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}} &= 2n + 2 + \frac{U_{4(n+1)r}}{U_r Q^{(2n+1)r}}. \end{aligned} \right.$$

On obtient encore

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} U_{m+kr}^2 &= \frac{V_{2m+2(n+1)r} - V_{2m} - Q^{2r} (V_{2m+2nr} - V_{2m-2r})}{\Delta (V_{2r} - Q^{2r} - 1)} \\ &\quad - 2Q^n \frac{Q^{(n+1)r} - 1}{\Delta (Q^r - 1)}, \\ \sum_{k=0}^{k=n} V_{m+kr}^2 &= \frac{V_{2m+2(n+1)r} - V_{2m} - Q^{2r} (V_{2m+2nr} - V_{2m-2r})}{\Delta (V_{2r} - Q^{2r} - 1)} \\ &\quad + 2Q^n \frac{Q^{(n+1)r} - 1}{Q^r - 1}; \end{aligned} \right.$$

en particulier, pour $P = 1$, $Q = -1$ dans l'équation (1),

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 = U_n U_{n+1},$$

et, par la première des formules (10),

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &= 1 + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2 + 1^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2} \\ &\quad - \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2} - \dots \end{aligned}$$

4. Pour la *multiplication des fonctions numériques*, on a d'abord

$$(17) \quad U_{2n} = U_n V_n, \quad 2V_{2n} = V_n^2 - \Delta U_n^2,$$

et, à cause de la première des relations (6),

$$(18) \quad V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n.$$

On a ensuite les formules

$$(19) \quad \begin{cases} U_{3n} = \Delta U_n^3 + 3Q^n U_n, \\ U_{5n} = \Delta^2 U_n^5 + 5Q^n \Delta U_n^3 + 5Q^{2n} U_n, \\ U_{7n} = \Delta^3 U_n^7 + 7Q^n \Delta^2 U_n^5 + 14Q^{2n} \Delta U_n^3 + 7Q^{3n} U_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

et aussi

$$(20) \quad \begin{cases} V_{3n} = V_n^3 - 3Q^n V_n, \\ V_{4n} = V_n^4 - 4Q^n V_n^2 + 2Q^{2n}, \\ V_{5n} = V_n^5 - 5Q^n V_n^3 + 5Q^{2n} V_n, \\ V_{6n} = V_n^6 - 6Q^n V_n^4 + 9Q^{2n} V_n^2 - 2Q^{3n} V_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

qui correspondent à des développements bien connus; on en déduit inversement

$$(21) \quad \begin{cases} V_n = \sqrt{2Q^n + V_{2n}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + V_{4n}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{2Q^{4n} + V_{8n}}}}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces formules sont analogues à celles qui donnent $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{16}$, ...; on trouvera de même des formules semblables à celles qui donnent les expressions de $\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^r}$, $\cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^r}$, $\cos \frac{\pi}{15 \cdot 2^r}$, etc.

On peut exprimer les puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les rangs sont des multiples de n , par des formules analogues à celles qui donnent les puissances de $\sin z$ et de $\cos z$ développées suivant les sinus et les cosinus des multiples

de l'arc z . On a ainsi

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta U_n^2 = V_{2n} - 2Q^n, \\ \Delta^2 U_n^2 = V_{4n} - 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}, \\ \Delta^3 U_n^2 = V_{6n} - 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} - 20Q^{3n}, \\ \Delta^4 U_n^2 = V_{8n} - 8Q^n V_{6n} + 28Q^{2n} V_{4n} - 56Q^{3n} V_{2n} + 70Q^{4n}, \\ \dots\dots\dots; \\ \Delta U_n^3 = U_{3n} - 3Q^n U_n, \\ \Delta^2 U_n^3 = U_{6n} - 5Q^n U_{3n} + 10Q^{2n} U_n, \\ \Delta^3 U_n^3 = U_{9n} - 7Q^n U_{6n} + 21Q^{2n} U_{3n} - 35Q^{3n} U_n, \\ \Delta^4 U_n^3 = U_{12n} - 9Q^n U_{9n} + 36Q^{2n} U_{6n} - 84Q^{3n} U_{3n} + 126Q^{4n} U_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} V_n^2 = V_{2n} + 2Q^n, \\ V_n^3 = V_{3n} + 3Q^n V_n, \\ V_n^4 = V_{4n} + 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}, \\ V_n^5 = V_{5n} + 5Q^n V_{3n} + 10Q^{2n} V_n, \\ V_n^6 = V_{6n} + 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} + 20Q^{3n}, \\ V_n^7 = V_{7n} + 7Q^n V_{5n} + 21Q^{2n} V_{3n} + 35Q^{3n} V_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

5. En désignant par p et n deux nombres quelconques, on a l'identité

$$\frac{z - z^{p^n}}{(1 - z)(1 - z^{p^n})} + \frac{z^{p^n} - z^{p^{n+1}}}{(1 - z)(1 - z^{p^{n+1}})} = \frac{z - z^{p^{n+1}}}{(1 - z)(1 - z^{p^{n+1}})};$$

si l'on fait successivement n égal à 1, 2, 3, ..., n , on obtient en faisant l'addition, et en posant $z = \frac{b^r}{a^r}$,

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{Q^r U_{(p-1)r}}{U_r U_{pr}} + \frac{Q^{p^r} U_{(p-1)r}}{U_{pr} U_{p^2 r}} + \frac{Q^{p^{2r}} U_{(p-1)r}}{U_{p^2 r} U_{p^3 r}} + \dots \\ & + \frac{Q^{p^{nr}} U_{(p-1)r}}{U_{p^n r} U_{p^{n+1} r}} = \frac{Q^r U_{(p^{n+1}-1)r}}{U_r U_{p^{n+1} r}}. \end{aligned} \right.$$

On calcule les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions au moyen des formules de multiplication; lorsque n augmente indéfiniment, le second membre de la formule précédente a pour

limite l'expression $\frac{b^r}{U_r}$, et l'on a, par exemple,

$$(25) \quad \frac{b^r}{U_r} = \frac{Q^r}{U_{1r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r}} + \frac{Q^{3r}}{U_{3r}} + \frac{Q^{4r}}{U_{4r}} + \dots$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= -\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207} + \dots, \\ \frac{1 - \sqrt{2}}{2} &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2^3 \cdot 3} + \frac{5}{2^3 \cdot 3 \cdot 17} + \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 577} + \dots; \end{aligned}$$

il est aisé de généraliser la formule (24) qui donne des développements très-rapidement convergents. Cette formule revient au calcul des réduites d'une fraction continue périodique dont les rangs sont en progression géométrique. C'est, en quelque sorte, la *combinaison du calcul logarithmique et du calcul par les fractions continues*. Ainsi le dénominateur de la trentième fraction du développement de $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ a environ *cent millions* de chiffres.

Les formules de duplication

$$U_n V_n = U_{2n} \quad \text{et} \quad \Delta U_n^2 + V_n^2 = 2 V_{2n}$$

donnent

$$\frac{\Delta U_n}{V_n} = \frac{V_n}{U_n} + 2 \frac{V_{2n}}{U_{2n}};$$

en changeant successivement n en $2n, 4n, 8n, \dots$ et ajoutant, on obtient

$$(26) \quad \Delta \left(\frac{U_n}{V_n} + 2 \frac{U_{2n}}{V_{2n}} + \dots + 2^p \frac{U_{2^p n}}{V_{2^p n}} \right) = 2^{p+1} \frac{V_{2^{p+1}n}}{U_{2^{p+1}n}} - \frac{V_n}{U_n},$$

et, en divisant par 2^p et faisant croître p indéfiniment,

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\frac{U_n}{V_n} + 2 \frac{U_{2n}}{V_{2n}} + 2^2 \frac{U_{4n}}{V_{4n}} + 2^3 \frac{U_{8n}}{V_{8n}} + \dots}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots};$$

cette formule correspond à la formule connue

$$\frac{1}{x} - 2 \cot x = \tan x + \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} + \dots$$

6. Soit $F(x)$ une fonction développable en série convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est inférieur à l'unité ; par exemple,

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots ;$$

on aura, par conséquent, en supposant z positif,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{z}{1+z}\right) &= A_0 + A_1 \frac{z}{1+z} + A_2 \frac{z^2}{(1+z)^2} + \dots + A_n \frac{z^n}{(1+z)^n} + \dots \\ F\left(\frac{1}{1+z}\right) &= A_0 + A_1 \frac{1}{1+z} + A_2 \frac{1}{(1+z)^2} + \dots + A_n \frac{1}{(1+z)^n} + \dots ; \end{aligned}$$

donc, par addition et soustraction, en faisant $z = \frac{br}{a'}$ (avec la condition de r pair, lorsque les racines a et b sont de signes contraires),

$$(28) \quad \begin{cases} F\left(\frac{a'}{V_r}\right) + F\left(\frac{Q'}{V_r}\right) = 2A_0 + A_1 \frac{V_r}{V_r} + A_2 \frac{V_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots, \\ F\left(\frac{a'}{V_r}\right) - F\left(\frac{Q'}{V_r}\right) = \sqrt{\Delta} \left(A_1 \frac{U_r}{V_r} A_2 + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \dots \right). \end{cases}$$

Si l'on suppose $z = -\frac{br}{a'}$, on obtient deux développements analogues aux précédents ; mais, bien que ces développements soient beaucoup moins rapidement convergents que ceux du n° 5, leur étude paraît plus importante au point de vue de l'*Arithmétique supérieure*, dans les recherches concernant les lois de la dissémination des nombres premiers dans les séries à termes commensurables.

Le développement du binôme $(1-x)^m$ donne ainsi, pour m quelconques, les développements

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{V_{mr}}{V_r^m} = V_0 - \frac{m}{1} \frac{V_r}{V_r} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{V_{2r}}{V_r^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots, \\ \frac{U_{mr}}{V_r^m} = \frac{m}{1} \frac{U_r}{V_r} - \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \dots, \end{cases}$$

que l'on peut déduire directement de la formule de Bernoulli ;

pour $m = -1$, on a

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{V_r^2}{Q^r} = V_r + \frac{V_r}{V_r} + \frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots \\ \frac{U_{2r}}{Q^r} = \frac{U_r}{V_r} + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \frac{U_{4r}}{V_r^4} + \dots; \end{cases}$$

par exemple, pour $P = 1$ et $Q = -1$,

$$\begin{aligned} 9 &= 2 + \frac{3}{3} + \frac{7}{9} + \frac{18}{27} + \frac{47}{81} + \dots \\ 3 &= \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{8}{27} + \frac{21}{81} + \frac{55}{243} + \dots; \end{aligned}$$

les numérateurs de ces deux séries de fractions sont donnés par la relation de récurrence

$$N_{n+1} = 3N_{n+1} - N_n.$$

On obtiendra des formules analogues en supposant $m = \pm \frac{1}{2}$; le développement de $(1+x)^m \pm (1-x)^m$ donne aussi d'autres formules.

Le développement de $\log(1-x)$ donne les formules

$$(31) \quad \begin{cases} \log \frac{V_r^2}{Q^r} = \frac{V_r}{V_r} + \frac{1}{2} \frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3} \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{4} \frac{V_{4r}}{V_r^4} + \dots, \\ \log \frac{b_{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta} \left(\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{2} \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3} \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{4} \frac{U_{4r}}{V_r^4} + \dots \right); \end{cases}$$

et celui de $\log \frac{1-x}{1+x}$ donne

$$(32) \quad \log \frac{b_{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta} \left(\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{3} \frac{\Delta U_r^3}{V_r^3} + \frac{1}{5} \frac{\Delta^2 U_r^5}{V_r^5} + \frac{1}{7} \frac{\Delta^3 U_r^7}{V_r^7} + \dots \right).$$

La formule connue ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{z+h}{z-h} &= hz \left[\frac{1}{z^2-h^2} - \frac{2}{3} \frac{h^2}{(z^2-h^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{h^4}{(z^2-h^2)^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{h^6}{(z^2-h^2)^4} + \dots \right], \end{aligned}$$

(1) HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, p. 272.

dans laquelle on fait

$$z + h = a', \quad z - h = b', \quad z^2 - h^2 = Q^r, \quad h' = \frac{\Delta U_r^2}{4},$$

donne

$$(33) \quad \log \frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\sqrt{\Delta} U_r}{2} \left(\frac{1}{Q^r} - \frac{2}{3} \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^{2r}} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{4r}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{6r}} + \dots \right);$$

on suppose, pour la convergence, $\Delta U_r^2 \leq 4Q^r$; on a ainsi, à la limite de convergence,

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \right).$$

Les développements de $\arcsin z$ et de $(\arcsin z)^2$ donnent de même

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \frac{a^{2r}}{Q^r} &= \frac{\sqrt{\Delta} U_r}{Q^{\frac{r}{2}}} \left[1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \dots \right], \\ \frac{1}{4} \log^2 \frac{a^{2r}}{Q^r} &= \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} - \dots, \end{aligned} \right.$$

et à la limite de convergence

$$\log(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$\log^2(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \quad (1).$$

La formule remarquable de M. Scholtz (*) conduit au développement

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \log^2 \frac{a^{2r}}{Q^r} &= \frac{\Delta^{\frac{3}{2}} U_r^3}{Q^{\frac{3r}{2}}} \left\{ 1 - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} \right. \\ &\quad + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \dots \\ &\quad \left. \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(2n-1)^2} \right] \frac{\Delta^{n-1} U_r^{2n-2}}{2^{2n-2} Q^{(n-1)r}} + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

(*) LAISANT, *Essai sur les fonctions hyperboliques*. Paris, Gauthier-Villars, 1874; p. 26.

(*) J. BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, p. 424.

et à la limite de convergence

$$\log^3(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{3.3}{4.5} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{3.5.3}{4.6.7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2}\right) - \dots$$

7. Les quantités a^r et b^r sont les racines de l'équation

$$z^2 - zV_r + Q^r = 0;$$

si l'on développe l'une des racines par la formule de Lagrange, on a ainsi

$$(36) \quad \begin{cases} b^r = \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r^2} + \frac{4}{2} \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{5.6}{2.3} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \dots, \\ \log b^r = \log \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^r}{V_r^2} + \frac{3}{2} \frac{Q^{2r}}{V_r^3} + \frac{5.4}{2.3} \frac{Q^{3r}}{V_r^4} + \dots, \\ \frac{b^r}{3} = \frac{Q^{2r}}{2V_r^2} + \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{5}{2} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \frac{7.6}{2.3} \frac{Q^{5r}}{V_r^5} + \dots \end{cases}$$

L'équation précédente donne

$$b^r = \frac{V_r - \sqrt{V_r^2 - 4Q^r}}{2},$$

et par le développement du radical par la formule du binôme

$$(37) \quad b^r = \frac{1}{2} \frac{2Q^r}{V_r} + \frac{1}{2.4} \frac{2^2 Q^{2r}}{V_r^2} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{2^3 Q^{3r}}{V_r^3} + \dots;$$

en particulier à la limite de convergence

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \dots$$

On a encore

$$(38) \quad b^r = \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r^2} + \frac{4}{2} \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{6.5}{2.3} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \frac{8.7.6}{2.3.4} \frac{Q^{5r}}{V_r^5} + \dots$$

Si l'on applique la formule de Burmann au développement de z suivant les puissances de $\frac{2z}{1+z^2}$, on obtient pour tout module de z

paraboloïde des normales : elle constitue avec G la trace horizontale de ce paraboloïde.

Menons, à partir d'un point (a', a) de G , la normale à (G) ; soient $(a'm', am)$ les projections de cette droite. Elle appartient au paraboloïde. La génératrice de ce paraboloïde, qui passe par le point (m', m) de cette droite, étant parallèle au plan directeur de ce paraboloïde, qui n'est autre que le plan central de (G) , se projette horizontalement suivant mt . La trace horizontale de cette droite est au point t et par suite la trace horizontale du plan tangent en m au paraboloïde est la droite at .

Le plan central relatif à la génératrice $(am, a'm')$ du paraboloïde est le plan $(m'a'a)$. Nous avons donc pour la droite $(am, a'm')$ le plan central et le plan tangent en m au paraboloïde. Il est alors facile pour cette droite de déterminer le paramètre de distribution des plans tangents au paraboloïde.

Ce paramètre, que nous désignons par K_1 , est égal au segment $a'm'$ divisé par la tangente de l'angle que font entre eux le plan central $(m'a'a)$ et le plan tangent en m au paraboloïde. Pour déterminer cette tangente, menons par le point t un plan perpendiculaire à la droite $(a'm', am)$. Ce plan a pour traces $p'at$, il coupe le plan central $(m'a'a)$ suivant une droite projetée horizontalement suivant pq et le plan tangent en m au paraboloïde suivant la droite tp . L'angle compris entre ces deux droites est l'angle dont nous devons prendre la tangente. Cette tangente est égale à $\frac{\alpha p'}{pq}$.

Le paramètre K_1 est donc égal à

$$\frac{a'm'}{\frac{\alpha p'}{pq}} = \frac{ac}{\sin \theta \cos \theta},$$

en appelant θ l'angle que la normale am fait avec la normale ct .

Le paramètre de distribution des plans tangents à (G) pour G est

$$K = \frac{ac}{\tan \theta};$$

on a donc

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2 \theta}.$$

Telle est la valeur du paramètre de distribution des plans tangent au parabolôïde des normales pour une génératrice quelconque am .

On peut arriver plus rapidement à ce résultat de la manière suivante. On a

$$K = \frac{ac}{\tan \theta}.$$

En différentiant, il vient

$$\frac{K}{\cos^2 \theta} = \frac{d \cdot ac}{d\theta}.$$

$d \cdot ac$ est la plus courte distance entre am et la normale de (G) qui est infiniment voisine de am .

$d\theta$ est l'angle de ces deux normales.

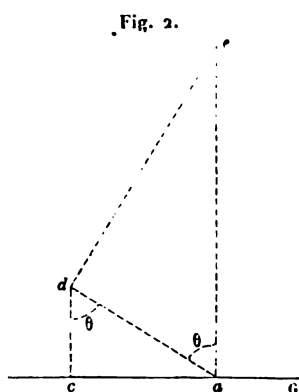
$\frac{d \cdot ac}{d\theta}$ est donc K_1 .

On a alors

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2 \theta}.$$

Lorsque θ est nul, c'est-à-dire lorsque l'on considère la droite ct , le paramètre relatif à cette droite est égal au paramètre relatif à (G) .

Construisons K_1 . Prenons (*fig. 2*) dans un plan quelconque mené



par G , à partir du point central c , sur la perpendiculaire à G , une longueur cd égale à K . En joignant le point d au point quelconque

a , on a l'angle cda qui est égal à l'angle θ que la normale à a à (G) fait avec la normale en c au plan central de cette surface.

Menons à partir de d la perpendiculaire de à da : on a

$$ae = \frac{da}{\cos \theta} = \frac{dc}{\cos^2 \theta} = \frac{K}{\cos^2 \theta};$$

ainsi

$$ac = K_1.$$

La construction que nous trouvons ainsi n'est autre que celle qui donne pour le point a le segment ae qui est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux de (G) en a . Nous trouvons donc, d'après cette remarque, que pour la génératrice am du paraboloides des normales, lequel est une normalie de (G), le paramètre de distribution des plans tangents est égal à la moyenne proportionnelle des rayons de courbure principaux de (G) pour le point a . Cette propriété, comme l'on sait, est vraie pour une surface quelconque, lorsque la normalie que l'on considère a pour directrice une ligne asymptotique de cette surface ⁽¹⁾ (voir *Mémoire sur les pincesaux de droite*, etc., Chap. XXXI).

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 13 JUIN 1877.

PRÉSIDENTE DE M. DARBOUX.

M. Cremona est élu membre de la Société.

Communications :

M. Halphen : *Sur un théorème d'Algèbre*.

M. Fouret : *Sur le nombre des normales communes à deux surfaces*.

(¹) Voici une conséquence de cette dernière propriété :

Le rayon de seconde courbure en un point d'une courbe gauche est égal à chacun des rayons de courbure principaux, pour le même point, de la surface formée par les normales principales de cette courbe.

SÉANCE DU 27 JUIN 1877,

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

Communications :

M. Jordan : *Sur une classe de groupes d'ordre fini, contenus dans les groupes linéaires.*

M. Halphen : *Sur un théorème d'Arithmétique concernant des suites analogues à celle de Farey.* M. Haton de la Goupillière ajoute quelques remarques.

M. Fouret : *Sur deux lois générales des courbes géométriques énoncées par M. Chasles.*

M. Ed. Lucas : *Sur la décomposition des nombres de la forme $2^{2^n} + 1$.*

M. le comte Hugo : *Traduction de deux lettres de Watt, relatives au parallélogramme.*

SÉANCE DU 11 JUILLET 1877,

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

Communications :

M. le comte Hugo : *Sur la courbe des variations de l'étoile du Cygne, et sur certaines anciennes sphères célestes.*

M. Haag : *Propriétés générales des surfaces déduites de la méthode des équipollences.*

M. Bjerknes : *Sur la théorie du mouvement des corps de formes constantes ou variables dans un fluide incompressible.*

M. Ed. Lucas : *Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré.*

SÉANCE DU 25 JUILLET 1877,

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

Communications :

M. le comte Hugo : *Sur l'Histoire et la Géométrie de la constellation d'Orion.*

M. Mannheim : 1° *Sur les courbes ayant mêmes normales principales*; 2° *Sur la relation entre les paramètres de distribution des paraboloides des normales d'une surface gauche pour deux de ses génératrices.*

M. Picquet : *Sur la détermination de la classe de l'enveloppe des axes des ellipses formées par la perspective de cercles de rayon constant et dont les centres parcourent une ligne droite.*

Rectification à l'extrait du procès-verbal de la séance du 21 mars 1877 (p. 75). Cette séance a eu lieu sous la présidence de M. Haton de la Goupillière.





LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ ⁽¹⁾

POUR L'ANNÉE 1876-1877.

ACHARD, rue de Saint-Petersbourg, 14, à Paris.
ALLÈGRET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
ANDRÉ (Désiré), rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
ANTOINE (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.
Aoust (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy, place Stanislas, 2.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, rue de Grenelle, 71, à Paris.
BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.
BERDELLE, ancien garde général, à Rioz.
BERTRAND (Joseph), membre de l'Institut, rue des Saints-Pères, 9, à Paris.
BEYNAC, professeur de Mathématiques, rue Jacob, 46, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, rue de Grammont, 25, à Paris.
BIENAYME (Alexis), major au 2^e régiment du Génie, à Montpellier (Hérault).
BIENAYME (Arthur), ingénieur de la Marine, à Toulon (Var).
BIENAYME, membre de l'Institut, rue de Fleury, n^o 1, à Paris.
BLEYNE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Lacuée, 28, à Paris.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à l'École Polytechnique, à Paris.
BOUCHER, directeur de l'École préparatoire d'Angers, rue des Bas-Chemins, 3.
BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne (Aude).
BOURGET, maître de conférences à l'École Normale, rue de Reims, 6, à Paris.
BRÉMAR, architecte, rue Saint-Lazare, 103, à Paris.
BRIOSCHI, professeur à l'Université de Pavie (Italie).
BRISSE (A.), ingénieur de dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue d'Enfer, 22, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Grenoble.
BRUNET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, rue Sainte-Placide, 60, à Paris.
CABART (Maurice), boulevard Saint-Michel, 183, à Paris.
CAHEN, lieutenant du Génie, à Versailles (Seine-et-Oise).
CATALAN, professeur à l'Université de Liège (Belgique).
CHARLON, directeur de la *Confiance*, rue de Grammont, 21, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, rue du Bac, 62 (passage Sainte-Marie, Paris).
CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
CLAYEUX, sous-intendant de 1^{re} classe, à Oran (Algérie).

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

CLAUDE-LAFONTAINE, 32, rue de Trévise, à Paris.
COCHIN (Denis), rue de Grenelle-Saint-Germain, 85, à Paris.
COLLET, professeur au lycée de Troyes (Aube).
COLLIGNON, ingénieur des Ponts et Chaussées, boulevard Saint-Germain, 70, à Paris.
COMBETTE, rue Bonaparte, 138, à Paris.
CORNU, professeur à l'École Polytechnique, rue d'Enfer, 22, à Paris.
COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
DARBOUX, maître de Conférences à l'École normale, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
DESQ, capitaine d'Artillerie, à Bourges.
DEWULF, commandant du Génie, à Porquerolles (Iles d'Hyères).
DOSTON, docteur ès sciences, boulevard Saint-Germain, 80, Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, quai de la Fontaine, à Nîmes.
FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
FONTES, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Condom (Gers).
FOURET, rue Billault, 16, à Paris.
GABRIEL, agrégé de la Faculté de Médecine, rue des Martyrs, 41, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Sidi-bel-Abbès (Oran).
GERONO, professeur, rue d'Enfer, 23, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à la Havane (Cuba).
GOFFART, professeur, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
GONZALES (Jozé), rue Monge, 63, à Paris.
GOURNERIE (de la), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
GRAINDORGE, docteur ès sciences, rue Hocheporte, 16, à Liège (Belgique).
GUILLOT, major au 122^e régiment d'Infanterie, à Montpellier (Hérault).
HAAC, répétiteur à l'École Polytechnique, 15, avenue Villars, à Paris.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Garancière, 8, à Paris.
HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HENRY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
HÉRAUD, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HERMARY, capitaine d'Artillerie, place Saint-Thomas-d'Aquin, 1, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
HILAIRE, rue des Carmes, 21, à Douai (Nord).
HIRST, directeur des études à l'École Navale de Greenwich.
HOUBIGAND, rue Lecourbe, 88, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue de la Victoire, 94, à Paris.
HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, cours d'Aquitaine, 7, à Bordeaux.
JANIN, capitaine au 13^e régiment d'Artillerie, à Vincennes (Seine).
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, avenue de Wagram, 24, à Paris.
JORDAN, professeur à l'École Polytechnique, rue de Rennes, 64, à Paris.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau.
JULLY, chef d'institution, cité Malesherbes, 8, à Paris.
JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan.
KÖHLER, répétiteur à l'École Polytechnique, quai Montebello, 13, à Paris.
LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
LAISANT, député, à Versailles.

- LAQUIÈRE, capitaine d'Artillerie, à Blidah (Algérie).
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LEFÈBRE DE FOURCY, rue de Tournon, 21, à Paris.
LEFFLER, professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
LEHR (Georges), élève de la Faculté des Sciences de Marseille.
LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille, boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté de Bordeaux.
LÉVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 242, à Paris.
LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa.
LINDEMANN, Privat docent à l'Université de Wurzburg (Bavière).
LUCAS, professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue d'Enfer, 77, à Paris.
MALLOUZEL, rue de la Vieille-Estrapade, 11, à Paris.
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy.
MARÉL, colonel d'État-major en retraite, à Hussein-Dey, près d'Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'école Monge, rue Blanche, 71, à Paris.
MARSILLY (le général de), à Auxerre.
MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.
MIGNON, capitaine au 6^e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (de), capitaine du génie, à Villeneuve-Saint-Georges (Seine).
MOREL, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Notre-Dame-des-Champs, 55, à Paris.
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue des Jubergeres, 39, à Sceaux (Seine).
NICOLAÏDES, professeur à l'Université d'Athènes.
OVIDIO (Enrico d'), via san Tournaso, à Turin.
PARMENTIER (le général), directeur supérieur du Génie des 9^e et 12^e corps, à Tours.
PARRAN, ingénieur des Mines, rue de la Victoire, 59, à Paris.
PERRIN, capitaine d'Artillerie, à la Rochelle.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de Seine, 68, à Paris.
PHILIPPON, secrétaire à la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (de), capitaine d'Artillerie, à la Fère.
PLOCQ, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
POLIGNAC (C. de), rue Kepler, 7, à Paris.
POUILLOT, agrégé de l'Université à l'École normale de Cluny (Saône-et-Loire).
PUISEUX, membre de l'Institut, à Paris.
PUTZ, lieutenant-colonel d'Artillerie, commandant le parc des équipages militaires, à Vernon (Eure).
RADAU, rue du Dragon, 13, à Paris.
RANCY (de), rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron de), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
RESAL, professeur à l'École Polytechnique, rue de Condé, 16, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire d'Arras.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, au Ministère des finances, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, rue Oberkampf, 151, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 62, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée de Douai.
ROUX, architecte, rue de Penthievre, 13, à Paris.
SAINTÉ-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, rue de Madame, 17, à Paris.

SAINT-GERMAIN (A. de), professeur à la Faculté des Sciences de Caen.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
SALTEL (Louis), professeur au collège de Châtellerault.
SANCERY, rue de l'Odéon, 3, à Paris.
SARNAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Magnan, 22, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHONDORFFER, élève ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCHUBERT, professeur, à Hambourg.
SIVRING (Jos.), ingénieur en chef des Travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
STEPHAN, directeur de l'Observatoire de Marseille.
STUDNICKÁ, à l'Université de Prague (Bohême).
TANNERY, ingénieur à la Manufacture des tabacs, à Bordeaux.
TARBOURIECH, professeur à Sainte-Barbe, à Paris.
TERRIER, professeur à l'Académie de Neuchâtel (Suisse).
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue d'Ulm, 38, à Paris.
TISSERAND, à l'Observatoire de Toulouse.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.
TURQUAN, docteur ès sciences, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, rue des Feuillantines, 59, à Paris.
VAZELLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 8, à Paris.
VINTÉJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée d'Alger.
WELSCH, lieutenant d'Artillerie, à Saint-Omer (Pas-de-Calais).
WETR (Dr Édouard), professeur à l'Université de Prague (Bohême).
WETR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague (Bohême).
WICKERSHEIM, ingénieur des Mines, à Paris.

TABLE DES MATIÈRES.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

	Pages.
Séance du 15 novembre 1876.....	71
Séance du 29 novembre 1876.....	71
Séance du 13 décembre 1876.....	72
Séance du 27 décembre 1876.....	72
Séance du 10 janvier 1877.....	73
Séance du 24 janvier 1877.....	73
Séance du 7 février 1877.....	73
Séance du 21 février 1877.....	74
Séance du 7 mars 1877.....	74
Séance du 21 mars 1877.....	75
Séance du 4 avril 1877.....	75
Séance du 18 avril 1877.....	128
Séance du 2 mai 1877.....	129
Séance du 16 mai 1877.....	129
Séance du 30 mai 1877.....	129
Séance du 13 juin 1877.....	193
Séance du 27 juin 1877.....	193
Séance du 11 juillet 1877.....	193
Séance du 25 juillet 1877.....	194

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les correspondances entre les points de deux courbes; par M. HALPHEN....	7
Sur l'enveloppe de la droite de Simpson; par M. H. BROCARD.....	18
Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique; par M. G. FOURET.....	19
Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre; par M. LAGUERRE....	24
Sur le lieu des points tels, que les tangentes menées de ces deux points à deux courbes planes soient égales entre elles; par M. LAGUERRE.....	25
Sur un problème d'Algèbre; par M. LAGUERRE.....	26
Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique; par M. LAGUERRE.....	30

	Pages.
Note sur la division mécanique de l'angle; par M. H. BROCARD.....	43
Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries; par M. PERRIN.....	47
Sur les substitutions linéaires; par M. DE POLIGNAC.....	69
Sur la partition des nombres; par M. LAGUERRE.....	76
Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles; par M. LAGUERRE.....	78
Sur quelques théorèmes de Joachimsthal; par M. LAGUERRE.....	92
Sur le développement en fraction continue de $e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$; par M. LAGUERRE..	95
Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution; par M. G. DARBOUX.....	100
Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires; par M. LINDEMANN.....	113
Note sur la théorie des développoides; par M. HATON DE LA GOUPIILLIERE.....	126
Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés; par M. G. FOURET.....	130
Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes; par M. HALPHEN.....	134
Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique; par M. ED. LUCAS.....	136
Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier; par M. C. FLYE SAINTE-MARIE.....	144
→ Sur un problème d'analyse combinatoire; par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.....	150
Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers; par M. HALPHEN.....	158
Sur une proposition d'Algèbre; par M. HALPHEN.....	160
Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre; par M. A. MANNHEIM.....	163
Théorème sur les surfaces; par M. HAAG.....	166
Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey; par M. HALPHEN.....	170
Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires; par M. CAMILLE JORDAN.....	174
Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens; par M. ÉDOUARD LUCAS.....	178
Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée; par M. A. MANNHEIM.....	190
Liste des Membres de la Société pour l'année 1876-1877.....	197

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME V.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMITÉ DE RÉDACTION.

MM. COLLIGNON.
FOURET.
HALPHEN.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
JORDAN.
MANNHEIM.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SIXIÈME. — ANNÉE 1877-78.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1878

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ANNÉE 1877.

Président.....	M. MANNHEIM.
Vice-Présidents	{ M. DARBOUX. M. HAÏON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LEMONNIER. M. ROUCHÉ.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. HALPHEN.
Vice-Secrétaires.....	{ M. PICQUET. M. DE POLIGNAC.
Membres du Conseil	{ M. ANDRÉ (Désiré). M. BIENAYMÉ. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. BRISSE. M. CHASLES. M. COLLIGNON. M. DE LA GOURNERIE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. PUISEUX. M. RESAL.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. Aoust (l'abbé). M. GLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème; par M. A. MANNHEIM.

Dans une Note publiée récemment ⁽¹⁾ sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre, j'ai donné le théorème suivant :

Lorsqu'une face d'un dièdre mobile a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête de ce dièdre, l'autre face a aussi pour caractéristique une perpendiculaire à cette arête.

Je me propose de donner une démonstration directe de ce théorème et d'en faire une nouvelle application.

Du centre o d'une sphère, menons des plans (A), (B) parallèlement aux faces du dièdre. Soit om le rayon de la sphère qui est parallèle à l'arête du dièdre. Les plans (A) et (B) coupent la sphère suivant deux grands cercles qui se rencontrent en m et qui comprennent entre eux un angle égal à l'angle ω du dièdre.

Après un déplacement infiniment petit du dièdre, effectuons les mêmes constructions. Nous aurons des plans (A'), (B') se coupant suivant le rayon om' et rencontrant la sphère suivant des grands

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 11 juin 1877.

cercles, comprenant aussi entre eux l'angle ω , puisque le dièdre mobile est de grandeur invariable.

On peut amener sur la sphère l'angle formé par les deux premiers grands cercles, dont le sommet est m , à coïncider avec l'angle dont le sommet est m' , au moyen d'une rotation infiniment petite autour d'un centre instantané c . Par suite, on peut amener les plans (A), (B) à coïncider avec les plans (A'), (B'), au moyen d'une rotation infiniment petite autour du rayon oc . Les caractéristiques de (A) et de (B) sont les projections de oc . Ces caractéristiques sont respectivement parallèles aux caractéristiques des faces du dièdre mobile; mais l'une de ces faces a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête du dièdre; le plan (A), parallèle à cette face, a alors pour caractéristique une perpendiculaire au rayon om . Le rayon oc , dont cette caractéristique est la projection, est alors dans un plan perpendiculaire à om , et la projection de oc sur le plan (B) est alors aussi perpendiculaire à ce rayon om . La face du dièdre correspondant à (B) a par suite pour caractéristique une perpendiculaire à l'arête du dièdre, et le théorème est démontré.

Appliquons ce théorème à la démonstration de cette propriété bien connue :

Lorsque les deux rayons de courbure d'une courbe gauche (α) sont proportionnels, cette courbe est une hélice tracée sur une surface cylindrique.

Considérons la courbe (α) comme tracée sur sa surface rectifiante; elle est une ligne géodésique de cette surface, et, puisque le rapport de ses rayons de courbure est constant, elle coupe sous le même angle toutes les génératrices de cette surface.

Appelons α un point de la courbe, G la droite rectifiante qui passe en ce point, et (G) la surface rectifiante de (α).

Menons par α le plan (A) normal à (α), et par G le plan (B) normal à (G). Ces plans comprennent entre eux un angle dièdre qui est le même quelle que soit la position de α sur (α), et dont l'arête est la normale en α à (G).

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que α vienne en α' sur (α), que G coïncide avec la génératrice de (G) qui passe en α' , et que ses faces restent normales l'une à (α), l'autre à (G).

Puisque (α) est une ligne géodésique de (G), son plan osculateur

est normal à cette surface, et par suite l'axe de courbure de (a) , c'est-à-dire la caractéristique de (A) , est perpendiculaire à l'arête du dièdre. Il résulte du théorème précédent que la caractéristique de (B) est aussi perpendiculaire à cette arête. Cette caractéristique est alors parallèle à G ; et, comme elle doit rencontrer cette droite au point où celle-ci touche son enveloppe, on voit que ce point est à l'infini. Les droites rectifiantes de (a) sont donc parallèles entre elles, et, d'après ce que nous avons dit précédemment, le théorème est démontré.

Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées; par M. A. МАННHEIM.

(Séance du 21 novembre 1877.)

Le théorème que je me propose de démontrer est le suivant, dû à M. O. Bonnet, et qu'il énonce ainsi ⁽¹⁾ :

Une ligne tracée sur une surface gauche, qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction.

Appelons (G) la surface réglée, G une génératrice, et a le point où cette droite est rencontrée par la ligne géodésique (a) . Menons en a et par la droite G le plan normal à (G) ; menons aussi en ce point le plan normal (A) à (a) . Ces deux plans forment un dièdre dont l'arête est la normale en a à (G) , et qui, par hypothèse, est de grandeur constante, quel que soit le point de la courbe (a) qu'on considère.

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que a reste toujours sur (a) et que ses faces soient toujours normales à (G) et à (a) . La caractéristique de la face (A) , étant perpendiculaire au plan osculateur de (a) , est perpendiculaire à l'arête du dièdre. Il en est alors de même pour la caractéristique de la face qui contient G . Cette caractéristique rencontre G à l'infini, et, comme ce point de ren-

⁽¹⁾ Voir *Journal de l'École Polytechnique*, XXXII^e Cahier, p. 71.

contre est le point où cette face du dièdre touche (G) , on voit qu'elle est tangente à (G) à l'infini. Le plan mené par G , et qui est perpendiculaire à cette face, est alors le plan central; comme ce plan touche (G) en a , ce point est le point central sur G . Le point a étant arbitraire sur (a) , tous les points de cette courbe jouissent de la même propriété, et (a) est alors la ligne de striction de (G) .

Le théorème est ainsi démontré.

Il est facile de construire une surface réglée sur laquelle on a une ligne géodésique rencontrant les génératrices sous des angles égaux.

Prenons pour cela une courbe arbitraire (a) , et par un quelconque de ses points menons le plan rectifiant. Dans ce plan et à partir de a , traçons une droite G faisant, avec la tangente at à (a) , un angle donné. En répétant cette construction pour tous les points de (a) , le lieu des droites G ainsi construites est la surface (G) demandée.

On peut dire que cette surface (G) est le lieu engendré par l'un des côtés G d'un angle mobile (G, at) de grandeur invariable, dont le plan est constamment perpendiculaire au plan osculateur d'une courbe donnée (a) et dont l'un des côtés at touche toujours cette courbe au sommet a de l'angle mobile.

En partant de cette génération, nous allons démontrer le théorème précédent, en faisant usage de cette propriété : Les plans centraux des surfaces engendrées par les côtés d'un angle mobile de grandeur invariable et le plan perpendiculaire au plan de cet angle, mené par la caractéristique de ce plan, sont parallèles à l'axe du déplacement.

Pour la surface engendrée par la tangente at , le plan central se confond avec le plan de l'angle mobile. Ce plan coupe alors le plan normal au plan de cet angle mené par sa caractéristique suivant cette droite même. Le plan de cette caractéristique et du côté G qui, d'après le théorème que je viens d'énoncer, est le plan central de (G) , est donc le plan de l'angle lui-même, c'est-à-dire le plan qui touche (G) en a . Par suite a est le point central sur (G) , et (a) est la ligne de striction de cette surface.

On démontre aussi simplement ces deux théorèmes, dus aussi à M. O. Bonnet :

Si la ligne de striction coupe, sous un angle constant, les génératrices rectilignes d'une surface gauche, cette ligne de striction est une ligne géodésique de cette surface.

Si la ligne de striction d'une surface gauche est en même temps une ligne géodésique, elle coupe sous le même angle toutes les génératrices rectilignes de cette surface.

Théorème sur la Géométrie des Quinconces ;
par M. ÉDOUARD LUCAS.

(Séance du 7 novembre 1877.)

Les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.

En effet, on observera d'abord que, si l'on considère l'échiquier comme indéfini dans tous les sens, le centre d'une case, l'un de ses sommets, ou le milieu de l'un de ses côtés, est toujours un centre de symétrie. Cela posé, désignons par A, B, C les centres de trois cases, et supposons-les situés aux sommets d'un triangle équilatéral ; le milieu de la ligne BC est évidemment placé sur l'un des centres de symétrie de l'échiquier ; par conséquent, le point D, symétrique du point A par rapport à la droite BC, ou, ce qui revient au même, par rapport à son milieu, est aussi le centre d'une case. Dans le triangle isocèle ABD, on a d'ailleurs

$$\overline{AD}^2 = 3\overline{AB}^2 ;$$

mais, d'après la nature de l'échiquier, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2, \quad \overline{AD}^2 = c^2 + d^2,$$

a, b, c, d désignant des nombres entiers. On aurait donc

$$c^2 + d^2 = 3(a^2 + b^2),$$

et par suite le nombre 3 diviserait une somme de deux carrés, ce

qui est impossible, puisque ce nombre n'est pas lui-même une somme de deux carrés.

Il en résulte que le système des équations indéterminées

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

ou le système

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 2(ux + vy),$$

est impossible à résoudre en nombres entiers ou fractionnaires. Nous montrerons ultérieurement comment on peut, par la géométrie des quinconces, démontrer ces deux théorèmes d'Arithmétique :

1° Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés.

2° Tout diviseur d'une somme de deux carrés premiers entre eux est une somme de deux carrés.

Remarque. — Il est facile dans l'espace, pour un échiquier cubique formé de cubes égaux et juxtaposés, de trouver, et d'une infinité de manières, trois ou six cubes dont les centres soient disposés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, ou quatre cubes dont les centres soient disposés aux sommets d'un tétraèdre régulier.

Sur les singularités des courbes gauches algébriques :
par M. HALPHEN.

(Séance du 7 novembre 1877.)

Dans plusieurs Mémoires antérieurs ⁽¹⁾, j'ai traité un grand nombre de questions relatives au dénombrement des singularités des courbes planes algébriques. Pour la solution de ces questions, j'ai fait usage d'une méthode uniforme que j'ai exposée, réduite à sa plus simple expression, dans mon *Mémoire sur le contact des*

⁽¹⁾ *Recueil des Savants étrangers*, t. XXVI; *Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. II; *Bulletin de la Société mathématique*, *passim*.

courbes planes avec les coniques ⁽¹⁾. La même méthode peut être appliquée à la solution des questions analogues concernant les êtres géométriques définis par plusieurs fonctions simultanées d'une seule variable. C'est ainsi que j'ai pu traiter la théorie des caractéristiques des systèmes de coniques ⁽²⁾. Dans le Mémoire actuel, je m'occuperai, en suivant la même voie, des singularités des courbes gauches et des surfaces développables. Dans une autre occasion, j'étudierai les singularités des surfaces gauches.

Parmi les travaux antérieurs relatifs aux singularités des courbes gauches, je citerai un Mémoire de M. Cayley (*Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. X) et un Mémoire de M. Zeuthen (*Annali di Mathem.*, 2^e série, t. III).

§ I. — POINTS SINGULIERS DES COURBES GAUCHES.

1. Quelques mots d'abord pour rappeler la représentation analytique des points singuliers des courbes planes.

THÉORÈME I. — *Aux environs d'un point O situé sur une courbe algébrique plane, et pris pour origine des coordonnées rectilignes, toutes les positions d'un point mobile sur cette courbe sont définies par un ou plusieurs systèmes d'équations, tels que*

$$(1) \quad x = t^n, \quad y = f(t),$$

dans lequel n est un entier positif et f(t) un développement procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de t. Ces équations sont valables dans les limites de convergence de f(t).

Ce théorème, que je me contente de rappeler sans démonstration, peut être attribué à Newton. Il est, en effet, une conséquence immédiate du *parallélogramme*.

La portion de courbe représentée par les équations (1) a été désignée par M. Cayley sous le nom de *branche superlinéaire*. Des considérations algébriques, empruntées à M. Puiseux, m'ont

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 59.

(2) Ce Mémoire n'est pas encore publié. Il paraîtra dans le prochain Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

précédemment conduit à employer, pour le même objet, le nom de *système circulaire*. Pour plus de brièveté, j'emploierai ici le nom de *cycle*.

A chaque valeur de x répondent dans (1) n valeurs de t , et aussi, par suite, n valeurs de y , à moins que f ne contienne que des puissances entières de t^k , k étant un diviseur de n . S'il en est ainsi, en prenant t^k pour nouvelle variable au lieu de t , on fera disparaître cette restriction. Ainsi l'on peut supposer que, dans (1), à chaque valeur de x répondent n valeurs de y .

Quand t décroît jusqu'à zéro, le rapport de y à x tend vers une limite unique; donc le cycle (1) admet en son *origine* O une seule tangente. Si cette tangente n'est pas l'axe des y , ce que l'on peut supposer, $f(t)$ commence par un terme de degré au moins égal à n . Si cette tangente est choisie pour axe des x , $f(t)$ commence par un terme de degré supérieur à n . Soit $n + \nu$ le degré de ce terme. Les deux nombres entiers positifs n , ν jouent un grand rôle dans la théorie des points singuliers des courbes planes. J'appelle n l'*ordre* et ν la *classe* du cycle. Je désignerai à l'occasion le cycle d'ordre n et de classe ν par ces mots : *le cycle* (n , ν).

2. L'ordre n du cycle est le nombre des valeurs de y qui répondent à une valeur de x . Comme l'axe des x a une direction quelconque, ce nombre est celui des points voisins de O en lesquels le cycle est rencontré par une sécante de direction arbitraire et passant dans les environs de O. On voit donc que si, en un point O, une courbe se décompose en plusieurs cycles, la somme des ordres de ces cycles est ce qu'on appelle communément l'*ordre de multiplicité du point* O.

La tangente du cycle étant prise pour axe des x , les équations (1) sont de la forme

$$(2) \quad x = t^n, \quad y = A t^{n+\nu} + \dots$$

En un point a , répondant à une valeur quelconque de t , le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{n+\nu}{n} A t^\nu + \dots$. Si l'on suppose t infiniment petit du premier ordre, on a ce résultat :

THÉORÈME II. — Soit sur un cycle (n , ν) un point a dont la distance à l'origine O du cycle soit infiniment petite d'ordre n .

La tangente en a fait avec la tangente en O un angle infiniment petit d'ordre ν .

3. Je rappelle maintenant la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Soient C , C' deux courbes planes algébriques se correspondant point par point : aux points qui, sur l'une, appartiennent à un seul et même cycle correspondent, sur l'autre, des points appartenant aussi à un seul et même cycle.*

Soient n , n' les ordres de deux tels cycles (C) , (C') : à un point placé sur (C) , à une distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de (C) , correspond un point placé sur (C') à distance infiniment petite d'ordre n' de l'origine de (C') (¹).

Considérons, comme au n° 2, un cycle (n, ν) d'une courbe C et le point a sur ce cycle. Considérons, en même temps, une courbe C' corrélatrice de C . Sur C' existe un cycle correspondant au cycle (n, ν) de C . L'origine de ce cycle et le point qui y correspond à a sont les transformées des tangentes du premier cycle à l'origine et au point a . Ces tangentes font entre elles un angle infiniment petit d'ordre ν : donc les points, qui en sont les transformés, sont entre eux à une distance d'ordre ν ; donc, par application du théorème III, l'ordre du cycle de C' est ν . D'où, par réciprocity, ce résultat :

THÉORÈME IV. — *A un cycle (n, ν) d'une courbe plane correspond, dans une courbe corrélatrice, un cycle (ν, n) .*

4. J'arrive maintenant aux courbes gauches.

Une courbe gauche G est, par définition, le lieu d'un point dont les coordonnées rectilignes dans l'espace sont des fonctions d'une seule variable. Si ces fonctions sont algébriques, la courbe est dite *algébrique*. De cette définition il résulte que toutes les projections ou perspectives d'une courbe gauche algébrique sur un plan sont des courbes planes algébriques. On reconnaît sans peine que, parallèlement à une direction arbitraire, il n'y a qu'un nombre fini de droites rencontrant G en plus d'un point. Si donc on projette G sur deux plans suivant deux directions arbitraires, les projections

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 32.

G', G'' correspondent *point par point* à G , et, par suite, se correspondent aussi entre elles *point par point*.

Soient O, a deux points infiniment voisins pris sur G . Les projections $O' a', O'' a''$ de Oa sont des infiniment petits d'un même ordre; donc (théorème III) les cycles correspondants qui sur G' et G'' ont respectivement O' et O'' pour origine sont d'un même ordre. Supposons O pris pour origine des coordonnées, et les directions des projetantes prises pour celles des axes des z et des y . Les deux cycles de G' et G'' sont alors, n étant leur ordre, représentés simultanément par

$$(3) \quad x = t^n, \quad y = f(t), \quad z = \varphi(t),$$

f et φ étant des développements commençant chacun par un terme de degré n .

J'appelle *cycle* la portion de la courbe gauche G définie par (3). On a ainsi ce premier résultat : *Aux environs d'un point quelconque, une courbe gauche algébrique se décompose en un ou plusieurs cycles.*

Changeons les plans $y = 0$ et $z = 0$, de manière à faire disparaître les termes de degré n dans f et dans φ . Il est visible qu'on astreint ainsi ces plans à passer par une certaine droite. Cette droite est, comme on s'en assure aisément, la limite d'une corde passant par O , c'est-à-dire la *tangente* du cycle. On peut, en outre, achever de déterminer le plan $z = 0$, de manière à élever encore le degré du premier terme dans φ . Le plan ainsi obtenu est la limite d'un plan passant par la tangente et un point du cycle infiniment voisin de O . C'est le plan *osculateur* du cycle. Les coordonnées ainsi choisies, les équations (3) prennent la forme

$$(4) \quad x = t^n, \quad y = A t^{n+i} + \dots, \quad z = B t^{n+i+v} + \dots$$

Les entiers positifs n, i, v seront dits l'*ordre*, le *rang*, la *classe* du cycle (n, i, v) . La raison de ces dénominations va tout à l'heure apparaître.

5. Au moyen des équations (4) et par un raisonnement analogue à celui du n° 2, on parvient immédiatement au résultat suivant :

THÉORÈME V. — *Si, sur un cycle (n, i, v) , on passe de l'origine*

à un point dont la distance à cette origine soit infiniment petite d'ordre n ; la tangente tourne d'un angle infiniment petit d'ordre i ; le plan osculateur d'un angle infiniment petit d'ordre v .

A quoi l'on peut ajouter, O étant l'origine du cycle et a le point variable :

La distance de O à la tangente en a est de l'ordre $n+i$; l'angle de cette tangente avec le plan osculateur en O est de l'ordre $v+i$; la distance de la tangente en O et de la tangente en a est de l'ordre $n+i+v$.

6. Du théorème II je suis passé au théorème IV par l'emploi du théorème III. Semblablement le théorème V va donner lieu à une conséquence.

Une courbe gauche G fait partie d'une figure composée de points a , dont la suite constitue G ; de droites D , tangentes de G et génératrices d'une développable S ; de plans p , tangents à S et osculateurs à G .

Une figure corrélatrice se compose de plans π , tangents à une développable Σ , corrélatrice de G , et osculateurs à une courbe Γ , corrélatrice de S ; de droites Δ , corrélatrices de D , génératrices de Σ et tangentes de Γ ; de points α dont la suite constitue Γ .

Les courbes G et Γ se correspondent point par point. A un cycle de G correspond un cycle de Γ . Soient O, Ω les origines de ces cycles. Quand Oa est infiniment petit d'ordre n , $\Omega\alpha$ est infiniment petit d'ordre v d'après la seconde partie du théorème V; donc, d'après le théorème III, v est l'ordre du cycle de Γ . En même temps, les droites D et Δ tournent d'un angle infiniment petit d'ordre i ; donc :

THÉOREME VI. — A un cycle (n, i, v) correspond, dans une figure corrélatrice, un cycle (v, i, n) .

7. Au lieu de coordonnées parallèles, on peut faire usage de coordonnées tétraédrales. Soient alors x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point. Les équations

$$(5) \quad \frac{x_1}{x_4} = t^n, \quad \frac{x_2}{x_4} = A t^{n+i} + \dots, \quad \frac{x_3}{x_4} = B t^{n+i+v} + \dots$$

définissent, comme (4), un cycle (n, i, ν) . Abréviativement désignons par plan x_i le plan coordonné $x_i = 0$ et par s_i le sommet opposé du tétraèdre de référence. On voit que le cycle (5) a s_4 pour sommet, x_3 pour plan osculateur, et pour tangente la droite x_2, x_3 ou $s_1 s_4$.

Les deux premières équations (5) définissent une perspective de la courbe, le point de vue étant en s_3 , c'est-à-dire en un point arbitraire; donc :

1° *La perspective d'un cycle (n, i, ν) faite d'un point quelconque, pris pour point de vue, est un cycle (n, i) .*

De même, la première et la troisième équation (5) donnent ce résultat :

2° *Faite d'un point quelconque du plan osculateur, la perspective est un cycle $(n, i + \nu)$.*

La deuxième et la troisième équation donnent cet autre résultat :

3° *Faite d'un point quelconque de la tangente, la perspective est un cycle $(n + i, \nu)$.*

Enfin des équations (5) on déduit

$$\frac{x_2}{x_1} = A t^i + \dots, \quad \frac{x_3}{x_1} = B t^{i+\nu} + \dots$$

On en conclut, en vertu du théorème III, que :

4° *Faite de l'origine du cycle (n, i, ν) , la perspective est un cycle (i, ν) .*

Cette analyse suppose expressément que chaque perspective correspond point par point à G. Si le point de vue est le sommet d'un cône dont chaque génératrice rencontre G en plusieurs points, les résultats précédents se modifient. Je n'insisterai pas sur ce sujet.

8. Les perspectives de G sont des courbes planes corrélatives des sections planes de la développable Σ . On peut donc, des résultats du n° 7, conclure, au moyen du théorème IV, les ordres et les classes des cycles des sections de Σ . Si ensuite on y change les nombres n, ν entre eux, on a, en vertu du théorème VI, ce qui est relatif aux sections de S. En conséquence :

Au cycle (n, i, ν) de la courbe gauche, G correspond dans une section de S :

- 1° Par un plan quelconque, le cycle (i, ν) ;
- 2° Par un plan passant à l'origine, le cycle $(i + n, \nu)$;
- 3° Par un plan tangent, le cycle $(n, \nu + i)$;
- 4° Par le plan osculateur, le cycle (n, i) .

9. Entre le degré m' , la classe μ' et les ordres et les classes n' , ν' des cycles d'une courbe plane existe, comme on sait, la relation

$$(6) \quad \Sigma(\nu' - n') = 3(\mu' - m') \quad (1).$$

En appliquant cette relation à une section de S et à une section de Σ , on obtient deux relations analogues pour la courbe gauche G .

Le degré m de G est le nombre des points où G rencontre un plan; sa classe μ est le degré de Γ ou le nombre des plans osculateurs que l'on peut mener à G par un point; le rang r commun à G et à Γ est le nombre des droites D ou Δ qui rencontrent une droite arbitrairement choisie.

Une section arbitraire de S a pour degré μ et pour classe r . A chaque cycle (n, i, ν) , dont l'origine n'est pas dans son plan, correspond, pour cette section (n° 8), un cycle (i, ν) . En outre, son plan rencontre G en m points, dont chacun est l'origine d'un cycle $(1, 1, 1)$. A ce cycle répond (n° 8), dans la section, un cycle $(2, 1)$, pour lequel l'élément $(\nu - n')$ de l'équation (6) est égal à -1 . On a donc

$$(7) \quad \Sigma(\nu - i) - m = 3(\mu - r).$$

Semblablement, pour une section de Σ , on a

$$(8) \quad \Sigma(n - i) - \mu = 3(m - r).$$

Telles sont les deux relations annoncées. On peut les combiner par soustraction, de manière à obtenir une autre relation symétrique par rapport aux éléments de G et de Γ , savoir :

$$(9) \quad \Sigma(\nu - n) = 2(\mu - m).$$

(1) Voir, par exemple, t. IV de ce *Bulletin*, p. 66.

Si l'on connaît, pour une courbe, les ordres et les classes de tous les cycles dont les ordres n diffèrent de l'unité, la relation (9) fournit le nombre des plans osculateurs *stationnaires* de cette courbe.

§ 11. — SUR LES COVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

10. A la fin du paragraphe précédent, j'ai déduit de la théorie des courbes planes deux relations (7), (8) entre le degré, le rang, la classe d'une courbe gauche et les ordres, les rangs, les classes de ses cycles. On obtiendrait directement ces relations en cherchant : 1^o le nombre des plans osculateurs menés par un point, c'est-à-dire la classe exprimée au moyen du degré, du rang et des éléments caractéristiques des cycles ; 2^o le nombre des plans osculateurs stationnaires. L'un ou l'autre de ces problèmes conduira à chercher, sur la courbe, le nombre des points en chacun desquels cette courbe satisfait à une certaine équation différentielle, exprimant soit que le plan osculateur passe par un point donné, soit qu'il est stationnaire.

Plus généralement, je pose la question suivante : *Étant donnée une équation algébrique entre x, y, z et les dérivées successives de y, z par rapport à x , trouver le nombre des points d'une courbe gauche algébrique G , en chacun desquels cette équation est satisfaite.*

C'est, comme on voit, la question dont j'ai précédemment donné la solution pour les courbes planes ⁽¹⁾.

Il est avantageux, dans la solution d'un tel problème, de ne pas se priver des ressources qu'offre la Géométrie projective et, par conséquent, d'envisager les équations différentielles sous forme projective. Elles s'offrent d'elles-mêmes, sous cette forme, dans les applications géométriques. Pour être en mesure de traiter, à ce point de vue, la question annoncée, il m'est nécessaire de présenter quelques considérations générales sur ce qu'on peut appeler les *covariants différentiels*.

11. Pour la commodité des notations, je désignerai par ξ, η, ζ , au lieu de x, y, z , les coordonnées linéaires d'un point. Je consi-

(1) *Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. II.

dère une équation algébrique, sous forme entière, entre ξ , η , ζ et les dérivées successives de η , ζ prises par rapport à la variable ξ . Je transforme cette équation en y faisant deux changements : 1° je prends une variable indéterminée t ; 2° je remplace les variables ξ , η , ζ par x_1 , x_2 , x_3 , x_4 en posant

$$(10) \quad x_1 \xi = x_1, \quad x_2 \eta = x_2, \quad x_3 \zeta = x_3.$$

Je désigne abrégativement le premier membre de l'équation transformée et mise sous forme rationnelle et entière par $f_t(x)$. La lettre x rappelle que les variables sont $x_1, \dots$, et l'indice t rappelle que la variable indépendante est t .

12. La fonction $f_t(x)$ jouit de deux propriétés dues à sa provenance. Soit u une fonction quelconque de t ; posons

$$(11) \quad x_1 = u\gamma_1, \quad x_2 = u\gamma_2, \quad x_3 = u\gamma_3, \quad x_4 = u\gamma_4,$$

et substituons ces expressions dans f . A cet effet, il faut exprimer les dérivées de x en fonction de celles des γ et de u , en appliquant la règle connue pour les dérivées d'un produit. Dans la dérivée $p^{\text{ième}}$ de x , la dérivée de γ d'ordre le plus élevé, qui y figure, est $\gamma^{(p)}$ et son coefficient est u . Il est d'ailleurs manifeste que f est homogène par rapport aux lettres x , abstraction faite des indices de dérivation. Soit δ le degré de f ainsi envisagée. On obtient ce résultat :

$$(12) \quad f_t(x) = u^\delta f_t(\gamma) + \varphi,$$

φ ne contenant que les dérivées des γ d'ordre inférieur à l'ordre le plus élevé des dérivées de x dans $f_t(x)$.

Mais, en vertu de (11), les équations (10) se changent en d'autres équations qui ne diffèrent de (10) que par le changement des lettres x en γ ; donc l'équation proposée entre les lettres ξ , η , ζ doit conduire à une transformée en γ qui ne diffère de la transformée en x que par le changement des lettres x en les lettres γ ; donc la transformée de $f_t(x) = 0$ est nécessairement $f_t(\gamma) = 0$. Donc, en vertu de (12) et puisque φ ne contient pas les dérivées de l'ordre le plus élevé, cette fonction φ se réduit identiquement à zéro. Ainsi

$$(13) \quad f_t(x) = u^\delta f_t(\gamma).$$

L'équation (13) exprime la première propriété de la fonction f : Si l'on fait dans cette fonction la substitution (11), elle se multiplie par une puissance de u .

13. La seconde propriété est relative au changement de la variable indépendante. Par un raisonnement tout à fait analogue au précédent, on démontrera sans peine l'identité suivante, où s désigne la nouvelle variable :

$$(14) \quad f_t(x) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^\omega f_t(x).$$

Dans cette équation ω est un entier positif : Si l'on change la variable indépendante, la fonction se multiplie par une puissance de la dérivée de l'une des variables par rapport à l'autre.

14. Il s'agit maintenant de mettre l'équation $f = 0$ sous une forme indépendante du tétraèdre de référence. Pour abréger, j'emploie la notation

$$(xyzu) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Je fais la substitution suivante :

$$(15) \quad x_1 = (z a^2 a^3 a^4), \quad x_2 = (z a^3 a^4 a^1), \quad x_3 = (z a^4 a^1 a^2), \quad x^4 = (z a^1 a^2 a^3),$$

dans laquelle les lettres a sont affectées d'indices supérieurs et non pas d'exposants. Les a désignent des constantes et les z les nouvelles variables. Exécuter la substitution (15), c'est, comme on voit, prendre un nouveau tétraèdre de référence par rapport auquel les sommets du premier tétraèdre de référence sont les points a^1, a^2, a^3, a^4 . La substitution faite, f devient une fonction des z et des a , rationnelle et entière. Elle peut contenir un facteur indépendant des z . Soit $U(a)$ ce facteur. On a identiquement

$$(16) \quad f_t(x) = U(a) F_t(z, a).$$

J'exécute maintenant à la fois sur z et sur les a une substitution

linéaire, en posant

$$\left. \begin{aligned} z_i &= \lambda_i Z_1 + \mu_i Z_2 + \nu_i Z_3 + \rho_i Z_4 \\ a_i^j &= \lambda_i A_1^j + \mu_i A_2^j + \nu_i A_3^j + \rho_i A_4^j \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, 4; \\ j &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Si je fais d'abord cette substitution dans (15) et que je désigne par D le déterminant $(\lambda_{\mu\nu\rho})$, les nouvelles expressions des x ne diffèrent de celles fournies par (15) qu'en ceci : elles sont multipliées par D et les lettres z, a y sont remplacées par les lettres Z, A . Je puis donc, sans changer le résultat, remplacer d'abord x par $D\gamma$, puis γ_1 par $(Z, A^1 A^2 A^3 A^4) \dots$. J'ai donc, en vertu de (13) et de (16),

$$f_i(x) = D^{\delta} f_i(\gamma) = D^{\delta} U(A) F_i(Z, A).$$

Comparant à (16), j'en déduis

$$(17) \quad U(a) F_i(z, a) = D^{\delta} U(A) F_i(Z, A).$$

Si je donne aux z et à leurs dérivées des valeurs fixes arbitraires, l'équation (17) montre que la fonction $U(a)$ est un invariant du tétraèdre formé par les points a . C'est d'ailleurs une fonction entière et rationnelle. C'est donc une puissance entière et positive du déterminant $(a^1 a^2 a^3 a^4)$. Soit q l'exposant de cette puissance; remplaçons $\delta - q$ par une seule lettre π , et concluons de (17)

$$(18) \quad F_i(z, a) = D^{\pi} F_i(Z, A).$$

L'effet d'une substitution homographique appliquée à la fois aux points z, a^1, a^2, a^3, a^4 est simplement de multiplier la fonction F par une puissance du déterminant de la substitution.

15. Voilà donc, mise sous forme projective, par l'introduction de quatre points, une équation différentielle quelconque. Si une équation a pour origine un problème de Géométrie projective, la transformation est inutile. Le premier membre de l'équation se présente comme une fonction des z et des données d'une certaine figure; mais une figure quelconque est déterminée par des nombres et un tétraèdre de référence, de telle sorte que, pour transformer homographiquement la figure, il suffit de transformer le tétraèdre sans altérer les nombres. En conséquence, une relation projective quelconque entre les éléments différentiels d'une courbe en un de ses points z et

une autre figure peut toujours être censée réduite à une équation dont le premier membre est une fonction telle que F ; donc aussi tout covariant différentiel partage avec les covariants ordinaires cette propriété que *l'effet d'une substitution homographique est de multiplier la fonction par une puissance du déterminant de la substitution.*

16. A peine est-il besoin de faire observer qu'il existe des fonctions f telles, qu'après la substitution (15) les a disparaissent de la transformée F . L'équation (18) subsiste toujours, mais ne contient pas les a . L'équation $F = 0$ exprime alors une propriété projective de la courbe, lieu du point z , seule. La fonction F est alors un *invariant différentiel*. Tel est, par exemple, en dénotant les dérivées par des accents, la fonction (z, z', z'', z''') qui, égalée à zéro, exprime la propriété des points où le plan osculateur est stationnaire.

17. Voici une autre remarque à ce sujet : De même que f par rapport aux x , F est par rapport aux z homogène et de degré δ , abstraction faite des indices de dérivation; par suite, F est, par rapport à l'ensemble des lettres a , homogène et de degré $3\delta - 4q$. Si F est maintenant un invariant différentiel, ce nombre $3\delta - 4q$ est nul. Alors δ est égal à $4q$.

Ainsi, dans le cas d'un covariant, on aura à envisager les trois nombres ω , δ , π , tandis que, dans le cas d'un invariant, le second de ces nombres est quadruple du troisième.

18. Dans la plupart des applications, il serait extrêmement gênant de conserver les quatre coordonnées homogènes d'une part, et la variable indépendante indéterminée d'autre part. Il nous est maintenant facile de revenir aux variables habituelles, sans perdre le bénéfice de la projectivité.

Soit le covariant $F_i(z)$ (je m'abstiens maintenant d'écrire la lettre a). Pour faire disparaître la quatrième coordonnée, je pose, comme aux équations (10),

$$z_i \xi = z_1, \quad z_i \eta = z_2, \quad z_i \zeta = z_3.$$

La fonction F jouit de la propriété démontrée au n° 12 pour la fonction f . J'ai donc

$$F_i(z) = z_i^4 F_i(\xi).$$

Les coordonnées sont maintenant ξ , η , ζ et l'unité. Je veux, à présent, prendre ξ pour variable indépendante. Appliquant à F le résultat du n° 13, j'ai

$$(19) \quad F_t(z) = z_i^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^{-\frac{1}{2}} F_{\xi}(\xi).$$

Je fais maintenant une substitution homographique, comme au n° 14, et j'obtiens

$$F_t(z) = D^* F_t(Z).$$

Prenant pour coordonnées

$$\mathfrak{x} = \frac{Z_1}{Z_4}, \quad \mathfrak{y} = \frac{Z_2}{Z_4}, \quad \mathfrak{z} = \frac{Z_3}{Z_4},$$

j'ai une équation analogue à (19)

$$F_t(Z) = Z_i^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt} \right)^{-\frac{1}{2}} F_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}),$$

et il en résulte enfin

$$(20) \quad \begin{cases} F_{\xi}(\xi) = \left(\frac{Z_i}{z_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{d\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} D^* F_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) \\ \quad = \frac{1}{(\lambda_1 \mathfrak{x} + \mu_1 \mathfrak{y} + \nu_1 \mathfrak{z} + \rho_1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d\mathfrak{x}}{d\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} D^* F_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}). \end{cases}$$

Telle est la formule propre à fournir le résultat d'une substitution homographique quelconque, et par conséquent aussi d'un changement des coordonnées linéaires dans un covariant différentiel. Pour plus de clarté, je transcris ici, sous leur forme définitive, les relations qui lient les deux systèmes de variables, savoir :

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{\lambda_1 \mathfrak{x} + \mu_1 \mathfrak{y} + \nu_1 \mathfrak{z} + \rho_1} = \frac{\eta}{\lambda_2 \mathfrak{x} + \mu_2 \mathfrak{y} + \nu_2 \mathfrak{z} + \rho_2} \\ \quad = \frac{\zeta}{\lambda_3 \mathfrak{x} + \mu_3 \mathfrak{y} + \nu_3 \mathfrak{z} + \rho_3} = \frac{1}{\lambda_4 \mathfrak{x} + \mu_4 \mathfrak{y} + \nu_4 \mathfrak{z} + \rho_4}. \end{cases}$$

Les variables indépendantes sont, d'une part, ξ et, de l'autre, $\mathfrak{x}$.

§ III. — *Recherche du nombre des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels s'évanouit un covariant différentiel donné.*

19. Le titre de ce paragraphe reproduit l'énoncé de la question posée au n° 10, traduite sous forme projective. Pour résoudre cette question relativement à un covariant donné $F_\xi(\xi)$ et à une courbe gauche G , lieu du point (ξ, η, ζ) , on considérera la fonction F le long de la courbe G . On aura ainsi une fonction algébrique d'une seule variable, et l'on en étudiera les zéros et les infinis avec les ordres de multiplicité de chacun d'eux. Le théorème sur l'égalité du nombre des zéros et du nombre des infinis fournira alors la solution de la question proposée. C'est exactement la marche que j'ai suivie dans mon Mémoire *Sur le contact des courbes planes avec les coniques*, cité plus haut.

20. J'examine d'abord ce qui concerne le passage de la variable indépendante ξ par l'infini ; à cet effet, j'envisage les points de rencontre de la courbe G avec le plan $z_1 = 0$. La fonction considérée étant un covariant, le tétraèdre de référence est arbitraire. Le plan z_1 est ainsi un plan arbitrairement choisi relativement à G . Chacune de ses rencontres avec G a donc lieu en un point simple de cette courbe. En outre, si l'on fait une substitution arbitraire telle que (21), la fonction transformée $F_\infty(\infty)$ a, en ce point z , une valeur finie : j'écarte, bien entendu, le cas où G satisfait à l'équation différentielle proposée, cas dans lequel le problème n'aurait plus aucune signification. Le déterminant D de la formule (20) est une constante. On peut donc, d'après cette formule, substituer aux environs du point z à $F_\xi(\xi)$ la fonction

$$\left(\frac{Z_1}{z_1}\right)^\delta \left(\frac{dZ_1}{dz_1}\right)^\omega = \left(\frac{Z_1}{z_1}\right)^{\delta-2\omega} \left(\frac{Z_1 dZ_1 - Z_1 dZ_1}{z_1 dz_1 - z_1 dz_1}\right)^\omega.$$

Aux environs du point z , cette fonction est elle-même du même ordre infinitésimal que $z_1^{2\omega-\delta}$; donc, si $2\omega - \delta$ est positif, le point z donne lieu à un zéro de $F_\xi(\xi)$, dont l'ordre de multiplicité est $2\omega - \delta$. Si $2\omega - \delta$ est négatif, on a, au contraire, un infini. Que l'on con-
vienne, dans l'équation qui exprime l'égalité du nombre des zéros à

celui des infinis, de mettre tous les termes dans le premier membre. Alors on peut dire qu'à chaque rencontre de G avec le plan $z_1 = 0$ répondent $(2\omega - \delta)$ zéros de F .

Le nombre des rencontres analogues est égal au degré m de G ; donc les rencontres de G avec le plan $z_1 = 0$ donnent lieu à $(2\omega - \delta)m$ zéros de F .

21. Si l'on remplace η , ζ par deux développements procédant suivant les puissances entières et descendantes de ξ , et commençant tous deux par des termes du premier degré, le second membre de (20), après cette substitution, ordonné de même, commence par un terme de degré $(\delta - 2\omega)$. De là un moyen de calculer directement ce nombre sans aucune transformation.

22. J'examine maintenant ce que devient $F_\xi(\xi)$ quand les dérivées prises par rapport à ξ sont infinies, c'est-à-dire quand la tangente de G rencontre la droite $z_1 = z_2 = 0$. Soit z un point en lequel cette circonstance ait lieu. Aux environs de ce point, le développement de ξ suivant les puissances ascendantes de $\mathfrak{X}$ manque du terme du premier degré. La quantité $\frac{d\mathfrak{X}}{d\xi}$, développée de la même manière, commence donc par un terme de degré -1 . Les autres facteurs du second membre de (20) ont des limites finies; donc au point z correspond pour F un infini d'ordre ω .

Le nombre des points z analogues est le rang r de G ; donc les rencontres de la droite $z_1 = z_2 = 0$ avec la développable dont G est l'arête de rebroussement donnent lieu à ωr infinis de F .

23. Si l'on remplace η , ζ par deux développements procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $\xi^{\frac{1}{2}}$, et commençant tous deux par des constantes, le second membre de (20), ordonné de la même manière, commence par un terme de degré $-\omega$. De là un procédé pour calculer ce nombre ω directement sur l'équation différentielle proposée.

24. J'ai examiné successivement les circonstances que présente le covariant $F_\xi(\xi)$ aux points de G pour lesquels les deux premiers coefficients du second membre de (20) n'ont pas des valeurs finies. En

tout autre point, ces coefficients ont des valeurs finies, et je puis en faire abstraction. Je peux donc maintenant, pour chaque point, substituer à $F_{\xi}(\xi)$ l'expression $F_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$, les coordonnées $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ étant, chaque fois, choisies à volonté. Je supposerai alors que le point envisagé est l'origine de ces coordonnées, que le plan $\mathfrak{Z} = 0$ est le plan osculateur et que la droite $\mathfrak{Y} = 0, \mathfrak{Z} = 0$ est la tangente de G en ce point.

En d'autres termes, si un point O de G est l'origine d'un cycle (n, i, ν) , et qu'on veuille étudier le covariant F aux environs de O , le point z se déplaçant sur ce cycle, on pourra représenter le cycle par les équations du n° 4

$$(22) \quad \xi = t^n, \quad \eta = A t^{n+i} + \dots, \quad \zeta = B t^{n+i+\nu} + \dots$$

Je substitue ces expressions et celles qu'on en déduit pour les dérivées dans $F_{\xi}(\xi)$, j'ordonne par rapport aux puissances croissantes de t . Soit alors l le degré du premier terme. La fonction F a un zéro multiple d'ordre l . Soit L la somme des nombres analogues à l pour tous les cycles de G , qui ne donnent pas pour résultat zéro. J'ai

$$(23) \quad L = \omega r + (\delta - 2\omega) m.$$

Cette dernière formule fournit la solution de la question proposée. En effet, si $\mathcal{L}$ est la partie de la somme L allérente aux points singuliers, et si, d'autre part, N est le nombre cherché, on aura finalement

$$(24) \quad N = \omega r + (\delta - 2\omega) m - \mathcal{L}.$$

25. Tel est le procédé vraiment simple au moyen duquel on peut résoudre sans difficulté les cas particuliers de la question générale énoncée plus haut. J'en ferai maintenant des applications : je commence par les questions indiquées au n° 10.

Soit à trouver le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point x à une courbe algébrique G , lieu du point z .

Dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à une variable quelconque, j'ai pour l'équation de condition

$$F_t(z) = (x z z' z'') = 0.$$

Le premier membre de l'équation se présente de lui-même sous forme d'un covariant différentiel, contenant les coordonnées d'un point x .

Le degré δ par rapport à la lettre x est égal à 3.

Le nombre ω , somme des indices de dérivation dans chaque terme, est égal aussi à 3 ; donc $\delta - 2\omega = -3$. La formule (23) donne ainsi

$$L = 3(r - m).$$

Il reste à calculer le nombre $\mathfrak{L}$. Les coordonnées ξ, η, ζ au moyen desquelles un cycle de G est représenté par les équations (22) sont assujetties simplement à ce que le point s_4 ($\xi = \eta = \zeta = 0$) soit l'origine du cycle, que la droite $\eta = \zeta = 0$ en soit la tangente et que le plan $\zeta = 0$ en soit le plan osculateur. On peut encore prendre à volonté le sommet s_3 du tétraèdre de référence, le plan $z_4 = 0$ passant en s_3 et le plan $z_1 = 0$ passant en s_3 et s_4 . Je profite de cette indétermination pour placer le sommet s_3 , qui est entièrement arbitraire, au point donné x .

Alors $F_\xi(\xi)$ se réduit à $\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$. D'après (22), j'ai

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n} \right) A t^{n-i} + \dots;$$

donc (n° 24) l'élément l relatif au cycle (22) est égal à $i - n$; donc enfin, d'après (24), j'ai pour le nombre cherché, c'est-à-dire pour la classe de G ,

$$(25) \quad \mu = 3(r - m) + \Sigma(n - i).$$

C'est la formule (7) du n° 9.

On peut vérifier *a posteriori* que chaque point de G , en lequel ce plan osculateur passe par x , donne lieu à un zéro simple du covariant $(x z z' z'')$. Je suppose, à cet effet, que O soit un tel point et que O soit en même temps l'origine d'un cycle (n, i, ν) . Je ne peux plus supposer le sommet s_3 du tétraèdre coïncidant avec x , puisque, par hypothèse, x est dans le plan osculateur du cycle. Je fais alors coïncider avec x le sommet s_3 , qui est arbitraire dans le plan osculateur. $F_\xi(\xi)$ se réduit maintenant à $\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}$, et j'ai pour l

le nombre $(i + \nu - n)$. Si x est arbitrairement choisi, O est un point quelconque de G , c'est-à-dire l'origine d'un cycle $(1, 1, 1)$; donc $i + \nu - n$ se réduit à l'unité. La vérification se trouve ainsi faite; mais le procédé employé permet, comme on voit, l'examen des circonstances relatives aux positions particulières du point x . On peut pousser plus loin cet examen, en supposant un cycle (n, i, ν) sur la tangente duquel se trouve le point x . Le nombre l est alors égal à $(2i + \nu - n)$. Enfin, si le point x est l'origine du cycle (n, i, ν) , le nombre l est égal à $(2i + \nu)$. On peut résumer ainsi cette discussion :

Soit G une courbe algébrique de rang r et de degré m , et soit x un point.

Désignons par

$\mathfrak{K}$ *la somme des classes des cycles de G , dont les plans osculateurs passent en x ;*

J *la somme des rangs des cycles de G dont les tangentes passent en x ;*

N *la somme des ordres des cycles de G ayant leur origine en x ;*
 n, i *l'ordre et le rang d'un cycle quelconque de G .*

On a la relation

$$\mathfrak{K} + J + N = 3(r - m) + \sum (n - i).$$

Cette formule peut aisément se conclure de la théorie des courbes planes au moyen des résultats énoncés au n° 8. Je l'ai démontrée ici en détail pour faire mieux comprendre la méthode de calcul que je viens d'exposer.

26. *Soit, en second lieu, à trouver le nombre des plans osculateurs stationnaires de G . L'invariant à considérer est ici*

$$F_t(z) = (zz'z''z'''), \quad \delta = 4, \quad \omega = 6.$$

Pour le cycle (22), on a (n° 13)

$$F_z(\xi) = \left(\frac{dt}{d\xi}\right)^4 F_t(\xi) = \frac{1}{n t^{n-1}} \xi' \xi'' \xi''''.$$

La partie principale du déterminant $(\xi' \xi'' \xi''')$ est du degré $3n + 2i + \nu - 6$; celle de F est alors du degré $2i + \nu - 3n$;

donc (n° 24)

$$L = \Sigma (2i + \nu - 3n) = 6r - 8m.$$

Cette relation, jointe à (25), conduit, par l'élimination de ν ou par l'élimination de i , à l'une ou à l'autre des relations (8) et (9).

27. J'envisage maintenant pour F un covariant différentiel quelconque *du premier ordre*. Ce ne peut être un invariant. On peut, en effet, par une substitution homographique, changer un point et une droite menée en ce point en un point arbitraire et une droite arbitraire menée en ce dernier point. Il ne saurait donc exister une propriété invariante de la figure formée d'un point d'une courbe et de la tangente en ce point. Il n'existe donc pas d'invariant différentiel du premier ordre; donc F contient des données, qui peuvent être réduites, d'après le paragraphe précédent, à des points a dont le nombre ne surpasse pas quatre.

Pour étudier la composition du nombre L , j'examine d'abord s'il existe sur G des cycles qui fournissent pour l des résultats différents de zéro, *quels que soient les points a* . Il n'en saurait exister : en effet, il en résulterait que le nombre l serait différent de zéro, quels que fussent et l'origine et la tangente de ce cycle, ainsi que les points a ; donc aucun élément du nombre L ne répond à un point de G indépendant des données de F .

Supposons que ces données restent indéterminées, c'est-à-dire que, G étant une courbe entièrement donnée, les points a soient représentés par des coordonnées qui restent des *quantités littérales*. D'après ce qui vient d'être dit, chaque point de G pour lequel le nombre l diffère de zéro dépend des données a , et est, par suite, un point simple de G . Je dis, en outre, que, *pour ce point, l est égal à l'unité*.

Suivant l'hypothèse inverse, z étant un point quelconque de G et $a^1, a^2, \dots$ des points tels que F s'évanouisse pour z , la dérivée de F , prise le long de G , s'évanouirait aussi en z . Admettons cela pour un instant, et montrons l'impossibilité de cette supposition. Fixons à volonté les points a , sauf a^1 , et astreignons ce dernier à parcourir une ligne arbitrairement choisie. Il n'y a plus alors dans F que deux variables : les points z et a^1 . Lions ces points par la condition $F = 0$. Suivant l'hypothèse, la dérivée partielle de F prise en faisant varier seulement z est nulle; donc la dérivée par-

tielle de F par rapport à la variable unique dont dépend a^1 est aussi nulle; donc, ou bien F est divisible par le carré d'une fonction entière de cette variable, ou bien F ne contient pas cette variable. La première supposition doit être écartée, car on ne considère que des équations indécomposables. La seconde s'écarte également; car, si F ne contient pas a^1 , elle contient nécessairement au moins un des autres points, à l'égard duquel on peut faire le même raisonnement.

De cette discussion je conclus que, *dans l'hypothèse où les données de F sont des quantités littérales, le nombre des points de G en chacun desquels s'évanouit le covariant F est précisément fourni par la formule (23). C'est ce qu'on peut encore exprimer ainsi :*

THÉOREME VII. — *Le nombre des points d'une courbe gauche G de degré m et de rang r , en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique de premier ordre, mise sous forme projective et dont les données sont indépendantes de G , est égal à $\omega r + \theta m$, ω et θ étant deux nombres qui ne dépendent que de l'équation différentielle ($\theta = \delta - 2\omega$).*

28. Le théorème VII est susceptible de diverses formes géométriques. Considérons une surface algébrique dont l'équation contienne algébriquement un paramètre. En exprimant que cette surface touche G , et éliminant le paramètre entre cette nouvelle équation et celle de la surface, j'obtiens une équation différentielle algébrique du premier ordre; donc :

Soit un système algébrique de surfaces, tel que ω soit le nombre des surfaces de ce système qui passent en un point, et θ le nombre de celles qui touchent une droite.

Le nombre des surfaces du même système qui touchent une courbe de degré m et de rang r est $\omega r + \theta m$, pourvu qu'il y ait indépendance entre la courbe et les données du système.

C'est un théorème connu.

Considérons une courbe G' également algébrique et dont les données contiennent trois paramètres. En exprimant qu'elle touche G et éliminant les paramètres, on obtient encore une équation différentielle du premier ordre. Donc :

Soit une série triplement infinie et algébrique, de courbes algébriques G' , de telle sorte que ω courbes G' touchent un plan en un point et que θ courbes G' touchent une droite.

Le nombre de courbes G' qui touchent une courbe G de degré m et de rang r est $\omega r + \theta m$, pourvu qu'il y ait indépendance entre G et les données de la série (G') .

29. Il est naturellement impossible d'obtenir, en place du théorème VII, un théorème général pour le cas où l'on suppose au contraire une dépendance entre la courbe et l'équation différentielle. On a déjà vu plus haut (n° 25) un exemple de cette supposition, à l'égard d'une équation du second ordre. En voici un nouvel exemple où le covariant est du premier ordre.

Soient a le premier membre de l'équation d'un plan et b le premier membre de l'équation d'une surface du second ordre. Considérons la fonction

$$(26) \quad F_t(z) = a^3 \frac{d(ba^{-1})}{dt},$$

t étant une variable dont dépend le déplacement du point z sur une courbe G . Il est visible que F est un covariant différentiel du premier ordre. En appliquant la méthode ci-dessus à ce covariant, je trouverai, non-seulement le nombre des points de G où il s'évanouit, mais encore son interprétation géométrique.

On a ici $\delta = 3$, $\omega = 1$; donc, le plan a et la surface b étant quelconques relativement à G , le nombre des points de G satisfaisant à $F = 0$ est $r + m$.

Soit O un point de G où F s'évanouisse. Je puis supposer en O , suivant l'analyse du n° 24,

$$(27) \quad z_1 = z_2 = z_3 = 0, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{dz_3}{dt} = 0.$$

Je peux supposer aussi que le plan $z_4 = 0$ coïncide avec a . Prenant les variables ξ, η, ζ , je réduis ainsi $F_t(\xi)$ à $\frac{db}{d\xi}$.

Soit maintenant

$$b = \sum b_{ij} z_i z_j.$$

En vertu de (27), $\frac{db}{d\xi}$ se réduit en O à b_{11} ; donc le plan polaire

de O par rapport à b passe au sommet s_1 du tétraèdre de référence, c'est-à-dire à l'intersection de la tangente de G en O avec le plan a . Ainsi :

Si, par rapport à une surface du second ordre b , on prend le plan polaire d'un point z d'une courbe G et l'intersection x de ce plan avec la tangente de G en z , l'évanouissement du covariant (26) exprime que le point x est dans le plan a .

Donc le degré du lieu du point x est $r + m$.

D'après cette interprétation, on peut maintenant se demander si le degré de la courbe (x) , lieu du point x , subit des modifications quand la surface b prend certaines positions particulières relativement à G. Or l'évanouissement de b_{14} conserve toujours la signification ci-dessus, sauf le cas où b passe en O. Admettons qu'il en soit ainsi et que, pour un cycle d'origine O (n, i, ν) , b soit d'ordre $n + k$. Alors $\frac{db}{d\xi}$ est d'ordre k ; donc, avec une entière généralité, on peut dire que :

Le degré du lieu du point x est la somme du degré et du rang de G, diminuée de la somme des ordres des contacts de G avec la surface b .

L'expression $r + m - \Sigma k$ peut être transformée. On a, en effet, en comptant les intersections de G et de b ,

$$\Sigma (n + k) = 2m.$$

Le degré de (x) peut donc s'écrire $r - m + \Sigma n$: *le degré du lieu du point x est égal à l'excès du rang de G sur son degré, augmenté de la somme des ordres des cycles de G dont les origines sont sur b .* Ce dernier énoncé s'applique, sans aucune ambiguïté, au cas où b se réduit à un cône. Prenons ce cas, et faisons une transformation corrélatrice qui change b en un cercle situé à l'infini. La courbe x se change alors en la surface rectifiante de Γ ; donc :

Le nombre des plans rectifiants que l'on peut mener par un point arbitraire à une courbe algébrique est égal à l'excès du rang de la courbe sur sa classe, augmenté de la somme des classes des cycles de cette courbe, pour chacun desquels le plan osculateur est, soit isotrope, soit à l'infini.

30. Voici encore un exemple où le covariant est du premier ordre :

On donne une conique C et une courbe G. Soient z un point de G et Δ la polaire, par rapport à C, du point d'intersection du plan de C avec la tangente de G en z. On mène le plan N par z et Δ. Trouver le nombre des plans N qui passent par un point donné arbitrairement.

Si C est le cercle commun à toutes les sphères, N devient le plan normal de G en z. Soient

$$\begin{aligned} a &= a_z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 = 0, \\ q &= q_z^{(2)} = (q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4)^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

les équations du plan C et d'une surface du second degré passant par C. Je pose encore

$$p = 2q_1 q_7.$$

On trouve aisément pour le covariant qui répond à la question (γ étant le point donné)

$$F(z) = a^3 \frac{d}{dt} [a^{-2} (a_7 q - ap)].$$

Les nombres δ et ω sont respectivement égaux à 3, 1; donc le nombre cherché est la somme du rang et du degré de G, s'il γ a indépendance entre G et la conique C.

Je veux maintenant chercher les modifications qui peuvent être dues à des relations entre G et C. A cet effet, je dois chercher pour quels cycles de G, F peut devenir nul ou infini, quel que soit γ.

En premier lieu, je suppose que l'origine O de ce cycle ne soit pas dans le plan a. La surface q n'est astreinte qu'à passer par C. Je puis supposer qu'elle passe en O, sans y toucher G. Le plan p, polaire de γ par rapport à q, ne passe pas en O, puisque γ est arbitraire; donc la fonction $a^{-2} (a_7 q - ap)$ ne s'évanouit pas en O. En outre, son développement suivant les puissances ascendantes de ξ contient un terme du premier ordre qui ne disparaît que pour certaines positions de γ; donc la dérivée de cette fonction a une valeur finie quand γ reste arbitraire. Ainsi le cycle envisagé ne peut en aucune façon altérer le résultat précédent.

En second lieu, je suppose que O soit dans le plan a . Ici a s'évanouit en O . Si O n'est pas sur C , q et p ont, en O , des valeurs finies. Soit n l'ordre du cycle et $1 + \frac{\omega}{n}$ l'ordre infinitésimal de a , quand ξ est du premier ordre. La fonction ci-dessus a sa partie principale de l'ordre $-2 \left(1 + \frac{\omega}{n}\right)$. Sa dérivée, multipliée par a^2 , a donc une partie principale de l'ordre $\frac{\omega}{n}$; donc l'ordre de F , pour le cycle envisagé, est ω , c'est-à-dire l'ordre total des contacts de a avec les branches de ce cycle.

Si O est sur C , q est lui-même évanouissant en O . Son ordre infinitésimal est au plus égal à celui de a ; soit $1 + \frac{\omega'}{n}$ cet ordre. La fonction $a^{-2}(a, q - ap)$ est de l'ordre $-2 \left(1 + \frac{\omega}{n}\right) + 1 + \frac{\omega'}{n}$. Sa dérivée, multipliée par a^2 , est alors de l'ordre $1 + \frac{\omega + \omega'}{n}$. L'ordre de F , pour le cycle envisagé, est ainsi $\omega + n + \omega'$, c'est-à-dire l'ordre total des contacts de a avec le cycle, plus le nombre des intersections de ce cycle avec q ; donc, en résumé :

Le nombre des plans normaux que l'on peut mener par un point à une courbe est égal à la somme du rang et du degré de cette courbe, diminuée de la somme totale des ordres de ses contacts avec le plan de l'infini et du nombre des intersections qu'elle a à l'infini avec une sphère quelconque.

Si la courbe est tracée sur une sphère, la somme des nombres $(n + \omega')$ est égale à son degré; donc, *sur une sphère, le nombre des arcs de grand cercle que l'on peut mener par un point normalement à une courbe algébrique est égal au rang de cette courbe diminué de la somme des ordres de ses contacts avec le plan de l'infini.*

31. Dans les quatre derniers numéros, je me suis occupé des covariants différentiels du premier ordre. Prenons maintenant des covariants du second ordre. Il n'existe pas d'invariant différentiel du second ordre; il en résulterait, en effet, l'existence d'un invariant de trois points dans l'espace, ce qui est impossible. En rai-

sonnant comme au n° 27, je sépare le nombre L en deux parties, dont l'une répond aux cycles de G qui rendent le covariant nul ou infini, quelles que soient les arbitraires du covariant, et dont l'autre répond aux zéros de ce covariant qui dépendent de ces arbitraires. Le raisonnement employé au n° 27 prouve, dans ce cas aussi, que chacun de ces derniers zéros est simple, pourvu qu'on suppose encore que les arbitraires du covariant restent des quantités littérales. La question nouvelle à résoudre se réduit donc uniquement à trouver les nombres l indépendants des arbitraires du covariant.

Je considère le covariant sous la forme $F_{\xi}(\xi)$ et je laisse les coordonnées quelconques relativement au cycle envisagé. Soient ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées de l'origine de ce cycle (n, i, ν) ; il est représenté par les équations

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 &= t^n, & \eta - \eta_0 &= A t^n + B t^{n+i} + C t^{n+i+\nu}, \\ \zeta - \zeta_0 &= A' t^n + B' t^{n+i} + C' t^{n+i+\nu} + \dots\end{aligned}$$

Les parties principales de $\xi, \eta, \zeta, \eta', \zeta', \eta'', \zeta''$, aux environs de l'origine du cycle, sont respectivement

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, A, A' \quad \text{et} \quad \frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) B t^{i-n}, \quad \frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) B' t^{i-n}.$$

Soit, dans F , une suite de termes homogènes et de degré α par rapport à η'' et ζ'' . La partie principale de cet ensemble de termes est de la forme

$$\left[\frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) t^{i-n} \right]^{\alpha} \varphi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, A, A', B, B'),$$

la fonction φ étant indépendante des nombres i, n . Par une substitution homographique, on peut, comme il est aisé de le voir, attribuer aux lettres qui figurent dans la parenthèse de φ des valeurs entièrement arbitraires. Cette substitution altérera les arbitraires de F . Mais ces dernières étant des données littérales, suivant notre hypothèse, on voit que toutes les quantités dont dépend φ sont arbitraires; donc φ n'est pas nul; donc l'ensemble des termes considérés a sa partie principale de l'ordre $\alpha(i-n)$.

La quantité α a, suivant les termes que l'on considère dans F ,

diverses valeurs. Soient β sa plus petite, et γ sa plus grande valeur. Si $i - n$ est positif, la plus petite valeur de $\alpha(i - n)$ est $\beta(i - n)$. Si, au contraire, $i - n$ est négatif, la plus petite valeur est $\gamma(i - n)$.

Je désigne par J la somme des quantités positives $i - n$, et par K la somme des quantités positives $n - i$ pour les cycles de G . La partie du nombre L qui ne dépend pas des arbitraires du covariant se trouve ainsi être égale à $\beta J - \gamma K$; donc le nombre des points de G , en chacun desquels ce covariant s'évanouit, et variables avec les arbitraires du covariant, est

$$(28) \quad N = \omega r + \theta m - \beta J + \gamma K.$$

L'exemple du n° 25 est un cas particulier de celui-ci. Pour cet exemple, les nombres β et γ sont égaux tous deux à l'unité; aussi a-t-on trouvé, conformément à (28),

$$(29) \quad \mu = 3(r - m) + (K - J) = 3(r - m) + \sum (n - i).$$

Entre (28) et (29), j'élimine J , et j'obtiens

$$(30) \quad N = \omega - 3\beta(r + \theta + 3\beta m + \beta\mu + \delta - \beta K).$$

THÉORÈME VIII. — *Le nombre des points d'une courbe gauche algébrique, en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique du second ordre, mise sous forme projective, et dont les données sont indépendantes de la courbe, est la somme de quatre nombres dont chacun est le produit d'un facteur dépendant de la courbe seule et d'un facteur dépendant de l'équation seule.*

32. Il est clair que tous ces résultats s'appliquent aux courbes planes : le théorème VII sans modification. Le théorème VIII y subit une simplification, attendu que, dans ce cas, le nombre β est nul. S'il s'agit, en effet, d'un covariant ne contenant que les variables ξ, τ , et que β ne soit pas nul, ce covariant contient le facteur τ'' et n'est pas indécomposable. J'ai démontré antérieurement, de deux manières différentes, ce cas particulier du théorème VIII.

On peut donner au théorème VIII diverses formes géométriques, parmi lesquelles je cite la suivante :

Dans une série doublement infinie de surfaces algébriques, le nombre des surfaces qui ont avec une courbe gauche algébrique un contact du second ordre est la somme de quatre nombres dont chacun est le produit d'un facteur dépendant de la courbe seule et d'un facteur dépendant de la série de surfaces seule.

33. Il n'est pas sans intérêt de savoir s'il existe des covariants différentiels du second ordre pour lesquels les quatre coefficients du second membre de (30) soient égaux à des nombres arbitrairement choisis.

Je désigne par $z_1, \dots, z_4$ les coordonnées homogènes d'un point et je dénote par des accents leurs dérivées prises par rapport à un paramètre quelconque.

Appelons, pour un instant, $u_1, \dots, u_6$ les six déterminants binaires $(z_i z_j)$, et $v_1, \dots, v_4$ les quatre déterminants ternaires $(z_i z_j z_k)$. Soit maintenant $[p, p', p'']$ une fonction rationnelle et entière des z , des u et des v , homogène et de degré p en z , homogène et de degré p' en u , homogène et de degré p'' en v . Je pose

$$(31) \quad F_i(z) = \Sigma [p, p', p''],$$

composant ainsi une fonction F par la somme de plusieurs fonctions analogues, sous la restriction que l'on ait toujours, δ et ω désignant des constantes,

$$(32) \quad \begin{cases} p + 2p' + 3p'' = \delta, \\ p' + 3p'' = \omega. \end{cases}$$

1° Si l'on opère sur les z une substitution linéaire et homogène, la même substitution s'étendant aussi aux z' et aux z'' , il est visible que la forme de la fonction F n'est pas altérée; ses coefficients seuls sont modifiés: ils subissent aussi une substitution linéaire. On peut donc considérer F comme inaltérée par une substitution homographique s'étendant aussi à ses coefficients.

2° Si l'on multiplie les z par une fonction quelconque γ de t , chaque fonction partielle $[p, p', p'']$ se multiplie par la puissance $(p + 2p' + 3p'')$ de γ . A cause de la première équation (32), l'exposant de cette puissance est le même pour toutes les fonctions partielles; donc F se multiplie par γ^{δ} .

3° Si, de même, on change la variable indépendante, à cause de la deuxième équation (32), F se multiplie par la puissance ω de la dérivée de la nouvelle variable.

A cause de ces trois propriétés, F est un covariant différentiel du second ordre. Il est aisé de voir, et je ne m'y arrête pas, que F est le type le plus général d'un tel covariant. Je vais chercher s'il est possible de déterminer F de manière que les coefficients du second membre de (30) soient égaux à des nombres arbitrairement choisis. Je me donne ainsi β , puis

$$\omega - 3\beta = g, \quad \theta + 3\beta = h, \quad \gamma - \beta = k.$$

D'après le n° 29, β est le minimum de p'' et γ son maximum ; donc d'abord β et h doivent être positifs. Se rappelant que θ n'est autre que $\delta - 2\omega$, on trouve aisément que, relativement au nombre p'' , les deux fonctions particelles extrêmes sont

$$[k + 3k, g - 3k, \beta + k], \quad [h, g, \beta].$$

On peut donc déterminer ces fonctions si l'on a

$$\beta \geq 0, \quad k \geq 0, \quad h \geq 0, \quad g \geq 3k.$$

Ainsi l'on peut répondre à la question proposée toutes les fois que les quatre nombres donnés sont positifs et que le premier est au moins égal au triple du quatrième.

On ne manquera pas de remarquer que, si les deux nombres β et k sont nuls, le covariant se réduit au premier ordre, en sorte que le théorème VII s'offre comme un cas particulier du théorème VIII.

34. Pour les covariants d'ordre supérieur au second, il n'existe pas de formule analogue à (30), composée d'un nombre fini de termes et applicable à tous les cas : c'est ce que j'ai déjà eu l'occasion de montrer quand il s'agissait des courbes planes. Mais si, au lieu d'envisager une courbe quelconque, on se borne à une courbe ne contenant que des singularités appartenant à un nombre fini de familles données, on obtient pour ces cas restreints, et quel que soit l'ordre du covariant, des formules analogues à (30).

J'envisage, par exemple, des courbes G ne contenant pas d'autre cycle singulier, au point de vue ponctuel, que des rebroussements

ordinaires (2, 1, 1). Soit λ l'ordre d'un covariant F , quand on y met pour les coordonnées les expressions

$$\xi = t^2, \quad \eta = A t^2 + \dots, \quad \zeta = B t^2 + \dots,$$

qui caractérisent le cycle (2, 1, 1) et où les coefficients sont laissés indéterminés.

Si G contient K pareils cycles, la partie correspondante du nombre L est λK ; donc

$$N = \omega r + \theta m - \lambda K.$$

D'ailleurs l'équation (29) se réduit ici à

$$\mu = 3(r - m) + K;$$

donc enfin

$$(33) \quad N = (\omega + 3\lambda)r + (\theta - 3\lambda)m - \lambda\mu.$$

Telle est la formule générale pour une équation différentielle d'ordre quelconque et pour une courbe ne possédant que des singularités ordinaires, pourvu qu'il y ait indépendance entre la courbe et les données de l'équation mise sous forme projective.

35. En dernier lieu, si l'on suppose une courbe gauche G sans singularité, on a simplement

$$(34) \quad N = \omega r + \theta m.$$

Dans une Note insérée au tome II de ce *Bulletin*, p. 70, je disais : « Il serait d'un très-grand intérêt de connaître le caractère général des propriétés des courbes qui ne dépendent que du degré et du nombre des points doubles apparents. » Ce caractère général n'est pas encore trouvé; mais on a ici la définition d'une catégorie importante de telles propriétés. On peut dire, en effet, que :

Sur une courbe sans singularité ponctuelle, le nombre des points en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique ne dépend, quant à la courbe [suivant la formule (34)], que du degré et du nombre des points doubles apparents.

36. Voici une application bien propre à faire juger de la facilité de la méthode actuelle.

Une surface de degré p est assujettie à passer par

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - k$$

points donnés et à avoir, avec une courbe gauche G , un contact d'ordre $k-1$. On demande le nombre des solutions quand G ne possède que des singularités ordinaires.

Il compose un déterminant Δ , en écrivant successivement tous les termes d'une forme quaternaire de degré p , comme il suit : les premières lignes s'obtiennent en mettant successivement, à la place des variables $z_1, \dots, z_4, \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - k$ systèmes de constantes. Les autres lignes s'obtiennent en y mettant successivement les z , puis les z' , ..., enfin les $z^{(k-1)}$. Ce déterminant est le covariant dont l'évanouissement répond à la question.

Le degré de Δ par rapport aux z , abstraction faite des indices de dérivation, est pk . La somme des indices de dérivation à chaque terme est

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2};$$

donc

$$\delta = pk, \quad \omega = \frac{k(k-1)}{2}, \quad \vartheta = \delta - 2\omega = k(p - k + 1).$$

Donc :

1° Si la courbe G , de rang r et de degré m , n'a pas de singularité ponctuelle, le nombre cherché est égal à

$$\frac{k(k-1)}{2} r + k(p - k + 1) m.$$

Ce résultat ne diffère pas de celui que l'on obtient dans la question analogue pour les courbes planes, suivant une formule due à M. de Jonquières ⁽¹⁾.

Si l'on suppose que G contienne des rebroussements, on trouve

(1) Voir le tome IV de ce *Bulletin*, p. 41.

aisément, pour le nombre λ (n° 33),

$$\lambda = - \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

Donc :

2° Si la courbe G contient K rebroussements ordinaires, le nombre cherché est

$$\frac{k(k-1)}{2} r + k(p-k+1)m + \frac{(k-1)(k+2)}{2} K.$$

Soit, par exemple, $p = 2, k = 10$. Alors :

Sur une courbe gauche, de degré m et de rang r , ayant K rebroussements ordinaires, sans autre singularité ponctuelle, le nombre des points en chacun desquels cette courbe a un contact du neuvième ordre avec une surface du second degré est égal à

$$45r - 70m + 36K.$$

37. J'ai à ajouter une remarque relative au théorème VIII. Je considère, comme au n° 32, une fonction telle que $[p, p', p'']$, et j'y remplace les coordonnées z par leurs expressions en fonction des coordonnées du point correspondant x sur la courbe Γ . Je rappelle que Γ est, comme au n° 6, la courbe correspondant à G dans une figure corrélatrice. Avec les coordonnées x , la fonction prend, on le voit aisément, la forme

$$[p'', p', p] \{xx'x''x'''\}^{p'+2p''}.$$

Pour qu'un covariant F , formé par une suite de fonctions partielles $[p, p', p'']$, se transforme ainsi en un covariant dont l'ordre ne dépasse pas le second, il faut et il suffit que $(xx'x''x''')$ soit en facteur commun, avec le même exposant, à tous les termes de F . A cause des équations (32), il en résulte que F se réduit à un seul terme. Ainsi :

Pour qu'un covariant du second ordre se transforme en un covariant du même ordre quand on l'applique à une figure corrélatrice, il faut et il suffit qu'il soit homogène par rapport aux dérivées secondes.

S'il en est ainsi, le covariant est de la forme $[h, g, \beta]$, et la

formule (30) se réduit à

$$(35) \quad N = gr + hm + \beta\mu.$$

Dans ce cas, la relation obtenue en égalant à zéro le covariant a lieu entre le point, la tangente et le plan osculateur seulement. Il n'y entre pas d'autre élément du second ordre. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉOREME IX. — Soit la figure composée d'un point a , d'une droite D passant en a et d'un plan p passant par D . Soit $F = 0$ une relation à laquelle doit satisfaire cette figure, et où les coordonnées de a , D , p entrent respectivement aux degrés h, g, β . Soit, d'autre part, une courbe G de degré m , de rang r , de classe μ , et à singularités quelconques. Le nombre des points a de G , en chacun desquels le point a , la tangente D et le plan osculateur p satisfont à la relation $F = 0$, est donné par la formule (35).

EXEMPLE. — Les trois droites joignant a aux intersections de p , avec trois droites données, doivent faire avec D un rapport anharmonique donné.

Alors $N = r + m + \mu$.

38. Dans les divers exemples que j'ai traités ici, j'ai pris les covariants différentiels sous la forme $F_i(z)$, c'est-à-dire que les coordonnées y étaient homogènes et la variable indéterminée. Le nombre δ y était alors en évidence. Si l'on a à envisager une équation différentielle sous la forme ordinaire, avec les coordonnées linéaires et la variable indépendante ξ , on peut calculer δ sans revenir à la forme $F_i(z)$, dont le calcul serait souvent pénible : il suffit, à cet effet, d'appliquer la remarque du n° 20. Soit, par exemple, à trouver le nombre des plans normaux de G , menés par un point (ξ, η, ζ) . On a alors, en coordonnées rectangulaires, l'équation

$$\xi_1 - \xi + (\eta_1 - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} + (\zeta_1 - \zeta) \frac{d\zeta}{d\xi} = 0.$$

Si l'on fait

$$\eta = A\xi + B + \frac{C}{\xi} + \dots, \quad \zeta = A'\xi + B' + \frac{C'}{\xi} + \dots,$$

le premier terme du premier membre de l'équation, ordonné suivant les puissances descendantes de ξ , est du degré 1; donc (n° 20) $\delta - 2\omega = 1$, ce qui est conforme au résultat du n° 29.

Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface; par M. G. FOURET.

(Séances des 24 janvier et 13 juin 1877.)

§ I. — NORMALES COMMUNES A DEUX COURBES PLANES ALGÈBRIQUES.

1. Considérons sur un même plan deux courbes planes algébriques (m, n) et (m', n') , la première d'ordre m et de classe n , la seconde d'ordre m' et de classe n' . Supposons-les indépendantes l'une de l'autre; supposons en outre qu'aucune d'elles ne passe par les ombilics ⁽¹⁾ et ne soit tangente à la droite de l'infini. Sous ces restrictions, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre des normales communes à deux courbes algébriques situées dans un même plan, dont les ordres sont respectivement m et m' , les classes n et n' , est égal à $mn' + m'n + nn'$.*

Ce théorème n'est pas nouveau : M. Chasles, dans ces dernières années, en a donné une démonstration fort simple, fondée sur le principe de correspondance ⁽²⁾. Le principal intérêt de la nouvelle démonstration que nous allons en donner est de conduire à la solution de la question analogue pour les surfaces. Voici cette démonstration :

2. Imaginons l'ensemble des courbes *parallèles* à la courbe (m, n) : il est bien clair que les points de contact de ces courbes avec la courbe (m', n') sont précisément les pieds, sur cette dernière courbe, des normales communes cherchées, et réciproquement. Or les courbes parallèles à (m, n) forment un *système*, dont les carac-

⁽¹⁾ Points imaginaires à l'infini communs à tous les cercles du plan.

⁽²⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 136.

téristiques, μ et ν , sont faciles à déterminer. En effet, le nombre μ de ces courbes qui passent par un point quelconque est égal au nombre des normales à (m, n) issues de ce dernier point; on a par conséquent $\mu = m + n$. En second lieu, le nombre ν des mêmes courbes qui sont tangentes à une droite quelconque est, comme on le voit aisément, égal au nombre des tangentes à (m, n) parallèles à la droite en question, d'où l'on conclut $\nu = n$. On sait, d'autre part, que le nombre des contacts des branches d'un système (μ, ν) avec une courbe algébrique d'ordre m' et de classe n' est égal à $n'\mu + m'\nu$ ⁽¹⁾. En substituant dans cette dernière expression à μ et à ν leur valeur, on obtient, pour le nombre des normales communes cherchées, $mn' + m'n + nn'$.

§ II. — NORMALES COMMUNES A DEUX SURFACES ALGÈBRIQUES.

3. Rappelons d'abord un théorème relatif aux systèmes de surfaces sur lequel nous allons nous appuyer. En désignant par μ, ν, ρ les caractéristiques d'un pareil système, c'est-à-dire les nombres des surfaces qui le composent, passant par un point quelconque, touchant un plan quelconque et tangentes à une droite quelconque, on a le théorème suivant :

Le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une surface algébrique d'ordre m , de classe n et de rang r , indépendante du système, est égal à $n\mu + m\nu + r\rho$ ⁽²⁾.

De ce théorème on tire immédiatement deux conséquences qui vont nous être utiles.

4. Considérons une surface algébrique (m, n, r) ne touchant pas le plan de l'infini et ne contenant pas l'ombilicale ⁽³⁾, et cherchons le nombre des normales à cette surface issues d'un point quelconque. Ce nombre n'est autre que le nombre des sphères, ayant pour centre commun ce dernier point, qui touchent la surface

(1) Voir *Bulletin de la Société*, t. V, p. 21.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 170. Voir la démonstration de ce théorème donnée par M. Brill dans le tome VIII des *Mathematischen Annalen* (1875).

(3) Conique imaginaire à l'infini, commune à toutes les sphères.

(m, n, r) . Or ces sphères forment un système indépendant de la surface, et les caractéristiques de ce système se voient immédiatement; on a $\mu = \nu = \rho = 1$. Le théorème que nous avons rappelé plus haut (3) peut donc s'appliquer, et l'on en conclut que :

Le nombre des normales menées d'un même point à une surface algébrique (m, n, r) , ne présentant à l'infini aucune particularité, est $m + n + r$.

5. On peut trouver de la même manière le nombre des normales communes à la surface (m, n, r) et à une droite quelconque D. Pour cela, considérons l'ensemble des cylindres de révolution qui ont pour axe commun cette droite : ces cylindres forment un système dont on obtient immédiatement les caractéristiques; on a $\mu = \rho = 1, \nu = 0$. Le nombre des points de contact de ces cylindres avec la surface (m, n, r) est précisément égal au nombre des normales communes à cette surface et à la droite D. Or ce nombre, donné par le théorème déjà invoqué (3), est égale à $n + r$. Par suite :

Le nombre des normales communes à une droite quelconque et à une surface (m, n, r) , ne présentant à l'infini aucune particularité, est égal à $n + r$.

6. Nous sommes maintenant à même de déterminer le nombre des normales communes à deux surfaces algébriques (m, n, r) , (m', n', r') , indépendantes l'une de l'autre, et ne présentant aucune particularité à l'infini, c'est-à-dire ne passant pas par l'ombilicale et ne touchant pas le plan de l'infini.

THÉORÈME. — *Le nombre des normales communes à deux surfaces algébriques, dont les ordres sont respectivement m et m' , les classes n et n' , les rangs r et r' , est $mn' + m'n + (n + r)(n' + r')$.*

En effet, considérons l'ensemble des surfaces parallèles à la surface (m, n, r) . Ces surfaces forment un système, dont les caractéristiques μ, ν, ρ , s'obtiennent aisément. Il est clair que le nombre des surfaces du système passant par un point quelconque est égal au nombre des normales abaissées de ce point sur (m, n, r) ; d'où $\mu = m + n + r$, comme nous l'avons vu plus haut (4). Le nombre

des surfaces du système tangentes à un plan quelconque est évidemment égal au nombre des plans tangents à (m, n, r) menés parallèlement au plan en question; d'où $\nu = n$. Enfin le nombre des surfaces du système tangentes à une droite quelconque est égal au nombre des normales communes à cette droite et à (m, n, r) , c'est-à-dire, comme nous l'avons vu (5), que l'on a $\rho = n + r$. Le système ainsi défini étant indépendant de la surface (m', n', r') , le nombre des points de contact des surfaces qui le composent avec la surface (m', n', r') est donné par le théorème fondamental énoncé ci-dessus (3). Mais ces points de contact sont précisément les pieds sur la surface (m', n', r') des normales communes à cette dernière surface et à la surface (m, n, r) . Ce dernier nombre est par suite égal à

$$\begin{aligned} n\mu + m\nu + r\rho &= n(m' + n' + r') + mn' + r(n' + r') \\ &= mn' + m'n + (n + r)(n' + r'). \end{aligned}$$

§ III. — NORMALES COMMUNES A DEUX COURBES ALGÈBRIQUES, PLANES OU GAUCHES, SITUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

7. La solution de cette question repose sur un théorème fondamental, relatif à un système de surfaces et à une courbe quelconque, plane ou gauche, que nous rappellerons d'abord :

Le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une courbe algébrique, plane ou gauche, d'ordre p et de classe q , indépendante du système, est égal à $q\mu + p\rho$ (1).

Nous allons déduire, comme corollaires de ce théorème, deux autres théorèmes qui nous seront utiles.

8. Considérons une courbe algébrique, plane ou gauche, d'ordre p et de classe q , n'ayant aucun contact avec le plan de l'infini et ne rencontrant pas l'ombilicale. Considérons, d'autre

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 170. Voir, pour la démonstration, le Mémoire déjà cité de M. Brill. Nous entendons ici par *classe de la courbe* le nombre des tangentes de cette courbe qui rencontrent une droite quelconque.

part, un système de sphères ayant pour centre commun un point o quelconque. Ces sphères, comme nous l'avons déjà remarqué (4), forment un système ($\mu = \nu = \rho = 1$), et, comme elles sont indépendantes de la courbe (p, q) , le nombre de leurs points de contact avec cette dernière courbe est fourni par le théorème que nous avons rappelé (7). D'ailleurs le nombre en question n'est autre que le nombre des normales abaissées du point o sur la courbe (p, q) ; par suite :

Le nombre des normales abaissées d'un point fixe sur une courbe gauche d'ordre p et de classe q est égal à $p + q$.

9. Prenons maintenant une droite quelconque D , et considérons l'ensemble des cylindres de révolution ayant pour axe commun cette droite. L'ensemble de ces cylindres forme un système, dont les caractéristiques déjà trouvées (5) sont $\mu = 1, \nu = 0, \rho = 1$. Les points de contact de ces cylindres avec la courbe (p, q) sont en même temps les pieds, sur cette courbe, des normales communes à (p, q) et à D . Le nombre de ces normales communes est par suite donné par le théorème du n° 7; d'où l'on conclut que :

Le nombre des normales communes à une droite D et à une courbe (p, q) est égal à $p + q$.

10. Cherchons maintenant le nombre des normales communes à deux courbes $(p, q), (p', q')$, indépendantes l'une de l'autre, ne touchant pas le plan de l'infini, et ne rencontrant pas l'ombilicale. Ce nombre est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre des normales communes à deux courbes algébriques, planes ou gauches, dont les ordres sont respectivement p et p' , et les classes q et q' , est égal à $(p + q)(p' + q')$.*

Pour démontrer ce théorème, considérons la surface formée en portant une même longueur sur toutes les normales à la courbe (p, q) , à partir de leur pied. En faisant varier cette longueur, on obtient une infinité de surfaces analogues à la précédente ⁽¹⁾, et dont l'ensemble forme un système. Les caractéristiques de ce système se

(¹) Ces surfaces constituent ce qu'on a l'habitude d'appeler des surfaces *canaux*.

déterminent aisément : le nombre μ des surfaces du système qui passent par un point quelconque est égal au nombre des normales menées de ce point à (p, q) , c'est-à-dire à $p + q$ (8). Le nombre ρ des surfaces du système qui touchent une droite quelconque est égal au nombre des normales communes à cette droite et à (p, q) : c'est encore $p + q$ (9) ⁽¹⁾. En observant que les points de contact des surfaces considérées avec (p', q') sont précisément les pieds, sur cette courbe, des normales communes à cette courbe et à la courbe (p, q) , on n'a plus qu'à appliquer le théorème du n° 7, et l'on trouve que le nombre des normales communes cherchées est $q\mu + p\rho = (p' + q')q + (p' + q')p = (p + q)(p' + q')$.

11. *Remarque.* — Quand les deux courbes (p, q) , (p', q') sont planes et situées dans un même plan, le nombre précédent se décompose en deux parties : l'une $pq' + p'q + qq'$ exprime le nombre des normales communes situées dans le plan commun (1); l'autre pp' est le nombre des points d'intersection des deux courbes. Ce dernier résultat s'explique du reste parfaitement, car la perpendiculaire au plan de la figure, en l'un quelconque des pp' points d'intersection des deux courbes, est une normale commune à ces deux courbes.

§ IV. — NORMALES COMMUNES A UNE COURBE ALGÈBRIQUE ET A UNE SURFACE ALGÈBRIQUE.

12. Considérons maintenant une surface (m, n, r) et une courbe (p, q) plane ou gauche, cette surface et cette courbe étant d'ailleurs indépendantes l'une de l'autre, et ne présentant aucune particularité par rapport au plan de l'infini. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre des normales communes à une surface (m, n, r) et à une courbe (p, q) , plane ou gauche, indépendante de la surface, est égal à $mq + (n + r)(p + q)$.*

(1) La troisième caractéristique r , dont nous aurons besoin plus loin, et qui exprime le nombre des surfaces du système tangentes à un plan quelconque, est égale à q ; car elle est égale, comme il est facile de le voir, au nombre des plans tangents à la courbe (p, q) parallèles au plan en question.

Nous pouvons démontrer ce théorème de deux manières : le nombre cherché est en effet égal, d'une part, au nombre des points de contact avec (p, q) des surfaces parallèles à (m, n, r) , de l'autre, au nombre des points de contact avec (m, n, r) des surfaces canaux ayant pour axe commun la courbe (p, q) . En suivant la première voie, le système des surfaces parallèles à (m, n, r) ayant pour caractéristiques : $\mu = m + n + r$, $\rho = n + r$, le nombre des contacts de ces surfaces avec (p, q) est (7) égal à

$$(m + n + r)q + (n + r)p = mq + (n + r)(p + q).$$

Par la seconde manière, on a, pour le système des surfaces canaux de (p, q) , $\mu = p + q$, $\nu = q$, $\rho = p + q$; le nombre des points de contact de ces surfaces avec (m, n, r) est (3)

$$n(p + q) + mq + r(p + q) = mq + (n + r)(p + q),$$

nombre déjà trouvé par la première méthode.

Remarque. — Nous sommes loin d'avoir épuisé les questions que soulève la recherche des normales communes ; mais il nous faut avouer qu'en dehors du cas de deux courbes planes situées dans un même plan, le problème devient beaucoup plus compliqué, lorsque les courbes ou surfaces que l'on considère touchent le plan de l'infini, que l'ombilicale est contenue sur les surfaces ou rencontre les courbes.

Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier ; par M. ÉDOUARD LUCAS.

1. On sait que, lorsque l'on remplace x par les nombres entiers consécutifs dans une fonction $f(x)$ entière et à coefficients entiers, ou dans une expression de la forme $(A, B, C, \dots, a, b, c, \dots, \text{entiers})$.

$$\varphi(x) = Aa^x + Bb^x + Cc^x + Dd^x + \dots,$$

les résidus des résultats de la substitution pour tous les modules premiers ou composés se reproduisent périodiquement, et l'amplitude de la période est, en général, pour un module premier p , égale au

module dans le cas de la fonction entière, et au module diminué de l'unité dans le cas de la fonction transcendante. Ces propriétés sont indiquées par les formules suivantes, pour k entier et positif :

$$\begin{aligned} f(x + kp) &\equiv f(x) \pmod{p}, \\ \varphi[x + k(p-1)] &\equiv \varphi(x) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Nous avons indiqué les résultats analogues pour les fonctions symétriques des racines des équations algébriques à coefficients commensurables. Nous montrerons que, dans le cas général, les coefficients différentiels des fonctions rationnelles de l'exponentielle e^x possèdent les propriétés numériques de la fonction φ .

Soit d'abord

$$\sec x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots;$$

on obtient, en multipliant le premier membre par $\cos x$ et le second par le développement de $\cos x$ en série, la relation

$$a_{2n} - \frac{a_{2n-2}}{2!} + \frac{a_{2n-4}}{4!} - \frac{a_{2n-6}}{6!} + \dots - \frac{a_2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n)!} = 0.$$

On en déduit le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre ⁽¹⁾

$$a_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2! & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

2. M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. LII, p. 161) a appelé *nombre d'Euler* les coefficients, pris en valeur absolue, déterminés par la relation

$$E_{2n} = (-1)^n 1.2.3 \dots (2n) a_{2n};$$

(1) J.-W.-L. GLAISHER, *Expressions for Laplace's coefficients, Bernoullian and Eulerian Numbers*, etc. (*The Messenger of Mathematics*, n° 61, 1876).

on a donc, par le changement de x en $x\sqrt{-1}$, la formule symbolique

$$(1) \quad u = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{Ex}$$

et, en général,

$$\frac{d^n u}{dx^n} = E_n u,$$

et, par l'application du calcul des résidus,

$$E_{2n} = \pm 2^{2n+1} \int_0^\infty \frac{t^{2n} dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}.$$

En chassant les dénominateurs dans l'équation (1), et en identifiant les coefficients de $\frac{x^n}{1.2.3\dots n}$, on a, pour $n > 1$, la relation récurrente

$$(2) \quad (E+1)^n + (E-1)^n = 0,$$

qui donne le déterminant

$$E_{2n} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & C_{2n}^3 & \dots & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix},$$

formé par les lignes de rang pair et les colonnes de rang impair du triangle arithmétique.

Les nombres eulériens sont entiers et impairs; Sherk a démontré qu'ils étaient terminés alternativement par 1 et 5 ⁽¹⁾. Ces propriétés sont des cas particuliers des suivantes.

3. Dans le triangle arithmétique, tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ ligne sont, pour p premier, divisibles par p , à l'exception des coefficients extrêmes, égaux à l'unité; ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne sont aussi divisibles par p , à l'exception des quatre coefficients extrêmes égaux à l'unité. Si l'on continue la formation du triangle arithmétique,

(1) Voir STERN, *Journal de Crelle*, t. 79, p. 67.

en ne conservant que les résidus suivant le module p , on reforme deux fois le triangle arithmétique des $(p-1)$ premières lignes; puis, à partir de la $(2p)^{\text{ième}}$ ligne, on le reforme trois fois; mais chacun de ces triangles est pris respectivement 1, 2, 1 fois; à partir de la $(3p)^{\text{ième}}$ ligne, il est répété quatre fois avec les coefficients 1, 3, 3, 1 de la troisième ligne, et ainsi de suite. On a donc, en général, pour p premier,

$$C_m^n \equiv C_{m_1}^{n_1} \times C_{\mu}^{\nu} \pmod{p},$$

m_1 et n_1 désignant les entiers de $\frac{m}{p}$ et de $\frac{n}{p}$, et μ et ν les résidus de m et de n suivant le module p . On a de même

$$C_{m_1}^{n_1} \equiv C_{m_2}^{n_2} \times C_{\mu_1}^{\nu_1} \pmod{p},$$

et, en général,

$$C_m^n \equiv C_{\mu_1}^{\nu_1} C_{\mu_2}^{\nu_2} C_{\mu_3}^{\nu_3} \dots \pmod{p},$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ désignant les résidus de m et des entiers contenus dans les fractions $\frac{m}{p}, \frac{m}{p^2}, \frac{m}{p^3}, \dots$, et de même pour $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$.

Quant à la $(p-1)^{\text{ième}}$ ligne du triangle arithmétique, elle est formée alternativement par les résidus $+1$ et -1 . La formule (2) donne

$$(E+1)^{p-1} + (E-1)^{p-1} = 0,$$

et, en prenant les résidus,

$$E_{p-1} + E_{p-3} + E_{p-5} + \dots + E_3 + E_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On a donc ce théorème :

Si p est un nombre premier, la somme des nombres eulériens, pris alternativement avec les signes $+$ et $-$, et dont l'indice est inférieur à p , est divisible par p .

Les premières valeurs de E sont données par les formules

$$\begin{aligned} E_2 + E_0 &= 0, \\ E_4 + 6E_2 + E_0 &= 0, \\ E_6 + 15E_4 + 15E_2 + E_0 &= 0, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

on a ensuite, à partir de $p + 1$, par congruence,

$$\left. \begin{array}{l} E_{p+1} + E_0 \equiv 0 \\ E_{p+2} + 3E_{p+1} + 3E_1 + E_0 \equiv 0 \\ E_{p+3} + 10E_{p+2} + 5E_{p+1} + 15E_1 + 10E_2 + E_0 \equiv 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \pmod{p}.$$

La comparaison des deux systèmes de formules donne successivement

$$\left. \begin{array}{l} E_{p+1} \equiv E_1 \\ E_{p+2} \equiv E_2 \\ E_{p+3} \equiv E_3 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \pmod{p}.$$

On a donc, en général, quel que soit l'entier positif k ,

$$E_n \equiv E_{n+k(p-1)} \pmod{p};$$

et, par suite :

Les résidus des nombres eulériens, suivant un module premier (ou composé), se reproduisent dans le même ordre, comme les résidus potentiels.

4. Si l'on pose

$$u^a = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^a = E_{a,0} + E_{a,1} \frac{x}{1} + E_{a,2} \frac{x^2}{1.2} + \dots \\ + E_{a,n} \frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \dots,$$

ou, sous la forme symbolique,

$$u^a = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^a = e^{E_a x},$$

les coefficients $E_{a,n}$ sont déterminés par la relation symbolique

$$E_{a,n} = [E + E' + E'' + \dots + E^{(a)}]^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de $E, E', E'', \dots$ par des indices, et supprimant ensuite les accents. Nous appellerons les nombres E_a les *nombres eulériens d'ordre a* ; ces nombres sont entiers, et leurs résidus, suivant un module premier, se reproduisent périodiquement; on démontrera, comme précédemment, que

l'on a

$$E_{a,n} \equiv E_{a,n+k(p-1)} \pmod{p}.$$

On a donc ce théorème :

Les résidus des coefficients différentiels d'une puissance entière et positive de $\sec x$, suivant un module premier, se reproduisent périodiquement.

Ces considérations s'appliquent, en général, aux coefficients différentiels d'une fraction rationnelle de e^x , mais dans certaines conditions, et par exemple à ceux de

$$\frac{\varphi'(1)}{\varphi(e^x)};$$

mais, dans le cas de la cosécante ou du développement de $\frac{1}{1-e^x}$, ce théorème n'a pas lieu, parce que $\varphi(1)$ est nul; les coefficients différentiels, qui sont ici les *nombre de Bernoulli* des divers ordres, ne sont plus entiers, et leurs dénominateurs contiennent la série indéfinie des nombres premiers.

Nous montrerons ultérieurement comment les réciproques de ces théorèmes conduisent à de nouveaux théorèmes analogues à la réciproque du théorème de Fermat, ou, avec des restrictions, à des théorèmes analogues au théorème de Wilson.

Sur les courbes unicursales de troisième classe; par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 novembre 1877.)

1. Soient A, B et C trois points d'une conique K et un point P pris arbitrairement dans son plan. Par les quatre points A, B, C et P faisons passer une conique arbitraire H et soit Q le quatrième point où cette conique rencontre K.

Cela posé, étant pris un point M arbitrairement sur K, menons la droite MP et joignons au point Q le point I, où MP coupe une seconde fois la conique H. La droite IQ coupe K en un second point α ; joignons-le au point M. La droite M α enveloppe, lorsque le point M se déplace sur la conique, une courbe qui est évidem-

ment de la troisième classe. Si, en effet, on mène la droite MQ rencontrant la conique H au point G , puis la droite GP rencontrant la conique K aux points β et γ , on voit que $M\beta$ et $M\gamma$ sont encore des tangentes à la courbe cherchée. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi toutes les tangentes passant par le point M ; donc l'enveloppe est de troisième classe. En faisant coïncider successivement M avec chacun des points A , B , C , on reconnaît facilement que l'enveloppe touche en ces points la conique K , les troisièmes tangentes que de chacun d'eux on peut mener à la courbe se rencontrant au point P .

L'enveloppe fait donc partie du faisceau formé par les courbes de troisième classe touchant aux trois points A , B , C la conique K et tangentes aux droites AP , BP et CP ; et il semble d'abord qu'en faisant varier la conique H on pourra engendrer de la façon que j'ai indiquée toutes les courbes du faisceau.

Pour se convaincre qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de remarquer que l'une des tangentes issues du point M (celle que j'ai désignée par $M\alpha$) se détermine individuellement et que d'ailleurs les points de la conique K se déterminent individuellement; l'enveloppe est donc la *courbe unicursale du faisceau*.

Les propriétés les plus simples des coniques montrent en effet que, le point M étant fixe, le point α est parfaitement déterminé, quelle que soit la conique que l'on fasse passer par les points A , B , C et P .

Par suite, dans la génération des tangentes à l'enveloppe, on pourra remplacer la conique H par un système de deux droites. Le point Q étant, par exemple, le point de rencontre AP avec K , on engendrera les diverses tangentes à la courbe de troisième classe en faisant décrire au point I la droite BC .

2. Quelques conséquences intéressantes résultent des considérations qui précèdent. En effet, des trois tangentes que du point M on peut mener à l'enveloppe, deux ($M\alpha$ et $M\beta$) rencontrent la conique K en deux points tels, que la corde $\alpha\beta$ qui les joint passe par le point fixe P .

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si une courbe unicursale de troisième classe est tritangente à une conique K , les trois tangentes que l'on peut mener à cette

courbe par un point quelconque de la conique rencontrent de nouveau cette conique en trois points. Un des côtés du triangle formé par ces trois points passe par un point fixe.

3. Supposons que la conique K soit un cercle ayant P pour centre ; on voit alors que l'angle $\beta M \alpha$ est droit.

Donc :

Si un cercle est tritangent à une courbe de troisième classe unicursale et si les normales, menées au cercle en ces points, sont tangentes à la courbe, deux des tangentes que de chacun des points du cercle on peut mener à la courbe font entre elles un angle droit.

La réciproque est également vraie :

Étant donnée une courbe de troisième classe, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit, la courbe est unicursale ; le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

Pour le démontrer, je remarquerai d'abord que, étant pris un point quelconque M sur le cercle, comme deux des tangentes, menées à la courbe par ce point, sont liées par une relation particulière, la troisième tangente se détermine individuellement ; donc la courbe est unicursale.

En second lieu, $M \alpha$ désignant la tangente qui passe par le point M et qui se détermine individuellement, il est clair que cette tangente, lorsque le point M se déplace, vient successivement coïncider avec chacune des tangentes à la courbe ; autrement la courbe se décomposerait en une conique et un point.

De là résulte que, une tangente quelconque à la courbe de troisième classe rencontrant le cercle en deux points, des deux perpendiculaires menées en ces points à la tangente l'une au moins est tangente à la courbe.

Menons maintenant une tangente commune au cercle et à la courbe ; cette tangente rencontrant le cercle en deux points confondus, d'après ce que je viens de dire, la normale au cercle sera tangente à la courbe. On ne peut, d'ailleurs, par le centre du cercle,

mener que trois tangentes à cette courbe ; donc les points de contact des tangentes communes se réduisent à trois.

Le cercle est donc tritangent à la courbe, et les normales au cercle, en ces points, lui sont également tangentes.

4. Les propositions précédentes se vérifient immédiatement sur les courbes unicursales de troisième classe les plus connues, telles que la *cardioïde* et l'*hypocycloïde à trois points de rebroussement*. On peut se proposer un problème analogue pour les courbes de quatrième classe :

Trouver toutes les courbes de quatrième classe par lesquelles le lieu des sommets des angles droits circonscrits se décompose en un cercle et une courbe résiduelle.

J'examinerai ce problème dans une prochaine communication.

Sur les développements en séries ; par M. ÉDOUARD LUCAS.

L'étude des nombres de Bernoulli est importante : 1° dans le Calcul des différences et des sommes, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de x dans la somme des puissances semblables des x premiers nombres entiers ; 2° dans le Calcul différentiel, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de la variable dans les développements en séries ; 3° dans le Calcul intégral, comme valeurs d'intégrales définies ; 4° dans l'Arithmétique supérieure, et principalement dans la théorie des résidus potentiels, aussi bien que dans celle de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p,$$

ainsi que l'ont montré Cauchy, Genocchi et Kummer.

Nous avons montré précédemment le grand avantage obtenu par l'emploi du calcul symbolique pour le calcul de ces nombres ⁽¹⁾,

⁽¹⁾ Comptes rendus de l'Académie des Sciences, septembre 1876.

et des nombres entiers qui proviennent du théorème de Staudt ⁽¹⁾, pour le calcul des sommes des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné ⁽²⁾, pour le calcul des coefficients des sommes successives ⁽³⁾.

Nous allons faire voir que l'application du calcul symbolique permet de simplifier la théorie des développements en séries et de généraliser des théorèmes bien connus, tels que ceux de Stirling et de Boole.

1. Soient $f_{1,n}$ le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de $u = f(x)$ en série convergente, et $f_{p,n}$ le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de u^p ; on a les formules symboliques

$$u = e^{f(x)} = f_{1,0} + f_{1,1} \frac{x}{1!} + f_{1,2} \frac{x^2}{2!} + f_{1,3} \frac{x^3}{3!} + \dots + f_{1,n} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$u^p = e^{pf(x)} = f_{p,0} + f_{p,1} \frac{x}{1!} + f_{p,2} \frac{x^2}{2!} + f_{p,3} \frac{x^3}{3!} + \dots + f_{p,n} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Nous dirons que les coefficients $f_{p,n}$ sont d'ordre p et de rang n : mais n sera toujours entier positif, et p quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Nous supposons, de plus,

$$f_{1,0} = 1, \quad f_{p,0} = 1, \quad f_{0,0} = 1, \quad f_{0,p} = 0,$$

et nous rappellerons qu'il faut toujours tenir compte de l'exposant zéro.

On peut calculer les coefficients d'ordre p au moyen des coefficients du premier ordre; en effet, on a la formule

$$(1) \quad f_{p,n} = [f'_1 + f''_1 + f'''_1 + \dots + f^{(p)}_1]^n,$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de $f'_1, f''_1, \dots, f^{(p)}_1$ par des seconds indices, et l'on supprime ensuite les accents.

En particulier, si l'on désigne par $p_n, q_n, r_n, \dots$ les nombres des arrangements de $p, q, r, \dots$ objets n à n , les développements

(1) *Annali di Matematica pura ed applicata*, Milano, 1877.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1877.

(3) *The Messenger of Mathematics*, Cambridge, octobre 1877.

symboliques

$$(1+x)^p = e^{px}, \quad (1+x)^q = e^{qx}, \quad (1+x)^r = e^{rx}, \quad \dots$$

donnent, par multiplication,

$$[p+q+r+\dots]_n = [p+q+r+\dots]^n;$$

c'est la formule du polynôme des factorielles.

D'autre part, si $f(x) = e^x$, on a

$$f_{1,n} = 1, \quad f_{p,n} = p^n,$$

ce qui est exact. La formule (1) exprime le coefficient d'ordre p et de rang n en fonction des n premiers coefficients du premier ordre.

On a aussi la relation

$$(2) \quad f_{p,n} = (f_{p-1} + f_1)^n,$$

et, plus généralement, pour

$$p = \lambda + \mu + \nu + \dots$$

la formule

$$(3) \quad f_{p,n} = (f_\lambda + f_\mu + f_\nu + \dots)^n,$$

et aussi, pour n différent de zéro,

$$(4) \quad 0 = (f_p + f_{-p})^n;$$

cette dernière formule donne la relation entre les coefficients d'ordres égaux et de signes contraires. Nous observerons d'ailleurs que les relations (2) et (4) donnent lieu à des déterminants qui expriment $f_{p,n}$ en fonction des f_{p-1} et des f_1 , ou en fonction des f_{-p} , et inversement.

Le calcul des f_p , pour p entier et positif, s'effectue plus avantageusement de la manière suivante. On a l'identité

$$e^{J_1 x} e^{J_1 x} = e^{J_1 x}$$

et, en prenant les dérivées des logarithmes des deux membres,

$$\frac{p f_1 e^{J_1 x}}{e^{J_1 x}} = \frac{f_p e^{J_1 x}}{e^{J_1 x}},$$

En identifiant les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$, on en déduit la relation

$$(5) \quad pf_1(f_1 + f_p)^n = f_p(f_1 + f_p)^n,$$

qui exprime $f_{p,n+1}$ en fonction des n premiers coefficients d'ordre p et des $n+1$ premiers coefficients du premier ordre; on peut en déduire $f_{p,n+1}$ par un déterminant ne contenant que les f_1 .

2. On a les développements bien connus

$$(6) \quad u = \frac{x}{e^x - 1} = e^{B_1 x},$$

$$(7) \quad S_{n-1}(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1} = \frac{(x+B_1)^n - B_1^n}{n},$$

dans lesquelles on remplace les exposants de B_1 par des *seconds indices*, et $B_{1,n}$ par le nombre de Bernoulli correspondant pris avec un signe et un indice convenables; ces nombres se calculent par la relation générale

$$(8) \quad F(x+B_1+1) - F(x+B_1) = F'(x),$$

F désignant une fonction quelconque. La formule (8) contient toutes les relations connues pour le calcul des nombres bernoulliens et un grand nombre d'autres. On tire immédiatement de la formule (7)

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = nS_{n-1}(x) + B_n \quad (1).$$

Cela posé, on a, pour les nombres bernoulliens d'ordre négatif,

$$e^{B_{-p}x} = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^p,$$

et par suite, en égalant les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$,

$$B_{-p,n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \\ \times \left[p^{p+n} - \frac{p}{1} (p-1)^{p+n} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (p-2)^{p+n} - \dots \right],$$

(1) J. BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 352. n° 351.

ou, par une formule connue du calcul des différences,

$$(9) \quad B_{-p,n} = \frac{\Delta^p o^{p+n}}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)};$$

on a, en particulier,

$$B_{-1,n} = \frac{1}{n+1}, \quad B_{-2,n} = \frac{2^{n+2} - 2}{(n+1)(n+2)}.$$

On peut obtenir les nombres de Bernoulli d'ordre positif par la méthode suivante : j'ai donné (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, septembre 1876) la formule

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^p F(x_1, x_2, \dots, x_p)}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_p} \\ = \Delta_{x_1=1, x_2=1, \dots, x_p=1}^p F[x_1 + B'_1, x_2 + B'_2, \dots, x_p + B'_p], \end{array} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de $B'_1, B'_2, \dots$ par des seconds indices, et l'on supprime les accents; par conséquent, si l'on pose

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n,$$

on obtient, en faisant ensuite $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$,

$$(11) \quad (B_p + p)^n - \frac{p}{1} (B_p + p - 1)^n + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (B_p + p - 2)^n \pm \dots \pm B_p^n = 0,$$

ou symboliquement

$$(12) \quad \Delta^p B_p^n = 0;$$

cette dernière peut s'écrire, en ordonnant suivant les seconds indices de B_p , sous la forme

$$(13) \quad (B_p + \Delta^p o)^n = 0,$$

dans laquelle on remplace les puissances de B_p par des seconds indices et les puissances α de $\Delta^p o$ par $\Delta^p o^\alpha$; celle-ci donne lieu à un déterminant; d'ailleurs on a encore

$$(14) \quad (B_p + B_{-p})^n = 0,$$

et l'on remplacera les B_{-p} par la formule (9).

3. Le calcul des B_p se fait plus rapidement par le procédé suivant : si l'on élimine e^x entre u^p et sa dérivée, on a l'équation

$$x \frac{du^p}{dx} = p(1-x)u^p - pu^{p+1};$$

donc, en égalant les coefficients de x^n , on trouve

$$(15) \quad pB_{p+1,n} = (p-n)B_{p,n} - pnB_{p,n-1}.$$

On a, en particulier, pour $p = 1$,

$$(16) \quad B_{2,n} = (1-n)B_{1,n} - nB_{1,n-1},$$

et, pour $q > 1$, selon que n est *pair* ou *impair*,

$$B_{2,2q} = (1-2q)B_{1,2q}, \quad B_{2,2q+1} = -(1+2q)B_{1,2q}.$$

Pour $p = 2$, on a encore

$$2B_{3,n} = (2-n)B_{2,n} - 2nB_{2,n-1},$$

et, en remplaçant les $B_{2,n}$ en fonction des $B_{1,n}$,

$$(17) \quad 2B_{3,n} = (n-1)(n-2)B_{1,n} + 3n(n-2)B_{1,n-1} + 2n(n-1)B_{1,n-2}.$$

Pour obtenir une formule plus générale, nous changerons n en $n-1$ dans la relation (15); nous avons ainsi

$$\begin{aligned} pB_{p+1,n} &= (p-n)B_{p,n} - pnB_{p,n-1}, \\ pB_{p+1,n-1} &= (p-n+1)B_{p,n-1} - p(n-1)B_{p,n-2}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux termes de cette dernière par $(p+1)n$ et ceux de la précédente par $p-n+1$, et retranchons; nous obtenons, en tenant compte de la formule (15),

$$\begin{aligned} (p+1)pB_{p+2,n} &= (p-n+1)(p-n)B_{p,n} \\ &\quad - (p-n+1)(2p+1)nB_{p,n-1} \\ &\quad + p(p+1)n(n-1)B_{p,n-2}. \end{aligned}$$

On obtiendra de même

$$\begin{aligned} (p+2)(p+1)pB_{p+3,n} &= (p-n+2)(p-n+1)(p-n)B_{p,n} \\ &\quad - (p-n+2)(p-n+1)[p+\overline{p+1}+\overline{p+2}]nB_{p,n-1} \\ &\quad + (p-n+2)[p(p+1)+p(p+2)+(p+1)(p+2)]n(n-1)B_{p,n-2} \\ &\quad - p(p+1)(p+2)n(n-1)(n-2)B_{p,n-3}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Pour $p = 1$,

$$1.2.3B_{1,n} = (-1)^2 n(n-1)(n-2)(n-3) \\ \times \left(\frac{B_{1,n}}{n} + 6 \frac{B_{1,n-1}}{n-1} + 11 \frac{B_{1,n-2}}{n-2} + 6 \frac{B_{1,n-3}}{n-3} \right);$$

on a, en général, la formule symbolique

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1.2.3 \dots p B_{p+1,n} \\ = (-1)^p n(n-1)(n-2) \dots (n-p) \beta^{p-p} (1+\beta)(2+\beta) \dots (p+\beta), \end{array} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de β par des indices, et faisant ensuite

$$\beta_q = \frac{B_{1,q}}{q}.$$

On vérifie cette formule *a posteriori*; elle exprime les nombres bernoulliens d'ordre $p+1$ en fonction linéaire de $p+1$ nombres bernoulliens consécutifs du premier ordre.

4. Nous indiquerons encore les relations des nombres de Bernoulli des divers ordres avec d'autres fonctions numériques. Posons dans la formule (15)

$$(19) \quad B_{p+1,n} = (-1)^n \frac{A_{p,n}}{C_{p,n}}, \quad C_{p,n} = \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{1.2 \dots n},$$

nous obtenons

$$(20) \quad A_{p,n} = A_{p-1,n} + p A_{p-1,n-1}.$$

C'est la relation qui existe entre les sommes des produits n à n des p premiers nombres entiers, et, puisque les conditions initiales sont les mêmes, les quantités $A_{p,n}$ sont égales à ces sommes. On a d'ailleurs, plus généralement,

$$(21) \quad A_{p+q-1}^n = A_{p-1}^{n-q} (A_{p-1} + p) (A_{p-1} + p+1) \dots (A_{p-1} + p+q-1),$$

en remplaçant les exposants de A_{p-1} par des seconds indices.

On a encore

$$x+1(x+2)(x+3) \dots (x+p) = x^p + A_{p,1}x^{p-1} + A_{p,2}x^{p-2} + \dots + A_{p,p},$$

et par conséquent

$$(22) \quad (x+1)(x+2)\dots(x+p) = (x - B_{p+1})^p.$$

En prenant r fois les différences, on a

$$(23) \quad \Delta^r (x - B_{p+1})^p = p(p-1)\dots(p-r+1)(x+r-1+B_{p-r+1})^{p-r},$$

et, en prenant r fois les sommes, on a

$$(24) \quad \frac{(x - B_{p+r+1})^r}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+r)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} (x - B_r)^{r-1} = (S_r - B_{p+1})^p,$$

$S_{r,n}$ désignant la $r^{\text{ième}}$ somme des puissances semblables $n^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres, et $S_{r,0}$ l'expression

$$S_{r,0} = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1)}{1 \cdot 2 \dots r}.$$

5. Les considérations exposées aux nos 2 et 3, pour les nombres de Bernoulli, s'appliquent encore aux coefficients des autres développements analogues, tels que ⁽¹⁾

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^{P_1 x} = \frac{-2x}{e^x + 1} & \text{avec } F(x + P_1 + 2) - F(x + P_1) = 2F'(x) - 2F'(x+1), \\ e^{R_1 x} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} & F(x + R_1 + 2) - F(x + R_1) = F'(x+1), \\ e^{E_1 x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} & F(x + E_1 + 4) - F(x + E_1) = 2F(x+3) - 2F(x+1). \end{array} \right.$$

6. Eisenstein a donné un élégant théorème pour obtenir les coefficients $f_{m,n}$ d'ordre m quelconque, lorsque l'on connaît ces coefficients pour toutes les valeurs entières et positives de m et de n . Soit encore

$$u = e^{f_1 x} \quad \text{et} \quad f_{1,0} = 1,$$

on a

$$u^m = (1 + \overline{u-1})^m = 1 + m(u-1) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (u-1)^2 + \dots;$$

le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans u^p est $f_{p,n}$, et, puisque $f_{0,n}$ est nul, le

⁽¹⁾ *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler* (*Annali di Matematica pura ed applicata*), p. 23, Milano, 1877.

coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans $(u-1)^p$ est donné par le développement de

$$(f_n - 1)^p,$$

dans lequel on remplace les exposants de f_n par des *premiers indices*; par conséquent, avec la même convention

$$\begin{aligned} f_{m,n} = m f_{1,n} + \frac{m(m-1)}{1.2} (f_n - 1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (f_n - 1)^3 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} (f_n - 1)^n; \end{aligned}$$

nous ne tenons pas compte des termes suivants qui ne contiennent pas x^n . Dans les seconds membres, le coefficient de $f_{r,n}$ est

$$\begin{aligned} \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} \left[1 - \frac{m-r}{1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-r} \frac{(m-r)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-r)} \right]; \end{aligned}$$

mais, en désignant par

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & a, & b, & c, & d, & \dots, & l, \dots, \\ 1, & A, & B, & C, & D, & \dots, & L, \dots \end{array}$$

les lignes de rang $q-1$ et q du triangle arithmétique, on a

$$A = 1 + a, \quad B = a + b, \quad C = b + c, \quad D = c + d, \quad \dots,$$

et aussi

$$1 - A + B - C + D - \dots \pm L = \pm l,$$

on a, par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 - q + \frac{q(q-1)}{1.2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} \\ + (-1)^s \frac{q(q-1)\dots(q-s+1)}{1.2\dots s} = (-1)^s \frac{(q-1)(q-2)\dots(q-s)}{1.2\dots s}. \end{aligned}$$

Cette formule subsiste pour q quelconque, et, en faisant $q = m-r$ et $s = n-r$, on en conclut que le coefficient de $f_{r,n}$ est égal à

$$(-1)^{n-r} \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} \frac{(m-r-1)(m-r-2)\dots(m-n)}{1.2\dots(n-r)}$$

ou

$$(-1)^{n-r} \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} \frac{1}{m-r};$$

donc

$$f_{n,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} \\ \times \left[(-1)^{n-1} \frac{n}{1} \frac{f_{1,n}}{m-1} + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{f_{2,n}}{m-2} + \dots + \frac{f_{n,n}}{m-n} \right],$$

et enfin

$$(26) \quad f_{n,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} (\varphi-1)^n,$$

en remplaçant les exposants de φ par des indices, et posant

$$\varphi_r = \frac{f_{r,n}}{m-r}.$$

7. Herschel a donné, sous forme symbolique, le développement de $\varphi(e^x)$ suivant les puissances de x ; on a, en effet,

$$(27) \quad \varphi(e^x) = e^{\varphi(1+\Delta)x},$$

en remplaçant dans le second membre les puissances de $\varphi(1+\Delta)$ o par

$$\varphi(1+\Delta)o^n = \varphi(1)o^n + \varphi'(o) \frac{\Delta o^n}{1} + \varphi''(1) \frac{\Delta^2 o^n}{1.2} + \dots,$$

$\Delta^p o^n$ désignant, suivant l'usage, la $p^{\text{ième}}$ différence de x^n pour $x = o$. Soit, par exemple,

$$\varphi(e^x) = \frac{e^x - 2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}, \quad \varphi(1+\Delta) = \frac{2+2\Delta}{2+\Delta^2};$$

on a, pour les nombres eulériens, la relation

$$(28) \quad E_n = (1+\Delta) \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^4}{2^2} - \frac{\Delta^6}{2^3} + \dots \right),$$

de laquelle on peut encore déduire la périodicité des résidus de E_n suivant un module premier.

8. Stirling et Boole ont donné d'autres développements en séries

qui sont des cas particuliers du suivant. Soit, en général,

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F(x)}{Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + \dots} \\ = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots + a_n \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \dots \end{array} \right.$$

une fonction développée en série convergente suivant les puissances positives et entières de x ; en écrivant le second membre sous la forme symbolique e^{ax} , et en désignant par $f(x)$ une fonction quelconque et par h l'accroissement de x , on a le développement

$$(30) \quad F(hf) = Ae^{ahf(x+ah)} + Be^{ahf(x+bh)} + Ce^{ahf(x+ch)} + \dots,$$

dans lequel on remplace $h^0 f^0$ par $f(x)$, $h^n f^n$ par $h^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, et $f^n(x + \alpha h)$ par $\frac{d^n f(x + \alpha h)}{dx^n}$.

En effet, soit $f(x) = ge^{kx}$, on a

$$\frac{d^n f(x + \alpha h)}{dx^n} = ge^{k(x+\alpha h)} k^n,$$

et par suite

$$\begin{aligned} F(hf) &= ge^{kx} F(hk), \\ Ae^{ahf(x+ah)} &= ge^{kx} A^{ahk} e^{ahk}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &Ae^{ahf(x+ah)} + Be^{ahf(x+bh)} + Ce^{ahf(x+ch)} + \dots \\ &= ge^{kx} [Ae^{ahk} + Be^{bhk} + Ce^{chk} + \dots] e^{ahk} = ge^{kx} F(hk). \end{aligned}$$

Ainsi le développement a lieu pour ge^{kx} quels que soient g et k ; il a donc lieu généralement.

En particulier, on déduit des développements

$$\frac{x}{e^x - 1} = e^{Rx}, \quad \frac{-2x}{e^x + 1} = e^{Rx}, \quad \frac{x}{e^x - e^{-x}} = e^{Rx}, \quad \frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{Rx}$$

les formules

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} hf'(x) = e^{Rhf(x+h)} - e^{Rhf(x)}, \\ -2hf'(x) = e^{Rhf(x+h)} + e^{Rhf(x)}, \\ hf'(x) = e^{Rhf(x+h)} - e^{Rhf(x-h)}, \\ 2f(x) = e^{Rhf(x+h)} + e^{Rhf(x-h)}; \end{array} \right.$$

les deux premiers développements correspondent aux formules de Stirling et de Boole.

Au moyen du théorème d'Herschel, on peut présenter la formule (30) sous une autre forme. On observera d'ailleurs que ces considérations s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables.

Sur la multiplication des fonctions elliptiques;
par M. LAGUERRE.

(Séance du 4 avril 1877.)

1. Je rappellerai d'abord une formule importante due à M. Hermite ⁽¹⁾.

Étant donnée une forme homogène, à deux variables et du degré m , $U(x, y)$, si l'on pose, suivant l'usage habituel,

$$U_1 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dx}, \quad U_2 = \frac{1}{m} \frac{dU}{dy},$$

on a identiquement

$$(1) \quad \begin{cases} U(\lambda x - U_1, \lambda y + U_2) \\ = U \left[\lambda^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A \lambda^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B \lambda^{n-3} + \dots \right], \end{cases}$$

$A, B, \dots$ désignant des covariants de la forme U .

Je transformerai cette formule en posant

$$\lambda x - U_1 = t\xi, \quad \lambda y + U_2 = t\eta;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\xi U_1 + \eta U_2}{x\eta - y\xi}, \quad t = \frac{U}{x\eta - y\xi},$$

ou, en posant, pour abréger, $\xi U_1 + \eta U_2 = \Delta$, $x\eta - y\xi = \omega$,

$$\lambda = \frac{\Delta}{\omega}, \quad t = \frac{U}{\omega}.$$

⁽¹⁾ *Deuxième Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 25).

En remplaçant respectivement, dans l'équation (1), $\lambda x = U_1$, $\lambda x = U_2$, λ et t par leurs valeurs, il viendra

$$(2) \quad \begin{cases} U^{n-1}(x, y) U(\xi, \eta) = \Delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A \Delta^{n-2} \omega^2 \\ \quad \quad \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B \Delta^{n-3} \omega^3 + \dots \end{cases}$$

Si l'on suppose que U soit une forme du quatrième degré, en désignant par H son hessien, par J son covariant cubique du sixième degré, et par S son invariant quadratique, il viendra

$$(3) \quad U^3(x, y) U(\xi, \eta) = \Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4.$$

2. En extrayant la racine carrée du premier membre, on obtient la relation suivante :

$$U^2 U(\xi, \eta) = (\Delta^2 + 3H\omega^2)^2 + \omega^2 [4J\Delta + (SU^2 - 12H^2)\omega],$$

et l'on voit, en vertu du théorème fondamental d'Abel, que l'intégrale algébrique entière de l'équation différentielle

$$\frac{3dx}{\sqrt{U(x, y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}},$$

où les quantités η et y doivent, ainsi que dans ce qui suit, être remplacées par l'unité, est fournie par l'équation

$$4J(\xi U_1 + \eta U_2) + (SU^2 - 12H^2)(x\eta - y\xi) = 0.$$

3. On obtient avec une égale facilité la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par 5, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(4) \quad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{5dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Désignant, en effet, par a un covariant inconnu de U , il suffira de déterminer ce covariant, de telle sorte que le reste de l'opération, dans l'extraction de la racine carrée de

$$(\Delta + a\omega)^2 [\Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4],$$

soit divisible par ω^2 . On aura, en effet, identiquement

$$U(\Delta + a\omega)^2 U(\xi, \eta) = P^2 + (x\eta - y\xi)^2 [Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi)];$$

d'où il suit, en vertu du théorème d'Abel, que l'intégrale cherchée est fournie par la résolution de l'équation

$$Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi) = 0.$$

Pour effectuer le calcul, remplaçons pour un instant Δ par z et ω par 1; on trouvera aisément

$$\begin{aligned} & (z + a)^2 (z^4 + 6Hz^3 + 4Jz + SU^2 - 3H^2) \\ & (z^4 + az^3 + 3Hz^2 + 2Jz + 3aH)^2 + (SU^2 - 12H^2 + 4aJ)z^2 \\ & + [2a(SU^2 - 12H^2) + 4(a^2 - 3H)J]z \\ & + a^2(SU^2 - 12H^2) - 4J^2 - 12aJH; \end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de z^2 , on a

$$a = \frac{12H^2 - SU^2}{4J},$$

et le reste de l'opération de l'extraction de la racine carrée devient

$$\begin{aligned} & - \frac{[SU^2 - 12H^2 + 48HJ^2]}{4J} z \\ & + \frac{[SU^2 - 12H^2 - 48HJ^2 - SU^2 - 12H^2 - 64J^2]}{16J^2}. \end{aligned}$$

L'intégrale algébrique de l'équation (5) est donc donnée par l'équation

$$\begin{aligned} & 4J[SU^2 - 12H^2 + 48HJ^2] \xi U_1 + \eta U_2 \\ & + [SU^2 - 12H^2 - 48HJ^2 - SU^2 - 12H^2 - 64J^2] x\eta - y\xi = 0. \end{aligned}$$

4. On trouverait de même la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par un nombre impair quelconque n , ou, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$y^2 = \frac{d\xi}{dx} = \frac{n dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Le problème revient, comme on le voit par ce qui précède, à déterminer deux polynômes entiers $F(x)$ et $G(x)$ qui soient respectivement

ment du degré $\frac{n-3}{2}$ et du degré $\frac{n+1}{2}$, et tels que l'on ait

$$(6) \quad F^2(z) W(z) = f^2(z) + \alpha z + \beta,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$W(z) = z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2,$$

et où α et β désignent des covariants de U indépendants de z .

La première méthode qui se présente pour résoudre ce problème est celle que j'ai employée dans les exemples précédents; en mettant en évidence les $\frac{n-3}{2}$ coefficients actuellement indéterminés de $F(z)$, et extrayant la racine de $F^2(z) W(z)$, on profitera de l'indétermination de ces coefficients pour annuler les coefficients des $\frac{n-3}{2}$ premiers termes du reste, qui sera nécessairement de la forme

$$\alpha z + \beta,$$

α et β étant des fonctions connues des covariants de U .

L'intégrale cherchée de l'équation (5) sera alors donnée par la relation

$$\alpha(\xi U_1 + \eta U_2) + \beta(x\eta - y\xi) = 0.$$

Mais on peut rattacher la détermination des polynômes $F(z)$ et $f(z)$, et par conséquent du reste $\alpha z + \beta$, à la réduction de l'expression $\sqrt{W(z)}$ en fonction continue.

De l'équation (6) on déduit, en effet,

$$F(z) \sqrt{W(z)} = f(z) + \frac{\alpha z + \beta}{F(z) \sqrt{W(z)} + f(z)};$$

le dénominateur de la fraction $\frac{\alpha z + \beta}{F(z) \sqrt{W(z)} + f(z)}$ est du degré $\frac{n+1}{2}$, d'où il suit que le développement de $F(z) \sqrt{W(z)} - f(z)$

commence par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^{\frac{n-3}{2}+1}}$.

La fraction $\frac{f(z)}{F(z)}$ est donc une des réduites obtenues en développant $\sqrt{W(z)}$ en fraction continue, celle dont le dénominateur est du degré $\left(\frac{n-3}{2}\right)$.

Sur la transformation des fonctions elliptiques;
par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 novembre 1877.)

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. En désignant par y_1 une quantité égale à l'unité et introduite pour rendre les formules homogènes, soit

$$F(x_1, y_1) = Ax_1^4 + 4Bx_1^2y_1^2 + 6Cx_1^2y_1^2 + 4Dx_1y_1^3 + Ey_1^4$$

un polynôme du quatrième degré en x_1 .

Soit, de plus,

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = dv,$$

X et Y désignant des fonctions de v dont l'une peut être choisie arbitrairement.

En dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à la variable v , et en faisant, pour abréger,

$$T = YX' - XY',$$

l'équation précédente devient

$$F(X, Y) = T^2.$$

On a évidemment

$$T' = YX'' - XY'';$$

et l'on pose, en outre,

$$\Theta = YX' - XY',$$

en sorte que, des relations précédentes, on déduit

$$\begin{aligned} YX'T &= X\Theta + XT' \\ YX'T &= Y\Theta + Y\Theta' \end{aligned}$$

En employant une notation bien connue, je poserai

$$F_{11} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dX^2}, \quad F_{12} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dX dY}, \quad F_{22} = \frac{1}{12} \frac{d^2 F(X, Y)}{dY^2};$$

en vertu de la propriété fondamentale des polynômes homogènes, l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

$$X^2 F_{11} + 2XY F_{12} + Y^2 F_{22} = T^2.$$

A cette relation nous pouvons joindre les deux suivantes, que l'on obtient en prenant ses deux premières dérivées par rapport à y :

$$\begin{aligned} X'X.F_{11} + (XY' + YX')F_{12} + Y'Y.F_{22} &= \frac{TT'}{2}, \\ (XX'' + 3X'^2)F_{11} + (XY'' + YX'' + 6X'Y')F_{12} \\ &\quad + (YY'' + 3Y'^2)F_{22} = \frac{TT'' + T'^2}{2}. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à F_{11} , F_{12} et F_{22} , il vient

$$\begin{aligned} 3T^2 F_{11} &= Y^2 \frac{T^2 T''}{2} - 3YY'T'T' + (3Y'^2 T + Y^2 \Theta) T^2, \\ 3T^2 F_{12} &= -XY \frac{T^2 T''}{2} + \frac{3}{2} (YX' + XY') T^2 T' - (3X'Y'T' + XY\Theta) T^2, \\ 3T^2 F_{22} &= X^2 \frac{T^2 T''}{2} - 3XX'T'T' + (3X'^2 T + X^2 \Theta) T^2. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par ξ^2 , la deuxième par $2\xi\eta$, la troisième par η^2 , ξ et η désignant des quantités arbitraires, et faisons la somme des résultats obtenus : il viendra

$$\begin{aligned} 3T^2 (\xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22}) \\ = T^2 \left(\frac{T'' + 2\Theta}{2} \right) (Y\xi - X\eta)^2 \\ - 3T^2 T' (Y\xi - X\eta) (Y'\xi - X'\eta) + 3T^2 (Y'\xi - X'\eta)^2, \end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant $T'(Y'\xi - X'\eta)$ par sa valeur

$$\Theta(Y\xi - X\eta) + T(Y''\xi - X''\eta),$$

que l'on déduit des équations (3),

$$(4) \quad \begin{cases} \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} \\ = (Y\xi - X\eta)^2 \left(\frac{T'' - 4\Theta}{6T} \right) \\ + (Y'\xi - X'\eta)^2 - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{cases}$$

2. Posons, pour abréger,

$$(5) \quad \frac{T'' - 4\Theta}{6T} = \frac{YX'' - XY'' - 3(Y'X'' - X'Y'')}{6(YX' - XY')} = \varphi.$$

L'équation (4) deviendra

$$(6) \quad \begin{cases} \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} = \varphi(Y\xi - X\eta)^2 + (Y'\xi - X'\eta)^2 \\ - (Y\xi - X\eta)(Y''\xi - X''\eta). \end{cases}$$

Comme dans cette formule ξ et η sont arbitraires, elle tient lieu des trois relations suivantes :

$$(6)' \quad \begin{cases} F_{11} = AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi Y^2 + Y'^2 - YY'', \\ 2F_{12} = 2BX^2 + 4CXY + 2DY^2 \\ = -2\varphi XY + YX'' + XY'' - 2X'Y', \\ F_{22} = CX^2 + 2DXY + EY^2 = \varphi X^2 + X'^2 - XX'' \quad (1). \end{cases}$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la relation (2); réciproquement, si, φ désignant une fonction arbitraire de ν , on détermine des fonctions X et Y satisfaisant aux trois relations (6)', on voit que $y_1 = \frac{X}{Y}$ est une intégrale de l'équation (1).

En faisant, en effet, dans la relation (6),

$$\xi = X \quad \text{et} \quad \eta = Y,$$

il vient

$$F = (Y'X - XY')^2.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultanées (6)', dans lequel φ est une fonction

(1) Sur ces formules, voir EISENSTEIN, *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* (*Mathematische Abhandlungen*, p. 167).

arbitraire de ν , et à cette équation on peut adjoindre l'équation (5), où, comme on le voit, n'entrent pas les coefficients du polynôme F.

En particulier, si φ est une constante, les fonctions X et Y, satisfaisant aux relations (6)', donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de M. Weierstrass.

II. — FORMULES DE JACOBI.

3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(7) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

où $f(x, y)$ désigne un polynôme quelconque du quatrième degré en x , la variable y étant introduite pour rendre l'expression homogène et étant égale à l'unité.

Soit

$$x_1 = \frac{X}{Y}$$

une intégrale de cette équation, X et Y étant des fonctions entières de x ; soit, de plus, dv la valeur commune des deux membres de l'égalité (7).

Si, en vertu de l'égalité

$$(7') \quad \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}} = dv,$$

on suppose X et Y exprimés en fonction de ν , on voit que ces fonctions satisfont au système d'équations (5) et (6).

Je transformerai ces équations, en supposant que X et Y sont exprimés en fonction de x . A cet effet, en introduisant les dérivées prises par rapport à x , nous aurons, en vertu de la relation (7)',

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{dx} \sqrt{f}, & X'' &= \frac{d^2X}{dx^2} f + \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \frac{df}{dx}, \\ X''' &= \frac{d^3X}{dx^3} f \sqrt{f} + \frac{3}{2} \frac{d^2X}{dx^2} \frac{df}{dx} \sqrt{f} + \frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \sqrt{f}, \\ Y' &= \frac{dY}{dx} \sqrt{f}, & Y'' &= \frac{d^2Y}{dx^2} f + \frac{1}{2} \frac{dY}{dx} \frac{df}{dx}, \\ Y''' &= \frac{d^3Y}{dx^3} f \sqrt{f} + \frac{3}{2} \frac{d^2Y}{dx^2} \frac{df}{dx} \sqrt{f} + \frac{1}{2} \frac{dY}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \sqrt{f}. \end{aligned}$$

En remplaçant X', X'', X''', Y', Y'' et Y''' par ces valeurs dans les équations (5) et (6), il viendra

$$(8) \quad \varphi = \frac{\left[\left(Y \frac{d^3 X}{dx^3} - 3 \frac{dY}{dx} \frac{d^2 X}{dx^2} + 3 \frac{d^2 Y}{dx^2} \frac{dX}{dx} - X \frac{d^3 Y}{dx^3} \right) f \right] + \frac{3}{2} \left(Y \frac{d^2 X}{dx^2} - X \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) \frac{df}{dx}}{6 \left(Y \frac{dX}{dx} - X \frac{dY}{dx} \right)} + \frac{1}{12} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

et

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22} &= \varphi(\xi Y - \eta X)^2 + f \left(\xi \frac{dY}{dx} - \eta \frac{dX}{dx} \right)^2 \\ &\quad - f(\xi Y - \eta X) \left(\xi \frac{d^2 Y}{dx^2} - \eta \frac{d^2 X}{dx^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{df}{dx} (\xi Y - \eta X) \left(\xi \frac{dY}{dx} - \eta \frac{dX}{dx} \right). \end{aligned} \right.$$

Le point important dans la proposition due à Jacobi consiste en ce que φ est un polynôme du second degré en x . Pour l'établir, je remarquerai que la relation précédente a lieu, quelles que soient les quantités ξ et η ; d'ailleurs, X et Y étant premiers entre eux, on pourra prendre pour ξ et η des polynômes entiers, tels que

$$\xi Y - \eta X = 1.$$

L'équation (9) montre immédiatement que φ est aussi un polynôme entier, et la formule (8), que ce polynôme est du second degré.

III. — TRANSFORMATION DES FORMULES DE JACOBI.

4. Pour transformer les relations précédemment obtenues, je remarquerai que, si α, β, γ et δ sont des constantes arbitraires reliées par la relation

$$(10) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

l'équation (9) doit encore être identiquement satisfaite, pour une détermination convenable du polynôme φ , par les polynômes que l'on obtient en remplaçant, dans X, Y, f et f' , x par $\alpha x_0 + \gamma y_0$ et y par $\beta x_0 + \delta y_0$, pourvu qu'on rétablisse l'homogénéité de la formule, en multipliant le premier membre par γ^2 .

Désignons, en général, par (W) ce que devient une fonction quelconque W de x et de y , quand on y effectue la substitution indiquée; il est clair que l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{d(X)}{dx_0} &= \alpha \left(\frac{dX}{dx} \right) + \beta \left(\frac{dX}{dy} \right), \\ \frac{d^2(X)}{dx_0^2} &= \alpha^2 \left(\frac{d^2X}{dx^2} \right) + 2\alpha\beta \left(\frac{d^2X}{dx dy} \right) + \beta^2 \left(\frac{d^2X}{dy^2} \right),\end{aligned}$$

et des relations analogues relativement à $\frac{d(Y)}{dx_0}$, $\frac{d^2(Y)}{dx_0^2}$ et $\frac{d(f)}{dx_0}$.

Imaginons maintenant que, cette substitution effectuée dans la relation (9), on remplace de nouveau $\alpha x_0 + \gamma y_0$ par x et $\beta x_0 + \delta y_0$ par y ; on a alors, en vertu de l'équation (10),

$$y_0 = \alpha y - \beta x;$$

φ se change en un polynôme Φ homogène et du second degré par rapport à x et y , homogène et du second degré par rapport à α et β .

Si, de plus, on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned}X^{(1)} &= \alpha \frac{dX}{dx} + \beta \frac{dX}{dy}, \\ Y^{(1)} &= \alpha \frac{dY}{dx} + \beta \frac{dY}{dy}, \\ f^{(1)} &= \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy}; \\ X^{(2)} &= \alpha^2 \frac{d^2X}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2X}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2X}{dy^2}, \\ Y^{(2)} &= \alpha^2 \frac{d^2Y}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2Y}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2Y}{dy^2}, \quad \dots,\end{aligned}$$

l'équation (9) deviendra

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha y - \beta x)^2 (\xi^2 F_{11} + 2\xi\eta F_{12} + \eta^2 F_{22}) \\ &= \Phi(\xi Y - \eta X)^2 + f[\xi Y^{(1)} - \eta X^{(1)}]^2 \\ &\quad - f(\xi Y - \eta X) [\xi Y^{(2)} - \eta X^{(2)}] \\ &\quad - \frac{1}{2} f^{(1)}(\xi Y - \eta Y) [\xi Y^{(1)} - \eta X^{(1)}], \end{aligned} \right.$$

équation qui doit être identiquement satisfaite, quels que soient α , β , ξ et η , si $x_1 = \frac{X}{Y}$ est une intégrale rationnelle de l'équation différentielle

$$(7) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

5. Pour déterminer la forme du polynôme Φ , je remarque que, ce polynôme étant homogène et du second degré par rapport à x et y et par rapport à α et β , on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi = \alpha^2 W_{11} + 2\alpha\beta W_{12} + \beta^2 W_{22} \\ + (\alpha y - \beta x)(\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2) + k(\alpha y - \beta x)^2, \end{aligned}$$

W désignant un polynôme inconnu, homogène et du quatrième degré en x et y , Ω un polynôme inconnu homogène et du second degré par rapport aux mêmes variables, et k une quantité constante.

Faisons maintenant, dans l'identité (11),

$$\alpha = x + \rho\alpha' \quad \text{et} \quad \beta = y + \rho\beta';$$

le premier membre de cette identité devient divisible par ρ^2 ; le terme constant et le terme en ρ doivent donc manquer dans le développement du second membre. En faisant ce développement, on trouve facilement

$$W = mf,$$

m désignant le degré de la transformation, c'est-à-dire le degré des deux polynômes X et Y , puis $\Omega = 0$.

Le polynôme Φ est donc complètement déterminé, sauf le facteur constant k , et l'on a

$$(12) \quad \Phi = m(x^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22}) + k(\alpha y - \beta x)^2.$$

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1877,

PRÉSIDENTE DE M. MANNHEIM.

Communications :

M. Édouard Lucas : *Sur la Géométrie des quinconces ; 2° Sur les congruences des nombres eulériens et les coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier.*

M. le comte Hugo : *Sur quelques particularités de la conjonction de Saturne et de Mars.*

M. Halphen : *Sur les singularités des courbes gauches.*

M. Fouret : *Démonstration et extension à l'espace d'une loi donnée par M. Chasles pour les lieux géométriques du plan.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1877,

PRÉSIDENTE DE M. MANNHEIM.

M. le comte Hugo adresse une Note sur l'expression de π dans les divers systèmes de numération.

Présentation de nouveaux Membres : M. DE PRESLES, sous-intendant militaire à Évreux, est présenté par MM. Laguerre et Mannheim.

M. LAFON, professeur au Lycée Charlemagne, est présenté par MM. Lemonnier et Lucas.

Communications :

M. Édouard Lucas : 1° *Sur quelques propriétés des suites analogues à celle de Farey* ; 2° *Sur les développements en séries.*

M. Laguerre : 1° *Sur les courbes unicursales de troisième classe* ; 2° *Sur la transformation des fonctions elliptiques.*

M. Halphen démontre ce théorème : *Les sections faites dans une surface développable par des plans parallèles entre eux ont leurs développées situées sur une même surface développable.*

M. Fouret : *Sur certaines lois relatives à l'ordre et à la classe de lieux géométriques.*

M. Picquet : *Sur les déterminants formés avec les mineurs d'un même déterminant.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1877,

PRÉSIDENTE DE M. MANNHEIM.

Élections : MM. de Presles et Lafon, présentés dans la séance précédente, sont élus Membres de la Société.

Communications :

M. Laguerre : 1° *Sur la multiplication des fonctions elliptiques*; 2° *Sur des exemples de discontinuité empruntés à la Géométrie élémentaire.*

M. Mannheim : *Sur les surfaces réglées.*

M. Fouret : *Sur les courbes telles que le lieu des sommets des angles droits qui leur sont circonscrits soit un cercle.*

M. Mannheim : *Sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre.*

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1877,

PRÉSIDENTE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Sur des formules nouvelles relatives au déplacement d'une figure plane.*

M. André (Désiré) : *Sur les développements des puissances de certaines fonctions.*

M. Édouard Lucas : *Sur un principe fondamental de Géométrie analytique.*

M. Halphen communique, de la part de M. Laguerre, une Note *Sur l'intégration d'une équation différentielle.*

M. Picquet : *Sur une formule relative au tétraèdre.*

M. Fouret : *Sur l'enveloppe de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un sommet est fixe et dont les autres sommets décrivent une même courbe.*

SÉANCE DU 9 JANVIER 1878,

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Présentation d'un nouveau Membre : M. SÉGUY est présenté par MM. Jordan et de Polignac.

Élections : M. Darboux est élu président pour l'année 1878.

Sont élus vice-présidents : MM. Jordan et Rouché.

Sont élus membres du conseil : MM. Bienaymé, Bonnet, Laguerre, Puiseux, Mannheim et Lucas.

Est élu archiviste : M. Francis Fabre.

Communications :

M. Halphen : *Sur les formules récurrentes concernant les sommes des diviseurs des nombres.*

M. Laguerre : *Sur la recherche du facteur intégrant.*

M. Picquet : *Sur les polygones inscrits et circonscrits à une courbe du troisième degré.*

SÉANCE DU 16 JANVIER 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Sur la proposition de M. le président, la Société vote des remerciements à M. Mannheim, président sortant.

Élection : M. Séguy, présenté dans la séance précédente, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Halphen : *Sur un passage du livre premier des Principes de Newton.*

M. Darboux ajoute diverses observations sur le même sujet.

Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes; par M. PICQUET.

(Séance du 18 juillet 1877.)

On a souvent, en perspective, à considérer ce système de coniques; il est facile de faire voir que leurs axes enveloppent une courbe de la quatrième classe. Nous remarquerons d'abord que leurs centres décrivent une ligne droite : le centre de l'une d'elles Σ est, en effet, le pôle par rapport à cette courbe de la droite de l'infini, dont la perspective s'obtiendra sur le plan des cercles en menant par l'œil un plan parallèle au plan des coniques. Les deux plans étant verticaux, leur intersection V sera verticale et conséquemment perpendiculaire à la droite des centres des cercles; d'où il suit que le lieu de ses pôles par rapport aux cercles est la droite des centres, et que, par conséquent, le lieu des centres des coniques est sur le plan des coniques la droite perspective de la droite des centres des cercles. Considérons maintenant un point P de la droite des centres des coniques : si p coniques du système ont leur centre en ce point, la classe cherchée sera $2p$, puisqu'à chacune d'elles correspondent deux tangentes menées du point P à la courbe enveloppe, lesquelles sont les axes de cette conique; à condition toutefois que la droite des centres, sur laquelle est le point P , ne soit pas tangente à l'enveloppe.

D'abord cette droite n'est pas tangente à l'enveloppe si l'œil n'est pas dans le plan horizontal passant par la droite des centres des cercles; car si cela était, elle serait axe d'une certaine conique du système ayant son centre en un point Q pris sur elle, perspective d'un point Q_1 de la droite des centres des cercles, et l'on obtiendrait l'autre axe de la même conique en cherchant la perspective de la droite du plan des cercles, issue du point Q_1 et conjuguée de la droite de leurs centres par rapport au cercle pour lequel Q_1 est le pôle de la verticale V . La droite cherchée dans le plan des cercles sera évidemment verticale, ainsi que sa perspective sur le

plan des coniques; le second axe serait donc vertical, ce qui est impossible, puisque le premier n'est pas horizontal, à moins que l'œil ne soit dans le plan horizontal des centres des cercles.

De plus, les coniques du système qui ont leur centre en P sont les perspectives des cercles par rapport auxquels P_1 , perspective de P , est le pôle de la verticale V . Pour les trouver, il faut construire les cercles d'un rayon donné, dont le centre est sur une droite donnée et conjuguée à deux points, l'un P_1 et l'autre le pied V_1 de la verticale V sur la droite des centres; la dernière condition peut se remplacer par celle de couper orthogonalement le cercle ayant PV_1 pour diamètre. Or le centre d'un cercle de rayon donné qui coupe orthogonalement un cercle donné décrit un cercle concentrique au dernier. Il y aura donc deux cercles répondant à la question, et la construction sera la suivante. Sur $P_1 V_1$ comme diamètre on décrira un cercle. En un point m de ce cercle, on lui mènera une tangente sur laquelle on prendra à partir du point m une longueur mp égale au rayon constant des cercles; le cercle concentrique au précédent et passant par le point p coupera la droite des centres en deux points α et β qui seront les centres de cercles de rayons mp , et par rapport auxquels le point P sera le pôle de la verticale V ; leurs perspectives seront les deux coniques cherchées ayant leur centre en P , dont les axes sont les quatre tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe considérée, puisque, d'ailleurs, la droite des centres n'est pas tangente à cette courbe. L'une de ces coniques sera une ellipse et l'autre une hyperbole, puisque, sur les deux cercles qui sont leurs perspectives, l'un coupe la verticale V et l'autre ne la coupe pas. Il est facile de construire leurs axes :

1° Pour l'ellipse, perspective du cercle de centre α , il suffit de remarquer que la direction $P_1 V_1$ et la direction perpendiculaire, étant conjuguées dans le cercle, se perspectiveront suivant deux diamètres conjugués de la courbe dont on pourra, dès lors, construire les axes en grandeur et en direction par une des méthodes connues.

2° Pour l'hyperbole, perspective du cercle de centre β , on voit immédiatement que ses asymptotes sont les droites PT , PU , perspectives des tangentes menées du point P_1 à ce cercle, et ses axes seront les deux bissectrices des angles de ces deux droites.

Remarque. — Si le point P est la perspective de celui des centres des cercles qui est à l'infini, c'est-à-dire le point d'intersection avec le plan des coniques de la parallèle menée par l'œil au plan des cercles, l'ellipse correspondante se réduit à un point et la construction précédente ne s'applique plus; mais le calcul fait voir que, quoique réduite à un point, elle est infiniment aplatie sur la verticale du point P, qui est alors un de ses axes, tandis que l'autre est horizontal. Quant à l'hyperbole perspective du cercle de centre V, la construction subsiste et donne les bissectrices des deux droites issues du point P, qui sont l'enveloppe des coniques du système.

Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes ; par M. PERRIN.

(Séance du 2 mai 1877.)

Je me propose, dans la première Partie de ce Mémoire, d'établir quelques théorèmes de Géométrie de situation, relatifs à un mode de décomposition des contours fermés dont le principe a été indiqué pour la première fois, à ma connaissance, par M. Jordan, dans une Communication faite à la Société mathématique, le 8 mars 1876. Dans la seconde Partie, j'appliquerai les résultats obtenus à l'étude d'un système particulier de courbes algébriques que l'on peut imaginer comme défini par une courbe algébrique plane donnée, de degré et de classe quelconques; et je montrerai comment cette étude conduit naturellement à la relation mentionnée dans le titre de ce Mémoire, et qui consiste dans l'égalité suivante :

$$m + i_1 + 2\tau'_1 = n + k_1 + 2\delta'_1,$$

où i_1 est le nombre des inflexions réelles d'une courbe algébrique plane de degré m et de classe n , k_1 le nombre de ses rebroussements réels, τ'_1 le nombre de ses tangentes doubles isolées (tangentes doubles réelles dont les deux points de contact sont imaginaires conjugués), δ'_1 le nombre de ses points isolés (points doubles où les deux tangentes sont imaginaires conjuguées).

Cette relation remarquable, d'où l'on déduit immédiatement

comme cas particuliers tous les théorèmes antérieurement connus relatifs à la réalité des inflexions des cubiques, ainsi qu'un nombre en quelque sorte illimité de théorèmes analogues pour les courbes de degré supérieur, a été énoncée pour la première fois en 1876 par M. Klein, lequel en a donné, dans les *Mathematische Annalen* (t. X), une démonstration fondée, dans certaines de ses parties, sur des inductions très-plausibles assurément, mais non d'une rigueur absolue; il y a donc, ce semble, quelque intérêt à montrer que l'on est conduit au même résultat par une voie toute différente, bien que d'ailleurs la démonstration qui sera donnée ci-après soit plus longue que celle de M. Klein, et non entièrement à l'abri d'objections du même genre.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES RELATIFS AUX CONTOURS FERMÉS.

Indice d'un contour. — Soit un contour fermé de forme quelconque, assujéti à cette seule condition de n'avoir aucun point à l'infini. Appelons *sens positif* l'un des deux sens opposés dans lesquels ce contour peut être parcouru en partant de l'un quelconque de ses points; ce sera d'ailleurs celui des deux que l'on voudra, et, dans les figures qui suivront, il sera désigné par des flèches. Ceci posé, nous pouvons décomposer le contour donné en un certain nombre de contours élémentaires, en procédant de la manière suivante : à partir d'un point arbitraire A, nous marchons dans le sens positif jusqu'au premier point double B qui se présente : en B, nous quittons la branche sur laquelle nous avons cheminé pour marcher, toujours dans le sens positif, sur l'autre branche qui passe en B, et cela jusqu'à ce que nous arrivions à un second point double C; nous faisons de même en C, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous soyons revenu au point A de départ. Prenant un second point de départ A' dans une des parties du contour qui n'ont pas été déjà parcourues, nous obtenons de la même manière un deuxième contour élémentaire, et ainsi de suite. Il est visible que ces divers contours élémentaires ne peuvent se recouper l'un l'autre, et qu'aucun d'eux, pris isolément, ne peut posséder de point double. Chacun d'eux sépare donc sur le plan deux régions, dont l'une lui est *intérieure* et l'autre *extérieure*. J'appellerai élé-

ments *positifs* ceux de ces contours élémentaires qui sont tels, qu'en les parcourant dans le sens positif on ait à sa gauche la région qui leur est intérieure, et à sa droite la région extérieure; éléments *négatifs* ceux pour lesquels l'inverse a lieu. Si la décomposition d'un contour C a fourni p éléments positifs et p' éléments négatifs, le nombre $p - p'$ sera l'indice du contour C.

Au lieu d'un contour unique C, on peut considérer un groupe formé de tel nombre qu'on voudra de contours fermés se croisant entre eux d'une manière quelconque; pourvu que chacun d'eux satisfasse à la condition de ne point passer par l'infini, rien n'empêchera de lui attribuer un sens positif déterminé, et, en appliquant le mode de décomposition indiqué ci-dessus, on obtiendra une certaine valeur entière, positive, négative ou nulle, pour l'indice du groupe donné.

Si l'on change le sens positif sur la totalité des contours qui forment un groupe, il est évident que l'indice de ce groupe changera simplement de signe. Si l'on n'effectue ce changement de sens que sur quelques-uns des contours composants, il n'en sera plus de même; le théorème que nous allons établir permet de trouver ce que devient l'indice dans cette hypothèse.

THÉORÈME I. — *L'indice d'un groupe formé de plusieurs contours est égal à la somme algébrique des indices de ces contours, considérés chacun isolément avec le même sens positif qui leur est attribué dans le groupe.*

Pour le démontrer, soient G, G' deux groupes formés chacun d'un nombre quelconque de contours, et dont les indices respectifs sont i et i' . Supposons-les décomposés en leurs contours élémentaires: soient $c_1, c_2, \dots, c_m$ ceux du groupe G, $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ ceux du groupe G'. Au lieu de superposer le groupe G' au groupe G pour faire la décomposition en tenant compte à la fois de tous les points de croisement de G avec G' et de tous les points doubles de G', nous pouvons ne superposer d'abord au groupe G que le contour élémentaire c'_1 , pour étudier la nature des modifications qui en résultent dans le produit de la décomposition en éléments, de manière à tenir compte seulement des points doubles de G et de ceux des points de croisement de G et de G' qui appartiennent à ce contour c'_1 ; nous pourrons ensuite superposer au nouveau système de contours élémentaires ainsi

obtenu le contour c'_1 , et ainsi de suite jusqu'au dernier c'_n ; et il est clair que le mode final de décomposition auquel nous serons arrivé donnera précisément les mêmes contours élémentaires que donnerait la décomposition directe de l'ensemble des groupes G et G' , puisqu'il aura été tenu compte successivement de tous les points de croisement de G et de G' , et que par le fait même de l'introduction successive des contours $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ tous les points doubles spéciaux à G' sont traités comme ils doivent l'être d'après les conventions faites. Commençons donc par superposer au groupe G le contour élémentaire c'_1 ; par le même raisonnement que ci-dessus, nous arriverons au résultat cherché en combinant d'abord avec c'_1 l'un des contours élémentaires de G , par exemple c_1 , puis avec l'ensemble des contours élémentaires provenant de cette combinaison le deuxième contour c_2 , et ainsi de suite. Et comme, toutes les fois qu'il y a lieu de combiner un contour élémentaire avec un groupe d'autres contours, il est permis, sans changer le résultat, d'introduire *successivement* ces divers contours, en se bornant à ceux qui coupent le premier (puisque les autres ne peuvent modifier en rien la décomposition), il est clair qu'il suffira, pour obtenir le résultat de la superposition des deux groupes G et G' , de répéter un nombre fini de fois (au plus égal au nombre des points de croisement de G et de G') l'opération qui consiste à décomposer en contours élémentaires le groupe simple formé par la superposition de deux contours élémentaires. Il suffit alors de prouver que dans cette dernière opération la somme algébrique des indices n'est pas changée, pour que le théorème I se trouve démontré.

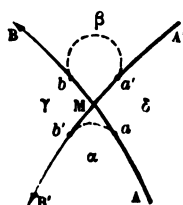
Soient donc ω, ω' deux contours élémentaires, leur ensemble divise le plan en quatre sortes de régions, savoir :

- α régions intérieures à ω et à ω' ,
- β » extérieures à ω et à ω' ,
- γ » intérieures à ω et extérieures à ω' ,
- δ » extérieures à ω et intérieures à ω' .

Soient M (*fig. 1*) un des points de croisement des contours ω, ω' , $AMB, A'MB'$ les deux branches appartenant respectivement à ces contours. Les quatre régions que limitent ces branches appartiennent évidemment aux quatre genres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; α et β étant

opposés par le sommet, ainsi que γ et δ , comme l'indique la *fig. 1*. Si ω et ω' sont tous deux des éléments positifs, il faudra, par définition, puisque α et γ sont à l'intérieur de ω , α et δ à l'intérieur de ω' , que le sens positif sur le contour ω soit AMB , et sur ω' , $A'MB'$, comme l'indiquent les flèches. Dès lors la décomposition donnera d'une part la portion de contour AMB' , de l'autre la por-

Fig. 1.



tion $A'MB$; la même chose ayant lieu à tous les autres points de croisement, où la même figure s'appliquerait identiquement, on voit que les divers contours élémentaires qui résulteront de la décomposition de l'ensemble de ω et de ω' seront ceux qui limitent les régions α et les régions β . Si ω et ω' sont tous deux négatifs, il suffit de supposer les flèches retournées et le résultat est le même. Mais, si ω et ω' sont de signe contraire, par exemple si ω est positif et ω' négatif, on devra supposer retournée] seulement la flèche $A'MB'$, en sorte que les portions de contour fournies par la décomposition seront AMA' , $B'MB$; et par suite les divers contours élémentaires seront ceux qui limitent les régions γ et les régions δ ; et de même si ω était négatif et ω' positif.

Revenons au cas où ω et ω' sont tous deux positifs et donnent par conséquent 2 pour somme de leurs indices. Toutes les régions α fourniront des contours élémentaires positifs : car chacune d'elles étant intérieure à ω , et s'appuyant par un ou plusieurs arcs sur le contour de ω , peut être considérée comme obtenue en retranchant de l'aire intérieure à ω un certain nombre de segments; c'est en quelque sorte une réduction de l'aire intérieure à ω obtenue par contraction partielle de son contour, sans que le sens général de ce contour soit altéré. Quant aux régions β , il y en a une qui comprend toute la partie du plan extérieure à l'ensemble de la figure formée par ω et ω' ; il est clair que le contour élémentaire que

fournit la limite de cette région comprend dans son intérieur les aires intérieures à ω et ω' ; il est donc de même signe, c'est-à-dire positif. Mais toutes les autres régions β fourniront des éléments négatifs; car, si l'on imagine par exemple que toutes les régions α , γ et δ soient couvertes d'une teinte foncée, les régions β dont il s'agit se présenteront comme des trous isolés, de teinte claire à leur intérieur, en sorte que leur contour devant être parcouru dans un sens tel que l'intérieur de ω et de ω' , c'est-à-dire la teinte foncée, soit à gauche, l'intérieur de ces régions sera à droite.

L'indice du groupe de contours fourni par la décomposition sera donc

$$\alpha + 1 - (\beta - 1) \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta + 2.$$

Si ω et ω' étaient tous deux négatifs, ce qui donnerait -2 pour somme de leurs indices, on verrait de la même manière que l'indice après la décomposition est

$$-(\alpha + 1) + (\beta - 1) \quad \text{ou} \quad \beta - \alpha - 2.$$

Si, enfin, ω et ω' étaient de signe contraire, ce qui donnerait zéro pour somme algébrique de leurs indices, on verrait, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus pour les régions α , que toutes les régions γ donnent des éléments de même signe que ω , toutes les régions δ des éléments de même signe que ω' ; en sorte que l'indice du groupe après la décomposition est égal à

$$\pm(\gamma - \delta).$$

Pour que le théorème I soit établi dans tous les cas, il suffit donc de montrer que l'on a nécessairement.

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \delta.$$

Soient $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ les régions de genre α , et de même $b_1, b_2, \dots, b_\beta$, $c_1, c_2, \dots, c_\gamma$, $d_1, d_2, \dots, d_\delta$ celles de genres β, γ, δ . Désignons par $(a_p c_q)$ l'arc qui sépare la région a_p de la région c_q , et de même pour les autres. Si Δ est le nombre des points de croisement des contours ω et ω' , il est évident que le contour ω se compose de $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ad) alternant avec $\frac{\Delta}{2}$ arcs (bc) ; et de même le contour ω'

de $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ac) alternant avec $\frac{\Delta}{2}$ arcs (bd). Formons une table à double entrée où les colonnes verticales, au nombre de α , correspondraient aux α régions $a_1, a_2, \dots$, rangées dans un certain ordre que nous déterminerons tout à l'heure, et les lignes horizontales, en nombre γ , aux γ régions $c_1, c_2, \dots$, et plaçons, dans celles des cases de ce tableau auxquelles ils correspondent par leurs indices, les $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ac). Je dis qu'il est possible de ranger les α régions $a_1, a_2, \dots$ dans un ordre tel, qu'en prenant successivement chacune des colonnes verticales du tableau qui leur correspondent, toutes les cases occupées, dans l'une de ces colonnes, se trouvent, à l'exception d'une et d'une seule, sur des lignes dont aucune autre case ne soit occupée dans les colonnes précédentes. Tout d'abord, puisque les régions α et γ réunies composent la totalité de l'aire A intérieure au contour ω , et que cette aire est d'un seul tenant, il est toujours possible d'aller de l'une quelconque à une autre quelconque des régions α sans sortir de A , c'est-à-dire en traversant une série de régions alternativement des genres α et γ , et que l'on peut supposer toutes distinctes les unes des autres (car si une même région paraissait à deux places différentes dans cette série, on pourrait supprimer le passage par toutes les régions intermédiaires, et obtenir ainsi une série plus simple où la région en question ne figurerait plus qu'une fois). De plus la série, ainsi simplifiée, et ne contenant plus que les régions qu'il est nécessaire de traverser, est unique et déterminée; car, s'il en existait une seconde, si par exemple on pouvait aller de a_1 à a_2 en passant soit par c_1 , soit par c_2 , un circuit fermé traversant la série des régions a_1, c_1, a_2, c_2, a_1 serait tout entier à l'intérieur de A , et comprendrait cependant, à son intérieur, au moins une région de genre β ou δ , c'est-à-dire non comprise dans A ; le contour ω ne serait donc pas simple, contrairement à l'hypothèse. Dès lors, si ayant affecté la première colonne verticale du tableau à l'une quelconque des régions α prise arbitrairement, a_1 par exemple, on a soin, dans l'affectation des colonnes suivantes aux autres régions α , de ne jamais prendre une quelconque a_p de ces régions avant d'avoir pris toutes celles qu'il est nécessaire de traverser pour aller de a_1 en a_p sans sortir de A , il est clair que, parmi les cases pleines de la colonne affectée à a_p ,

il s'en trouvera une où figurera l'arc (a_p, c_q) , c_q étant la dernière de la série des régions α et γ qu'il faut traverser pour aller de α_1 en a_p ; et que, sur la même ligne horizontale, définie par cette région c_q , il y aura dans les colonnes précédentes *au moins une* autre case occupée, savoir par l'arc (a_m, c_q) , a_m étant l'avant-dernière région de la série dont il vient d'être question. De plus, la même circonstance ne pourra se présenter pour deux des cases pleines de la colonne a_p ; car on pourrait alors passer de a_p , par l'intermédiaire de deux régions distinctes c_q et c_r , à deux régions a_m et a_n , et de celles-ci rejoindre par des circuits convenables, où ne figure pas a_p , la région initiale α_1 , puisque, dans l'ordre adopté, a_m et a_n viennent l'une et l'autre après α_1 et avant a_p . Il existerait donc deux séries distinctes, au moins partiellement, de régions α et γ par lesquelles on pourrait passer de α_1 en a_p , ce qui a été démontré inadmissible.

Le tableau étant supposé construit de cette manière, il est visible que, parmi les cases pleines qu'introduit la $p^{i\text{ème}}$ colonne, une et une seule vient se placer sur une des lignes qui ont déjà une ou plusieurs des $p - 1$ colonnes précédentes; les autres viennent se placer sur des lignes nouvelles. Si donc $n_1, n_2, \dots, n_\alpha$ sont respectivement les nombres de cases pleines de la première, de la deuxième, ..., de la dernière colonne, le nombre total γ des lignes horizontales du tableau sera

$$n_1 + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \dots + (n_\alpha - 1) \quad \text{ou} \quad \Sigma n - (\alpha - 1).$$

Mais Σn est le nombre total des cases pleines du tableau, c'est-à-dire $\frac{\Delta}{2}$; il vient donc

$$\gamma = \frac{\Delta}{2} - (\alpha - 1) \quad \text{ou} \quad \Delta = 2(\alpha + \gamma - 1).$$

On peut raisonner d'une manière tout à fait analogue pour les arcs (ad) , (bc) , (bd) , et obtenir de même les relations

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(\alpha + \delta - 1) \\ &= 2(\beta + \gamma - 1) \\ &= 2(\beta + \delta - 1). \end{aligned}$$

La comparaison de ces diverses relations donne

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \delta,$$

comme il avait été annoncé; ce qui démontre le théorème I.

THÉOREME II. — *Si un groupe de contours fermés possède k points de rebroussement (de première espèce), mais ne possède pas de point d'inflexion, on peut sur tous les contours qui composent le groupe choisir le sens positif de manière à avoir la convexité tournée toujours vers sa droite quand on marche dans ce sens positif; soit p l'indice du groupe dans cette hypothèse. Le nombre n de tangentes que l'on peut mener au groupe d'un point compris à la fois dans l'intérieur de r contours élémentaires positifs et de r' contours élémentaires négatifs sera*

$$n = k + 2p - 2(r - r'),$$

et en particulier la classe N du groupe, c'est-à-dire le nombre de ses tangentes parallèles à une direction quelconque, sera

$$N = k + 2p.$$

Pour le démontrer, je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si un contour fermé possède k points de rebroussement (de première espèce), sans point double ni point d'inflexion, le nombre des tangentes qu'on peut lui mener d'un point *intérieur* est k , et d'un point *extérieur* $k + 2$ ou $k - 2$, suivant que la convexité du contour est tournée vers l'extérieur ou vers l'intérieur.

Ce lemme peut être considéré comme évident; car, à l'inspection d'un contour fermé quelconque, sans point double ni point d'inflexion, on aperçoit immédiatement la possibilité d'amener ce contour par déformation continue, en y conservant le même nombre de points de rebroussement, sans y introduire ni point d'inflexion ni point double, et sans passer, par un point donné quelconque M , à une forme régulière et symétrique, par rapport à un centre de figure; et il est clair que, dans une telle déformation, le nombre des tangentes qu'on peut mener du point M au contour ne saurait varier. Et, si M était un point pris à l'intérieur du contour primitif, on peut le choisir comme centre de figure du contour régulier obtenu par déformation, auquel cas les seules tangentes issues de M sont les k tangentes de rebroussement qui y concourent; d'ailleurs, si l'on sort du contour, le nombre des tangentes augmente ou diminue évidemment de deux, selon que la convexité est tournée vers l'extérieur ou vers l'intérieur.

Ce lemme étant admis, considérons un groupe de contours sans

point d'inflexion, mais possédant k points de rebroussement et δ points doubles. Soit M (*fig. 1*) l'un quelconque de ces points doubles. Le sens positif ayant été choisi, comme l'indiquent les flèches, de manière à avoir toujours la convexité tournée vers sa droite, la décomposition en éléments donnera les deux portions de contours élémentaires AMB' , $A'MB$. Introduisons les deux très-petits arcs ab' , $a'b$, de manière à remplacer les deux portions anguleuses de contours élémentaires aMb' , $a'Mb$ par des arcs dont la courbure varie d'une manière continue; cela étant fait pour tous les points doubles du groupe tels que M , tous les contours élémentaires seront devenus des contours ordinaires à courbure continue, sans point double ni point d'inflexion, et à chacun desquels nous pourrons appliquer le lemme précédent. Soit δ' le nombre des points doubles pour lesquels les deux points de rebroussement a' , b se trouvent appartenir à un élément positif, δ'' le nombre de ceux pour lesquels ces points appartiennent à un élément négatif. Soient p' et p'' le nombre des éléments positifs et négatifs, k' et k'' les nombres de points de rebroussement primitifs du groupe qui se trouvent respectivement placés, après la décomposition, sur ces deux catégories d'éléments. D'après le lemme, si un point est intérieur à r éléments positifs et à r' éléments négatifs, le nombre des tangentes qu'on pourra mener de ce point à l'ensemble des éléments du groupe sera

$$k' + 2\delta' + 2(p' - r) + k'' + 2\delta'' - 2(p'' - r'),$$

puisque les éléments positifs ont leur convexité tournée vers l'extérieur et les négatifs vers l'intérieur. Mais, en vertu des relations

$$k' + k'' = k,$$

$$\delta' + \delta'' = \delta,$$

$$p' - p'' = p.$$

ce nombre se réduit à

$$k + 2\delta + 2p - 2(r - r').$$

Mais, en introduisant à chacun des δ points doubles, tels que M , les deux arcs très-petits ab' , $a'b$, nous avons évidemment augmenté de 2δ le nombre des tangentes que l'on peut mener à l'ensemble du groupe d'un point quelconque non situé dans l'une des

petites régions $Ma'b$, c'est-à-dire en réalité d'un point quelconque du plan, puisque ces régions peuvent être supposées aussi petites qu'on voudra. Le nombre n des tangentes issues d'un point quelconque est donc bien

$$n = k + 2p - 2r - r',$$

ce que l'on peut encore écrire

$$n = k + 2(s - s'),$$

s et s' étant respectivement les nombres d'éléments positifs et négatifs auxquels le point considéré est extérieur.

Si, en particulier, le point considéré est à l'infini, il est extérieur à tous les éléments, et l'on a pour la classe du groupe

$$N = k - 2p.$$

THÉORÈME III. — Soit un groupe de contours fermés, sans points d'inflexion, mais avec k points de rebroussement (de première espèce) et 2 points doubles. Supposons-le décomposé en éléments, le sens positif ayant été choisi partout de manière que la convexité soit tournée vers la droite. Soient μ le nombre de couples que l'on peut former avec deux éléments extérieurs l'un à l'autre et de même signe, μ' le nombre de couples que l'on peut former avec deux éléments extérieurs l'un à l'autre et de signe contraire. Soient de même α et α' les nombres de couples que l'on peut former en associant respectivement un élément positif ou un élément négatif avec un point de rebroussement non situé à l'intérieur de cet élément, un point de rebroussement situé sur le contour d'un élément devant être regardé comme situé à son intérieur ou à son extérieur, suivant que cet élément sera positif ou négatif. — Le nombre des tangentes doubles du groupe de contours sera

$$\tau = 4\mu - \mu' - 2\alpha - \alpha' - \frac{k(k-1)}{2} - 2.$$

On peut simplifier cette expression de τ , en la réduisant à son premier et à son dernier terme, à la condition de compter chaque point de rebroussement à la fois comme un point double et comme un demi-élément positif.

Je me borne ici à donner l'énoncé de ce théorème, que je n'aurai pas occasion d'appliquer dans la suite de ce Mémoire.

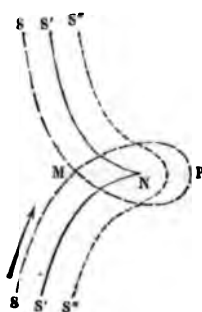
Déformation d'un groupe de contours. — Étant donné un groupe de contours fermés, on peut le modifier par déformation continue d'une infinité de manières. Dans tout ce qui va suivre, je supposerai toujours que la loi de déformation adoptée satisfait à cette condition, qu'en passant de l'un quelconque des groupes au groupe infiniment voisin, chaque élément infiniment petit de contour se déplace du même côté par rapport au sens positif adopté; ou, ce qui revient au même, que les divers contours successifs, obtenus par déformation continue, n'aient pas de courbe enveloppe. Si, en partant d'un contour ou d'un groupe de contours donné, on passe à un nouveau contour ou groupe de contours, en transportant tous les éléments du premier *vers la droite*, par rapport à un observateur qui le parcourrait dans le sens positif, je dirai que le nouveau groupe a été obtenu par déformation *positive*; la déformation sera dite *négative* dans le cas contraire.

Il peut arriver, en déformant un contour donné, qu'on soit amené forcément à un contour qui possède un point de rebroussement : c'est ce qui arrivera, par exemple, si le contour primitif possède une boucle simple, et que la déformation tende à resserrer cette boucle indéfiniment. Dès lors, en vertu de la convention admise pour la loi de déformation, si l'on continue la déformation dans le même sens après avoir rencontré le contour qui possède un point de rebroussement, on arrivera à des contours qui, dans la région correspondante, ne posséderont plus ni point double ni point de rebroussement. De même on peut, en déformant convenablement un contour donné, faire apparaître à volonté, sur une portion de contour qui ne présentait rien de particulier, un point de rebroussement, suivi, dans les déformées suivantes, d'une boucle qui l'enveloppera en se dilatant de plus en plus. J'appellerai *points critiques* de la déformation les points de rebroussement, introduits volontairement ou non, qui satisfont à cette condition, d'être enveloppés par une boucle lorsqu'on passe aux déformées du contour particulier sur lequel ils existent, dans l'un des deux sens possibles de déformation.

Soient S, S', S'' (*fig. 2*) trois contours consécutifs obtenus par déformation continue, celui S' intermédiaire présentant en N un

point critique. Si le sens positif est tel que l'indique la flèche, il résulte de la convention adoptée que S' et S'' se déduisent de S par déformation positive. Mais, en décomposant les contours S, S', S'' en contours élémentaires, il est visible que l'on obtiendra, toutes choses égales d'ailleurs pour les autres parties des contours, un

Fig. 2.



élément négatif de plus pour le contour S que pour les deux autres, à cause de la présence de la boucle MP ; donc, en passant de S à S'' , l'indice du contour *augmente* d'une unité. Si la flèche était retournée, S aurait un élément *positif* de plus que S' et S'' : l'indice *diminuerait* donc d'une unité en passant de S à S'' ; mais, comme alors ce passage proviendrait d'une déformation *négative*, on peut énoncer, comme général, le résultat suivant :

THÉORÈME IV. — *Lorsque, en déformant d'une manière continue un groupe de contours, on passe volontairement ou non par un point critique de déformation, l'indice du groupe augmente ou diminue d'une unité, suivant que l'on a opéré par voie de déformation positive ou négative.*

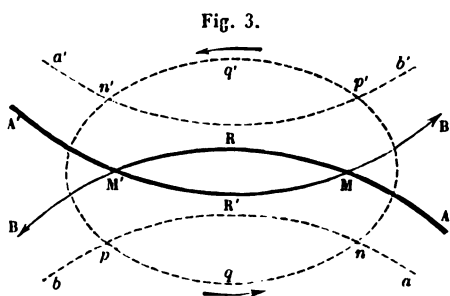
Je vais maintenant établir la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Toute déformation continue, au cours de laquelle on ne passe par aucun point critique, n'altère pas l'indice.*

Tout d'abord, puisque les opérations qui servent à obtenir l'indice ne dépendent que du nombre et de la position relative des points doubles du groupe, il est clair que toute déformation qui n'altère ni le nombre ni la position relative de ces points doubles

sur les divers contours composant le groupe ne peut altérer l'indice. Examinons maintenant ce qui se passe, s'il survient une modification : 1° dans le nombre; 2° dans la position relative.

PREMIER CAS. — Il suffit d'examiner le cas où un point double disparaît; le cas où il apparaît s'y ramènerait en considérant la déformation inverse. Chaque point double M , étant produit par le croisement de deux branches C et C' , ne fait, pendant la déformation, que se déplacer sur chacune des deux branches, en marchant toujours du même côté, par rapport à la position variable de l'autre. Il ne peut donc disparaître qu'en venant se confondre avec un autre point double M' , provenant aussi du croisement de C avec C' , ces deux branches devenant tangentes. Si C et C' sont une seule et même branche, M et M' sont un seul et même point, et l'on trouve, comme cas particulier, le passage par un point critique. Laissant de côté ce cas particulier, qui a fait l'objet du théorème IV, nous n'avons à examiner que le cas où deux branches distinctes C , C' , d'abord croisées, viennent à se décroiser par l'effet de la déformation. Si elles sont de même sens, c'est-à-dire si le sens positif est le même pour les deux branches sur l'élément infinitésimal qui leur est commun à l'instant du contact, on voit immédiatement, en faisant la figure, que la décomposition en contours élémentaires, faite *avant* et *après* le contact, fournit dans l'un et l'autre cas deux portions de contours élémentaires placées exactement de la même manière, par rapport au reste du groupe, en sorte que l'indice est évidemment le même. Si les deux branches qui se décroisent sont de sens contraire (*fig. 3*), soient



$AMRM'B$, $A'M'R'MB'$ ces deux branches avant le contact, et ab , $a'b'$ ce qu'elles sont devenues par déformation (négative d'après

la figure) après le contact qui les a décroisées. Avant le contact, la décomposition en éléments donne :

Un élément positif..... $MRM'R'M$
 Une portion d'élément.... AMB'
 Une portion d'élément.... $A'M'B$

Après le contact, la décomposition donnerait les deux portions d'éléments ab , $d'b'$, qui sont disposées tout autrement, par rapport au reste du groupe, en sorte que la comparaison n'est pas possible. Mais, si nous introduisons l'ovale $np'n'p$, qui équivaut à un élément positif, nous aurons, d'après le théorème I, augmenté l'indice d'une unité ; en tenant compte de cet ovale, la décomposition fournit :

Un élément positif..... $pqn p$
 Un élément positif..... $p'q'n'p'$
 Une portion d'élément..... $anp'b'$
 Une portion d'élément..... $a'n'pb$

Ces deux dernières portions étant disposées, par rapport au reste du groupe, exactement comme les portions AMB' , $A'M'B$, on voit que la décomposition, après le contact, fournit deux éléments positifs, soit un de plus qu'avant le contact ; mais il en a été introduit précisément un ; l'indice du groupe est donc bien le même avant et après le décroisement des deux branches, c'est-à-dire n'a pas été altéré par la disparition des deux points doubles considérés.

DEUXIÈME CAS. — Soient M , M' deux points doubles provenant du croisement d'une branche C'' par deux autres branches C , C' , et soit M celui des deux qui se présente le premier, quand on marche sur C'' dans le sens positif. Si par déformation continue du groupe on amène ces deux points à intervertir leurs positions respectives sur C'' , il faudra qu'il y ait eu un moment où ils ont coïncidé ; il a donc fallu qu'un troisième point double M'' , provenant du croisement des branches C' et C , ait traversé la branche C'' en passant de sa droite à sa gauche, ou inversement. Dès lors on voit sans peine, en faisant la figure, que tout est symétrique pour les trois branches C , C' , C'' , et que sur chacune d'elles il y a eu au même moment intervention de deux points doubles consécutifs, le passage se faisant par un point triple. Considérons le petit triangle curvi-

ligne que forment les trois branches C, C', C'' , avant et après le passage par le point triple. Le sens positif sur ces trois branches peut être tel, que les trois côtés du triangle se fassent suite (en sorte que le triangle fournisse à lui seul, par la décomposition, un élément positif ou négatif), ou que deux seulement se fassent suite, le troisième étant de sens inverse. Dans ce second cas, on voit immédiatement, en faisant une figure, que la décomposition *avant* et *après* le passage par le point triple fournit trois portions d'éléments disposées exactement de la même manière, par rapport au reste du groupe de contours, en sorte que l'indice reste évidemment invariable. Il n'en est pas de même dans le premier cas, où le triangle forme un élément à lui seul; mais, par un artifice analogue à celui que j'ai employé plus haut, c'est-à-dire en introduisant un ovale de sens convenable, qui enveloppe entièrement le petit triangle, il est facile de faire en sorte que la décomposition, avant et après le passage, fournisse des portions d'éléments disposées de la même manière, par rapport au reste du groupe, en sorte qu'il suffise de comparer le nombre et le sens des éléments complets obtenus, et de tenir compte de l'ovale introduit, pour vérifier que l'indice reste bien invariable.

Si deux des branches C, C', C'' appartiennent à un même contour sur lequel elles se font suite, l'interversion des points doubles sur la troisième peut coïncider avec la production d'un point critique : on vérifierait alors aisément que la variation de l'indice est uniquement celle qui serait due à la production du point critique, en sorte que le théorème V est vrai dans tous les cas.

Dislocation d'un groupe de contours. — Imaginons qu'en opérant par déformation continue sur un groupe donné de contours on soit arrivé à un groupe tel, qu'en une même région extrêmement petite ω passent deux branches distinctes A et A' . D'après le sens de ces branches, soient α et α' les arcs qui, sur ces deux branches respectivement, se dirigent vers ω , β et β' les arcs qui s'en éloignent; en sorte qu'en décrivant le groupe dans le sens positif, β fait suite à α sur une même branche A , β' à α' sur une autre branche A' . En continuant la déformation, rien n'empêche de disposer des éléments d'arcs infiniment petits dans la région ω , de manière que l'arc β'_1 , provenant de la déformation de β' , fasse suite non plus à l'arc α'_1 , provenant de la déformation de α' ,

mais à l'arc α_1 provenant de la déformation de α ; et que de même β_1 fasse suite à α'_1 ; en sorte que les deux branches primitives, constituées par la soudure deux à deux de quatre demi-branches, aient fait place à deux nouvelles branches constituées par la soudure de ces mêmes quatre demi-branches, prises deux à deux de la seule seconde manière possible, et cela en respectant la condition que j'ai admise pour toute loi de déformation. Néanmoins, comme il y a dans cette opération quelque chose de plus que dans la déformation, telle que je l'avais considérée jusqu'ici, je la désignerai sous le nom de *dislocation*; j'appellerai *point de dislocation* le point de soudure, à partir duquel la déformation, dans un sens ou dans l'autre, donne les quatre demi-branches soudées deux à deux suivant les deux modes opposés.

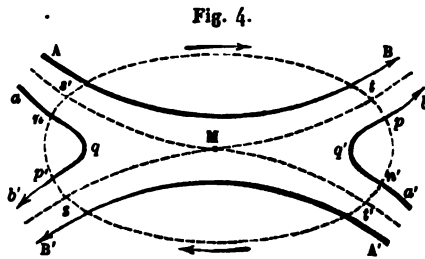
Comme exemple simple de point de dislocation, on peut citer le *centre* d'un système d'hyperboles homothétiques et concentriques : quand on passe d'une des deux séries d'hyperboles à la série conjuguée, le passage se fait par l'ensemble des deux asymptotes, et il y a ce que j'ai appelé *dislocation du système*, le point de dislocation étant le centre.

Toute dislocation a pour résultat d'augmenter ou de diminuer d'une unité le nombre des contours distincts dont se compose le groupe. Supposons, en effet, que les deux branches $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ fassent partie d'un même contour; en le parcourant dans le sens positif, on décrira successivement les arcs $\alpha\beta\alpha'\beta'\alpha$. Après la dislocation, β' fait suite à α et β à α' au voisinage du point de dislocation; dans le reste du plan, les liaisons entre les branches n'ont pas été modifiées : α' fait donc suite à β , et α à β' . Nous obtenons donc, en marchant toujours dans le sens positif, les deux contours distincts $\alpha\beta'\alpha$, $\alpha'\beta\alpha'$, c'est-à-dire un contour distinct de plus; et si l'on avait considéré le sens de déformation inverse, on aurait eu deux contours distincts avant la dislocation, et un seul après.

Pour étudier l'influence qu'exerce une dislocation sur l'indice du groupe, il convient de distinguer divers cas, suivant la position relative des deux branches qui existent dans une même région très-petite avant la dislocation.

PREMIER CAS. — Les deux branches passent tangentiellement l'une à côté de l'autre, sans se couper, et sont de sens inverse

(fig. 4). Soient AB , $A'B'$ les deux branches; si les flèches sont disposées comme sur la fig. 4, la dislocation ne peut être obtenue que par voie de déformation positive, et elle fournit les deux nouvelles branches ab' , $a'b$, le passage se faisant nécessairement par un contour avec point double M , qui est le point de dislocation. La décomposition du contour, avant la dislocation, fournit les deux portions d'éléments AB , $A'B'$. Ajoutons au contour, après la dislocation, l'ovale $npn'p'$, qui équivaut à un élément négatif, et diminue par suite l'indice d'une unité; la décomposition donnera les deux portions d'éléments $anp'b'$, $a'n'pb$, respectivement situées par rapport au reste du groupe comme les portions d'éléments AB , $A'B'$; puis les deux éléments négatifs $nqp'n$, $n'q'p'n'$. En tenant



compte de l'ovale ajouté, on voit que l'indice du groupe a été diminué d'une unité par cette dislocation, que j'appellerai du *premier genre*.

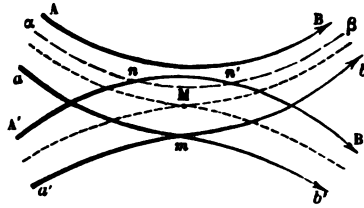
Si les flèches avaient été tournées dans le sens inverse sur les branches AB , $A'B'$, la dislocation n'aurait pu être obtenue que par voie de déformation négative, mais l'indice du groupe aurait évidemment *augmenté* d'une unité. C'est ce que l'on voit encore en partant des branches ab' , $a'b$, comme groupe primitif.

Il est à remarquer que, dans ce premier genre de dislocation, il ne passe, en chaque point du plan infiniment voisin du point de dislocation, qu'une seule branche appartenant à l'un quelconque des groupes obtenus par déformation (abstraction faite, bien entendu, des branches autres que celles sur lesquelles agit la dislocation).

DEUXIÈME CAS. — Les deux branches passent tangentiellement l'une à côté de l'autre sans se couper, et sont de même sens (fig. 5).

Ici la dislocation peut être obtenue à volonté par déformation positive ou négative, et elle fournit deux branches ab' , $a'b$, qui se coupent sous un certain angle; le point M de dislocation est le premier point double qui se présente, c'est-à-dire l'origine de la

Fig. 5.



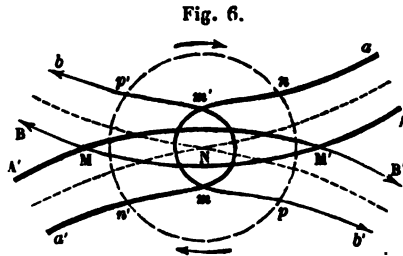
série des points doubles, tels que m , appartenant aux divers groupes déformés consécutifs. Dans cette dislocation, que j'appellerai du *deuxième genre*, il est clair que la décomposition en éléments, avant et après la dislocation, fournit deux portions d'éléments semblablement placées par rapport au reste du groupe, en sorte qu'il n'y a aucune variation dans l'indice.

La (fig. 5) convient évidemment aussi au troisième cas, celui où les deux branches du groupe primitif se coupent sous un certain angle. Elle convient encore, avec une légère modification, au quatrième cas, celui où les deux branches se croisent doublement, et sont de même sens : il suffit de supposer que AB soit légèrement déplacé en $\alpha\beta$, de manière à croiser $A'B'$ en deux points n, n' ; le point M de dislocation est alors le point où les deux points doubles n, n' viennent se confondre en un seul point double, qui reste unique dans les groupes déformés suivants; et la décomposition en éléments montre toujours que l'indice n'est pas altéré par la dislocation.

D'ailleurs, dans les divers cas que nous venons d'examiner et auxquels s'applique la fig. 5, il passe, en chaque point du plan infiniment voisin du point de dislocation, *deux* et seulement deux branches appartenant à l'un quelconque des groupes déformés; cette circonstance peut donc être regardée comme caractérisant la dislocation du deuxième genre, qui n'amène aucune variation dans l'indice.

TROISIÈME CAS. — Il ne nous reste évidemment plus à examiner

qu'un dernier cas, celui où les deux branches AB, A'B' (*fig. 6*) se croisent doublement et sont de sens inverse. Si les flèches sont disposées comme sur la *fig. 6*, la dislocation ne peut être obtenue qu'en procédant par voie de déformation positive; et l'on se trouve conduit aux deux branches $am'mb'$, $a'mm'b$, qui se



croisent doublement et sont de sens inverse, et sont par conséquent disposées l'une par rapport à l'autre comme l'étaient les branches primitives AB, A'B'. Le point N de dislocation résulte de la réunion en un seul des deux points doubles, M, M', qui se séparent ensuite de nouveau en m, m' . Effectuons maintenant la décomposition en éléments. Avant la dislocation, nous obtenons :

Une portion d'élément.....	AM'B'
» »	A'MB
Un élément négatif.....	MM'M

Après la dislocation et en ayant soin d'ajouter l'ovale $npn'p'$ qui équivaut à un élément négatif et diminue par suite l'indice d'une unité, nous obtenons :

Une portion d'élément.....	$anpb'$
» »	$a'n'p'b$
Un élément négatif.....	$mpn'm$
» »	$m'p'n'm'$
» positif.....	$mm'm$.

Les portions d'éléments, avant et après la dislocation, sont semblablement disposées par rapport au reste du groupe; il n'y a donc à tenir compte que des éléments complets et de l'ovale ajouté; on en conclut immédiatement que cette dislocation, que j'appellerai

du troisième genre, a *augmenté* l'indice d'une unité. On verrait sans peine que l'indice aurait été au contraire diminué d'une unité, si la dislocation du troisième genre avait été obtenue par voie de déformation négative.

D'ailleurs, à l'inspection de la *fig. 6*, il est visible qu'en chaque point infiniment voisin du point de dislocation passent *trois* branches appartenant à l'un quelconque des groupes déformés consécutifs.

En résumant les considérations qui précèdent, nous sommes autorisés à énoncer le théorème suivant :

THÉOREME VI. — *Une dislocation obtenue par voie de déformation positive fait varier l'indice du groupe de -1 , zéro ou $+1$, suivant qu'elle est du premier, du deuxième ou du troisième genre, c'est-à-dire suivant que le nombre des branches appartenant aux divers groupes déformés consécutifs et passant par un même point quelconque infiniment voisin du point de dislocation est 1, 2 ou 3. L'inverse a lieu si la dislocation est obtenue par voie de déformation négative.*

SECONDE PARTIE.

APPLICATION AU SYSTÈME DES ISOMORPHIQUES D'UNE COURBE ALGÈBRE PLANE.

Définition de l'isomorphique. — J'appellerai *isomorphique* d'une courbe plane U le lieu des points d'où l'on voit la courbe U sous un même angle imaginaire donné, cet angle étant défini comme celui que font entre elles deux droites imaginaires conjuguées données.

Pour éclaircir cette définition et faciliter l'intelligence des développements qui vont suivre, il est indispensable de rappeler ici brièvement quelques principes relatifs aux éléments imaginaires que l'on a à considérer en Géométrie.

On sait qu'il existe deux genres de droites imaginaires : 1° celles qui possèdent un point réel unique à distance finie; 2° celles dont le point réel unique est à l'infini. Chaque droite du premier genre peut être caractérisée géométriquement par l'*excentricité*, par l'*orientation* et par le *sens* (de parcours) de l'une quelconque des

ellipses homothétiques et concentriques dont elle serait l'une des asymptotes, l'autre asymptote ayant pour indicatrice la même ellipse, mais parcourue en sens inverse. J'appellerai cette ellipse (dont les dimensions absolues sont d'ailleurs indéterminées) l'*indicatrice* du couple de droites imaginaires; son centre, qui est le point réel unique de ces deux droites, sera dit leur *ombilic*. On vérifie aisément :

1° Que les équations de deux droites conjuguées du premier genre, en coordonnées cartésiennes, rapportées à deux diamètres conjugués de leur indicatrice, se réduisent à la forme

$$y = \pm mx\sqrt{-1}$$

m étant le rapport des deux diamètres dirigés suivant les axes de coordonnées;

2° Que, pour que deux droites imaginaires du premier genre fassent entre elles un angle réel, il faut et il suffit que leurs indicatrices soient semblables et de même sens (c'est-à-dire que m ait la même valeur et le même signe quand on rapporte respectivement les équations des deux droites aux axes de leurs indicatrices); l'angle des deux droites est alors la différence d'orientation de leurs indicatrices : d'où il résulte que, pour que l'angle des deux droites soit nul, c'est-à-dire pour qu'elles soient parallèles, il faut et il suffit que les deux indicatrices soient semblables, de même sens et semblablement placées;

3° Que, pour que deux droites aient leurs bissectrices *réelles* (ou du moins à coefficient angulaire réel), il faut et il suffit que leurs indicatrices soient semblables et de sens contraire; les directions des bissectrices coïncident alors avec celles des bissectrices des axes homologues des deux indicatrices.

En raison de ces relations remarquables, on peut désigner les droites imaginaires du premier genre par le nom de *hémiellipses* ou droites hémielliptiques. Si l'ellipse indicatrice devient un cercle, les hémiellipses correspondantes deviennent des hémicercles, c'est-à-dire ce que l'on appelle souvent des droites isotropes du premier et du second système; et l'on aperçoit immédiatement que l'angle compris entre deux droites isotropes du même système doit être absolument indéterminé.

Les droites imaginaires du second genre, dont le point réel est

à l'infini, ont toujours leur coefficient angulaire réel, et leur équation, rapportée à des axes convenables, peut toujours être ramenée à la forme

$$r = \pm n\sqrt{-1},$$

où n est une constante.

Ici les deux droites conjuguées sont parallèles entre elles. Je désignerai, pour abrégé, les droites imaginaires du deuxième genre sous le nom de droites *hémitropes*.

Cela posé, soit donnée une courbe algébrique U de classe m et de degré n , et que je supposerai tout d'abord, pour simplifier les raisonnements, n'être pas tangente à la droite de l'infini, n'avoir aucune droite hémitrope pour asymptote, et enfin n'avoir aucun foyer multiple. Si d'un point réel quelconque M à distance finie on mène les n tangentes à la courbe U , les unes seront réelles, les autres formeront des couples de droites hémielliptiques. Si le point réel M est pris à l'infini, les n tangentes seront les unes réelles, les autres hémitropes, conjuguées par couples, mais toutes auront le même coefficient angulaire réel. Il en résulte que, si l'on considère tous les points réels d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémielliptiques conjuguées ayant pour directrice une certaine ellipse ϵ définie comme excentricité, mais d'orientation variable, le lieu de ces points sera une courbe I ne possédant aucun point réel à l'infini. D'ailleurs, de tous les points de I , on verra U sous un même angle imaginaire, celui que forment entre elles les deux asymptotes de ϵ ; I sera donc par définition une isomorphe de U . Si maintenant on fait varier l'excentricité de l'ellipse ϵ depuis zéro jusqu'à 1, c'est-à-dire l'ellipse elle-même depuis la forme circulaire jusqu'à la forme infiniment aplatie, on obtiendra toutes les isomorphes possibles de U comme formant un système continu, depuis celle qui correspond à une directrice circulaire et qui se réduit évidemment aux n foyers de U , jusqu'à celle qui comprend tous les points réels d'où l'on peut voir la courbe U sous un angle nul, et qui se compose par conséquent de la courbe U elle-même, de ses tangentes d'inflexion, de ses tangentes doubles et de la droite de l'infini, comptées chacune un certain nombre de fois.

Ainsi que nous venons de le voir, aucune des isomorphes du système, si ce n'est la dernière qui comprend U , ne possède de point réel à l'infini. Et, en effet, il est facile de s'assurer, par divers

procédés sur lesquels il est inutile d'insister, que le degré d'une isomorphique est $2n(n-1)$, et que ses seuls points à l'infini sont les points circulaires, comptés chacun $n(n-1)$ fois. [Si la droite de l'infini était g fois tangente à U , le degré des isomorphiques serait $2(n-1)(n-g)$.] Chaque isomorphique se compose donc, quant à ses régions réelles, d'un nombre fini de contours dont aucun ne passe par l'infini; nous pouvons donc lui appliquer la notion de l'indice, tel qu'il a été défini dans la première partie de ce Mémoire. Et puisque l'isomorphique correspondant à une indicatrice circulaire se réduit à n points distincts, les foyers de U , l'isomorphique immédiatement consécutive, correspondant à une indicatrice d'excentricité infiniment petite, se composera de n contours fermés infiniment petits et distincts, enveloppant chacun un des n foyers; son indice sera donc n , pourvu que l'on choisisse le sens positif sur chacun de ces contours, de manière qu'il forme un élément positif.

Je dis maintenant que les isomorphiques successives peuvent être considérées comme se déduisant les unes des autres par déformation ou dislocation, dans le sens que j'ai attaché précédemment à ces deux mots, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent avoir d'enveloppe réelle; car, s'il existait une telle enveloppe, de l'un quelconque de ses points on pourrait mener à la courbe U deux tangentes hémielliptiques infiniment peu différentes (correspondant aux deux isomorphiques infiniment voisines qui passeraient en ce point); il appartiendrait donc soit à la courbe réelle U , soit à l'une de ses tangentes hémielliptiques d'*inflexion* ou *doubles*, et, puisqu'il est réel par hypothèse, il serait soit un point isolé de U , soit l'ombilic de l'une des tangentes imaginaires d'*inflexion* ou *doubles* de U . Mais les points isolés et les ombilics de tangentes d'*inflexion* et *doubles* sont en nombre fini et ne peuvent former une courbe continue; il ne saurait donc exister d'enveloppe réelle pour le système des isomorphiques.

Il résulte de ce qui précède que, pour obtenir l'indice de la dernière isomorphique (en appelant ainsi l'isomorphique qui correspondrait à une indicatrice infiniment aplatie, et qui différerait par suite infiniment peu de la courbe réelle U augmentée de ses tangentes d'*inflexion* et *doubles* et de la droite de l'infini), il suffira de tenir compte des points critiques et des points de dislocation de

premier et de troisième genre qui peuvent exister dans le système des isomorphiques. Mais nous allons voir que ces points critiques et de dislocation ont une signification géométrique très-simple relativement à U.

THÉORÈME VII. — *Tout point critique du système des isomorphiques de U est un point isolé de U, ainsi que tout point de dislocation du troisième genre; et réciproquement tout point isolé de U est un point critique ou un point de dislocation du troisième genre du système des isomorphiques de U, suivant que ses deux tangentes ne sont pas ou sont en même temps des tangentes d'inflexion. D'autre part, tout point de dislocation du premier genre est l'ombilic d'un couple d'asymptotes hémielliptiques de U, et réciproquement.*

En effet, soit d'abord M un point double ordinaire sur l'une des isomorphiques de U : de ce point, on peut mener à U deux couples de tangentes hémielliptiques dont les indicatrices sont semblables, mais non en général semblablement placées. Il pourra toutefois arriver, comme cas particulier (se présentant un nombre limité de fois dans une série continue de points doubles des isomorphiques successives), qu'elles soient semblablement placées; mais il n'y a aucune raison pour que les *points de contact* de ces deux couples de tangentes coïncidentes soient également coïncidents : dans les cas particuliers dont il s'agit, M sera par conséquent l'ombilic d'un couple de *tangentes doubles* hémielliptiques de U. Mais, si M est en même temps un point de rebroussement de l'isomorphe, ou un point de dislocation dans le système des isomorphiques successives, il est aisé de voir que la coïncidence a lieu nécessairement, tant pour l'orientation des indicatrices que pour les points de contact des deux couples de tangentes : dans le premier cas, parce que, les deux points composants du point double étant consécutifs, sont liés directement par la loi de continuité, ainsi que les couples de tangentes qui en sont issues; dans le second, parce que la même liaison existe indirectement entre ces deux points composants, par l'intermédiaire des branches de l'isomorphe infiniment voisine, comme on peut le voir sur l'une quelconque des *fig. 4, 5 et 6* : par exemple, sur la *fig. 4*, M, considéré comme appartenant à la branche St, est lié par la loi de continuité au point S, celui-ci au

point p' (comme points correspondants sur deux isomorphiques consécutives), le point p' au point n (comme infiniment voisins sur une même isomorphique), ce dernier au point S' , et enfin S' au point M considéré comme appartenant à la branche $S't'$. Et il est clair que cette liaison indirecte ne peut être établie entre les deux points composants du point double d'une isomorphique donnée, que dans le seul cas où ce point joue le rôle de point de dislocation du système.

Il est donc prouvé que les points de dislocation et les points de rebroussement sont les seuls points qui puissent être les ombilics de couples de tangentes hémielliptiques *coïncidentes deux à deux* et ayant aussi leurs points de contact coïncidents, et qu'ils sont effectivement des ombilics de couples de ce genre. La seule exception à la première partie de cette règle serait fournie par le cas doublement particulier où les deux couples de tangentes *doubles* hémielliptiques auraient leurs points de contact coïncidents, comme cela peut arriver aussi accidentellement pour des tangentes doubles réelles.

Considérons maintenant en particulier un point critique du système des isomorphiques, c'est-à-dire un point de rebroussement de l'une d'elles, enveloppé par une boucle dans les suivantes. De ce point M on peut mener à U deux couples de tangentes hémielliptiques coïncidentes, et de tout point infiniment voisin deux couples de tangentes hémielliptiques infiniment peu différents, comme nature de l'indicatrice et comme position des points de contact. Mais, d'autre part, ces deux couples coïncidents ne comptent que pour *un* parmi les couples parallèles; car, d'une manière générale, il est clair que les ombilics des n couples parallèles définis par une même indicatrice donnée de forme et d'orientation sont placés en n points distincts d'une même isomorphique, en sorte que, si deux de ces ombilics NN' viennent à coïncider, il n'en sera pas de même en général des ombilics des deux couples parallèles infiniment voisins; c'est-à-dire que la coïncidence des deux ombilics NN' n'empêchera pas que les deux branches de l'isomorphique sur laquelle ils sont situés ne restent distinctes dans quatre directions à partir du point NN' ; cette isomorphique devra donc avoir un point double ordinaire en NN' et non un rebroussement. Dès lors, l'ensemble des conditions auxquelles doivent satisfaire les couples de tangentes

coïncidentes issues de M exige que M soit le point même de contact, et par conséquent un point isolé du lieu.

Considérons ensuite un point de dislocation M. Si la dislocation est du premier genre, nous avons vu qu'en tout point infiniment voisin de M il passe une seule branche d'isomorphique : donc les deux couples de tangentes coïncidentes issues de M, lesquels comptent pour *deux*, comme nous venons de le voir, parmi les couples parallèles, ne comptent que pour *un* parmi les n couples de tangentes que l'on peut mener de M à U : ce qui exige que ces tangentes soient des asymptotes. Si la dislocation est du second genre, les couples coïncidents comptent pour *deux* aussi bien parmi les couples parallèles que parmi ceux qu'on peut mener de M, ce qui exige (à cause de la coïncidence des points de contact) que ce soient des couples de tangentes d'inflexion. Enfin, si la dislocation est du troisième genre, les couples coïncidents comptent pour *deux* parmi les couples parallèles, et pour *trois* parmi ceux qu'on peut mener de M ; ce qui exige que M soit un point isolé de U et que les deux tangentes hémielliptiques de U en ce point soient en même temps des tangentes d'inflexion.

Réciproquement, l'ombilic d'un couple d'asymptotes ou de tangentes d'inflexion hémielliptiques de U est nécessairement, d'après ce qui précède, point double sur une certaine isomorphique, et en même temps point de dislocation du système des isomorphiques ; et, puisqu'une asymptote ne compte que pour *une* parmi les tangentes qu'on peut mener à U de l'un quelconque de ses points à distance finie, il faut bien qu'en tout point infiniment voisin du point de dislocation il ne passe qu'une branche d'isomorphique, c'est-à-dire que la dislocation soit du premier genre. De même les tangentes en un point isolé de U devant compter chacune pour *une* parmi les tangentes parallèles, et pour *deux* parmi les tangentes qu'on peut mener de ce point à U, il faut que ce point isolé soit, sur l'isomorphique à laquelle il appartient, un point de telle nature qu'il y passe une branche d'isomorphique *de moins* qu'en tout point infiniment voisin, c'est-à-dire que ce soit un point critique ou un point de dislocation du troisième genre.

Le théorème VII est donc entièrement démontré, et nous voyons de plus que tout point de dislocation est nécessairement l'ombilic d'un couple de tangentes d'

à moins que le point d'inflexion ne soit en même temps point isolé.

Il est d'ailleurs sans intérêt de discuter ici les cas particuliers qui peuvent résulter, par exemple, de la coïncidence d'une tangente d'inflexion avec une asymptote, ou de l'existence de tangentes d'ondulation hémielliptiques; on vérifierait facilement que ces cas particuliers donnent lieu à des dislocations plus complexes, mais équivalant toujours, comme influence sur l'indice, à la superposition de deux des genres simples de dislocation dont nous venons de trouver la signification géométrique.

En tenant compte des définitions données ci-dessus et des divers théorèmes précédemment établis, nous obtenons immédiatement le théorème suivant :

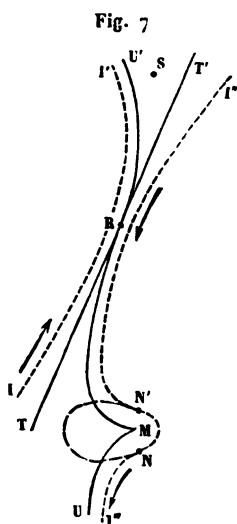
THÉORÈME VIII. — *Le sens positif étant choisi partout de manière que les isomorphiques successives, à partir de l'ensemble des n foyers, se déduisent les uns des autres par déformation positive, l'indice de la dernière isomorphique sera*

$$n + \delta' - m,$$

en désignant par δ' , le nombre des points isolés de U et par $2m$, le nombre de ses asymptotes imaginaires (hémielliptiques, puisque nous avons supposé qu'il n'en existait pas d'hémitropes).

Étudions la forme de la dernière isomorphique. Puisqu'elle se compose de tous les points réels d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémielliptiques à indicatrice infiniment aplatie, elle suit à distance infiniment petite la courbe U , mais toujours du côté de sa concavité; elle la quitte donc en chaque point réel d'inflexion, pour suivre la tangente d'inflexion jusqu'à une distance infiniment grande (*fig. 7*) et rejoindre par un arc situé tout entier à distance infiniment grande et tournant sa convexité vers la droite de l'infini (puisque'elle ne peut traverser cette droite) une autre tangente d'inflexion, ou une branche infinie de U , ou enfin une tangente double isolée de U . Elle n'a évidemment aucune branche en rapport avec les tangentes doubles réelles de U dont les deux points de contact sont réels; mais elle possède, de chaque côté de toute tangente double isolée, deux branches distinctes qui suivent cette tangente de part et d'autre jusque vers l'infini, en lui présentant

leur convexité, puisqu'au voisinage d'une telle tangente, d'un point réel pris soit d'un côté, soit de l'autre, on doit pouvoir, d'après la loi de continuité, mener à U deux tangentes dont les points de contact soient imaginaires conjugués, et qui diffèrent infiniment peu d'une droite réelle. D'après ces considérations, la dernière isomorphique ne peut avoir elle-même d'inflexions réelles qu'au voisinage de chaque point réel M de rebroussement de U;



et nous pouvons, sans changer son indice, remplacer l'arc compris entre les deux points d'inflexion qu'elle y possède par un arc de même sens de courbure que le reste de l'isomorphique, en introduisant (*fig. 7*) deux rebroussements N, N'. La classe de l'isomorphique ainsi modifiée, c'est-à-dire le nombre de ses tangentes parallèles à une direction quelconque, sera, d'après le théorème II, égale au double de son indice, augmenté du nombre de ses rebroussements, pourvu que le sens positif ait été choisi de manière à avoir la convexité tournée vers la droite. Or cette dernière condition est remplie dans l'hypothèse où nous nous sommes placés précédemment pour calculer l'indice de la dernière isomorphique, puisque nous savons que la courbe U (augmentée de ses tangentes d'inflexion et isolées) s'en déduit par déformation positive, c'est-à-dire en marchant vers la droite. Nous trouvons donc, pour le

nombre des tangentes parallèles de la dernière isomorphique modifiée comme il a été dit,

$$2(n + \delta'_1 - m_2) + 2k_1,$$

k_1 étant le nombre des points de rebroussement réels de U.

Examinons maintenant ce que deviennent ces tangentes parallèles, toutes réelles, lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U. Il suffit évidemment d'examiner l'influence : 1° des points de rebroussement réels de U; 2° des tangentes réelles d'inflexion de U; 3° des asymptotes réelles de U; 4° des tangentes doubles isolées de U; 5° des portions de branches réelles de la dernière isomorphique qui vont se confondre avec la droite de l'infini; car partout ailleurs le passage de la dernière isomorphique à la courbe réelle U se fait immédiatement, sans que le nombre des tangentes réelles, parallèles à une direction donnée, puisse être altéré.

1° A chaque point de rebroussement M (*fig. 7*), il est visible, à l'inspection de la figure, que le passage de la dernière isomorphique (modifiée) à la courbe U fait disparaître *une* tangente réelle, quelle que soit la direction considérée; le nombre de ces tangentes diminue donc de k_1 .

2° Pour apprécier l'influence d'une tangente réelle d'inflexion TT' (*fig. 7*), considérons d'abord le point même d'inflexion R: de ce point on peut mener aux branches de la dernière isomorphique (II', I''I'''), qui sont voisines de TT', quatre tangentes réelles distinctes, lesquelles viennent se confondre avec la tangente d'inflexion TT', quand on passe à la courbe U; mais la tangente d'inflexion compte pour trois seulement parmi les tangentes que l'on peut mener de R à U: il y a donc réduction d'une *unité* dans le nombre total de ces tangentes, par le fait du passage considéré. La même relation a lieu évidemment pour tous les points situés dans l'une des régions TRU, T'RU', car le nombre total de tangentes réelles que l'on peut mener par l'un quelconque S de ces points à la dernière isomorphique ne diffère du nombre correspondant pour le point R qu'en raison des branches d'isomorphique qu'on a pu être forcé de traverser pour aller de R en S, chaque traversée d'une telle branche introduisant ou supprimant deux tangentes réelles, suivant qu'elle se présente par le côté concave ou le côté

convexe. Il en est exactement de même si, au lieu de l'isomorphique, on considère cette courbe dans laquelle on a introduit la seule inflexion R et déplacé infiniment peu les diverses branches transversales dont il a été question ci-dessus, de manière à la faire coïncider partiellement avec la courbe U : la différence entre le nombre total des tangentes que l'on peut mener de R et de S , n'étant dû qu'à ces branches transversales, reste évidemment la même; le seul cas où ce ne soit pas évident est celui où, le point S étant pris à l'infini, quelques-unes des branches de la dernière isomorphique qu'il est nécessaire de traverser pour aller de R à S seraient elles-mêmes à distance infiniment grande, parce qu'alors, en passant à la courbe U , ces branches viendraient se confondre avec la droite de l'infini, laquelle ne fait plus partie, à proprement parler, de la courbe U . Mais nous verrons tout à l'heure que, dans ce cas, les deux tangentes réelles que l'on gagne en traversant une telle branche d'isomorphique pour aller de R à un point S situé à l'infini (puisqu'une telle branche tourne nécessairement sa convexité vers la droite de l'infini) sont représentées, quand on passe de la dernière isomorphique à la courbe U , par deux tangentes hémitropes conjuguées de cette dernière; en sorte que, à la condition de compter parmi les tangentes de U parallèles à une direction donnée, non-seulement les tangentes réelles, mais les tangentes hémitropes, il nous est permis de dire que, lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U , il disparaît i_1 tangentes parallèles à une direction quelconque, i_1 étant le nombre des points réels d'inflexion de U .

3° Pour chaque asymptote réelle, nous pouvons, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour les tangentes d'inflexion, considérer, au lieu d'un point à l'infini, un point pris à distance finie sur l'asymptote : d'un tel point on peut mener à la dernière isomorphique *deux* tangentes réelles, qui viennent, lors du passage à la courbe U , se confondre avec l'asymptote elle-même, laquelle ne compte que pour *une* parmi les tangentes qu'on peut mener à U du point considéré. Le nombre total des tangentes parallèles diminue donc de m_1 , si m_1 est le nombre total des asymptotes réelles de U .

4° Pour chaque tangente double isolée, on voit de même, en prenant sur elle un point quelconque à distance finie, qu'il dispa-

rait deux tangentes; le nombre total des tangentes parallèles diminue donc de $2\tau'_1$, si τ'_1 est le nombre total des tangentes doubles isolées de U.

5° Les portions de branches réelles de la dernière isomorphique qui vont se confondre avec la droite de l'infini n'ont d'autre effet, comme je l'ai annoncé, que de donner naissance à des couples de tangentes hémitropes conjuguées. En effet, d'un point pris à l'infini dans une direction vers laquelle existe une de ces branches de la dernière isomorphique, on peut évidemment mener à cette branche *deux* tangentes réelles qui viennent se confondre avec la droite de l'infini lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U. Il disparaît donc deux tangentes réelles parmi celles qui émanent du point considéré, c'est-à-dire parmi les tangentes parallèles à la direction qui définit ce point. Mais en même temps ce point peut être considéré comme la position limite d'un point variable des isomorphiques, point variable duquel on pouvait mener à la courbe U deux tangentes hémielliptiques conjuguées, dont l'indicatrice avait une excentricité de plus en plus grande; à la limite, l'indicatrice est infiniment aplatie, et le point limite étant à l'infini est un point d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémitropes conjuguées. L'existence des branches dont il s'agit n'exerce donc aucune influence (indépendamment des tangentes d'inflexion ou isolées et des asymptotes auxquelles elles se rattachent) sur le nombre total des tangentes parallèles à une direction donnée, pourvu que parmi ces tangentes on compte les hémitropes aussi bien que les réelles.

En résumé, le passage de la dernière isomorphique (modifiée) à la courbe U fait disparaître

$$k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1$$

tangentes parallèles à une direction quelconque. Le nombre des tangentes de U parallèles à une direction quelconque, tant réelles qu'hémitropes, est donc

$$2(n + \delta'_1 - m_1) + 2k_1 - (k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1);$$

mais ce nombre n'est autre que la classe n de U, puisque nous avons admis que la droite de l'infini n'est pas tangente à U; nous

pouvons donc écrire la relation

$$n = 2(n + \delta'_1 - m_2) + 2k_1 - (k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1),$$

laquelle se simplifie, en remarquant que l'on a

$$m_1 + 2m_2 = m,$$

puisque U n'est point tangente à la droite de l'infini et n'a, par hypothèse, aucune asymptote hémitrope, en sorte que son degré m est égal au nombre total $m_1 + 2m_2$ de ses asymptotes tant réelles qu'hémielliptiques. La relation écrite ci-dessus devient dès lors

$$(1) \quad n + k_1 + 2\delta'_1 = m + i_1 + 2\tau'_1 :$$

c'est précisément celle que je me proposais d'établir.

Il est d'ailleurs facile de faire disparaître les restrictions que j'avais admises, pour la commodité de la démonstration, dans la définition de la courbe U, et de montrer que la relation ci-dessus s'applique d'une manière absolument générale à une courbe algébrique quelconque de degré m et de classe n . Tout d'abord, d'après ce que nous avons vu du rôle que jouent, par rapport à U, les points de dislocation du système de ses isomorphiques, il est clair que rien ne sera changé à la démonstration si deux des foyers viennent à se rapprocher de plus en plus, jusqu'à coïncider en un foyer double, soit qu'un point de dislocation vienne ou non en même temps coïncider avec ce foyer double (c'est-à-dire soit que les tangentes isotropes, issues de ce foyer, jouent le rôle de tangentes doubles, ou de tangentes d'inflexion, ou d'asymptotes). La courbe U peut donc avoir des foyers doubles ou multiples. D'autre part, étant donnée une courbe algébrique plane, tangente à la droite de l'infini ou ayant des asymptotes hémitropes (c'est-à-dire un ou plusieurs points isolés à l'infini), il est évidemment toujours possible d'en déduire, par projection *réelle*, une courbe algébrique U' de même degré et de même classe, ayant le même nombre de singularités réelles (rebroussements, inflexions, points isolés, tangentes isolées), et qui satisfasse à la condition de n'être point tangente à la droite de l'infini et de n'avoir à l'infini aucun point isolé. La relation (1) ayant lieu pour U' sera vraie par cela même pour U.

Si, au lieu de considérer la classe de la dernière isomorphique, nous avons considéré son degré, nous serions arrivé à l'une des

formules de Plücker. En effet, le degré de toutes les isomorphiques est, comme il a été dit,

$$2n(n-1).$$

Lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U, on obtient, outre cette courbe dont le degré est m , la droite de l'infini, comptant évidemment $n(n-1)$ fois (puisque de chaque point de cette droite on peut mener à U n tangentes qui forment, combinées deux à deux dans tous les ordres possibles, $n(n-1)$ couples, dont l'indicatrice est infiniment aplatie); puis les tangentes doubles de U et ses tangentes d'inflexion. Pour voir combien de fois doit compter chaque tangente double, il suffit de considérer une tangente isolée : deux branches de la dernière isomorphique viennent s'y confondre pour devenir ensuite imaginaires; cette tangente compte donc pour deux. Pour les tangentes d'inflexion, il semble, en considérant de même les branches réelles, que chaque tangente ne doive compter que pour une; mais il convient de remarquer que, lorsqu'il s'agit du degré, nous ne pouvons plus négliger les éléments imaginaires, c'est-à-dire, dans l'espèce, les points d'intersection imaginaires que peut fournir la dernière isomorphique au voisinage d'une tangente réelle d'inflexion, lorsqu'on la coupe par une transversale, points d'intersection dont l'aspect des branches réelles ne suffit pas à déceler l'existence. Or, si l'on construit, au voisinage d'un point réel d'inflexion de U, une des isomorphiques négatives (lieu des points d'où l'on peut mener à U deux tangentes *réelles* faisant entre elles un angle constant) correspondant à un angle très-petit, il est facile de vérifier qu'on peut toujours tracer une tangente réelle de U qui rencontre cette isomorphique négative en quatre points réels très-voisins (dont deux confondus au point de contact), ce qui conduit à prendre 3 pour coefficient relatif aux tangentes d'inflexion. On trouverait d'ailleurs immédiatement cette valeur du coefficient, en le déterminant dans un cas particulier, par exemple dans le cas d'une cubique non singulière; et l'on obtient ainsi la relation

$$2n(n-1) = n(n-1) + m + 2\tau + 3i$$

ou

$$m = n(n-1) - 2\tau - 3i,$$

c'est-à-dire l'une des relations de Plücker.

Sur les suites de Farey; par M. ÉDOUARD LUCAS.

Seance du 21 novembre 1877.

Considérons les suites

1, 1.
1, 2, 1.
1, 3, 2, 3, 1.
1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1.
.....

telles que chacune d'elles s'obtient en intercalant dans la précédente la somme de deux termes consécutifs, dans leur intervalle.

On a les propriétés suivantes :

- 1° Le nombre des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égal à $2^{n-1} + 1$;
- 2° La somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égale à $3^{n-1} + 1$;
- 3° La somme des termes pris avec les signes alternés est $1 - 3^{n-2}$ pour $n \geq 2$;
- 4° Les deux plus grands termes de la $n^{\text{ième}}$ suite ont pour rang

$$2^{n-2} - 1 \text{ et } 2^{n-1}$$

et pour valeur

$$\frac{1 - \sqrt{5}^{2^{n-2}-1} - 1 - \sqrt{5}^{2^{n-1}-1}}{2^{n-2} \sqrt{5}}.$$

- 5° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite, dont le rang est

$$2^{n-2} - 1 = [2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \dots - 1] 2^{n-2},$$

est égal, en supposant $p \geq 2$, à

$$\frac{1 - \sqrt{5}^{2^{n-2}} - 1 - \sqrt{5}^{2^{n-1}}}{2^{n-2} \sqrt{5}}.$$

- 6° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite dont le rang est

$$2^{n-2} - 1 = [2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \dots - 1] 2^{n-1}$$

est égal, en supposant $p \geq 3$, à

$$\frac{1 - \sqrt{5}^{2^{n-2}} - 1 - \sqrt{5}^{2^{n-1}}}{2^{n-1}}.$$

7° Enfin nous rappellerons cette intéressante propriété signalée par M. Halphen : la $n^{\text{ième}}$ suite et chacune des suivantes contiennent le nombre n autant de fois qu'il y a d'entiers inférieurs et premiers à n .

On généralise les résultats précédents, en remplaçant la première suite 1, 1 par deux nombres quelconques a et b , et en faisant l'intercalation convenue.

Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés; par M. HALPHEN.

(Séance du 9 janvier 1878.)

Dans le tome précédent du *Bulletin*, j'ai donné une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres, formule analogue à celle d'Euler. En voici une nouvelle, qui ne concerne que les sommes de certains diviseurs.

Soient x un nombre entier positif et $S(x)$ la somme des diviseurs positifs de x , dont les quotients par x sont impairs; la fonction numérique $S(x)$ vérifie la relation récurrente

$$(1) \quad S(x) = 2[S(x-1) - S(x-4) + S(x-9) \dots \pm S(x-n^2) \dots].$$

Le second membre doit être prolongé jusqu'au dernier nombre positif $(x - n^2)$, et, si x est un carré, $S(0)$ doit être remplacé par $\frac{1}{2}x$.

La démonstration, calquée sur celle qu'Euler a donnée de sa célèbre formule, se déduit de l'identité suivante :

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots$$

La formule (1) présente cette circonstance curieuse qu'on en peut aisément déduire la théorie de la décomposition des nombres entiers en sommes de deux carrés. C'est ce que je vais montrer.

Dès que x n'est pas un carré impair, $S(x)$ est pair, comme on le voit soit directement, soit par la formule (1).

Si x n'est pas un carré et qu'aucun nombre $(x - n^2)$ ne soit lui-même un carré, la formule (1) fait voir que $S(x)$ est divisible par 4. Ainsi $S(x)$ est divisible par 4 toutes les fois que x n'est pas la somme de deux carrés.

Je suppose x premier. Alors $S(x)$ est égal à $(x + 1)$. Si x n'est pas la somme de deux carrés, j'en conclus que x est de la forme $4m - 1$, puisque $(x + 1)$ doit être divisible par 4. Donc, *tout nombre premier qui n'est pas la somme de deux carrés est de la forme $4m - 1$.*

En conséquence, *tout nombre premier $4m + 1$ est la somme de deux carrés.*

Note sur les développements des puissances de certaines fonctions :
par M. DESIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 19 décembre 1877.)

Considérons une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^n C_i \frac{d^i z}{dx^i} = k \Phi,$$

dont le premier membre est celui d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients constants, et au second membre de laquelle Φ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à la fonction φ , à la variable x , à l'indéterminée k , et à des exponentielles de la forme e^{ax} .

Nous avons démontré récemment ⁽¹⁾ que si l'on pose, d'une part,

$$z(x) = \sum_{i=1}^n z_i(x),$$

et de l'autre

$$z(x) = \sum_{i=1}^n -z_i \cdot \Gamma\left(\frac{x}{\varphi}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x}{\varphi}\right) \sum_{j=1}^n C_j \varphi^j,$$

(1) Voir l'impression de l'Annuaire de Sciences, no 22, des. 1877.

ν_t est un polynôme entier par rapport à la variable x et a des exponentielles de la forme e^{mx} , et que $\theta_{r,t}$, regardé comme fonction de r seulement, l'indice t étant supposé constant, constitue le terme général d'une série récurrente proprement dite.

L'objet de la présente Note est de faire remarquer un fait presque évident, à savoir que ces deux résultats s'étendent aux développements d'une puissance quelconque, d'exposant entier et positif, de la fonction $\varphi(x)$, c'est-à-dire de faire remarquer, si l'on pose, d'une part,

$$\varphi^p(x) = \sum_t \nu_t^{(p)} k^t$$

et, de l'autre,

$$\varphi^p(x) = \sum_t (-1)^t F_t^{(p)} \frac{x^t}{t!}, \quad F_r^{(p)} = \sum_t \theta_{r,t}^{(p)} k^t,$$

que $\nu_t^{(p)}$ est, comme ν_t , un polynôme entier par rapport à la variable x et a des exponentielles de la forme e^{mx} , et que $\theta_{r,t}^{(p)}$, regardé comme fonction de r seulement, constitue, de même que $\theta_{r,t}$, le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Sur l'intégration de l'équation $y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 6f(x)$, f étant un polynôme du second degré; par M. LAGUERRE.

(Séance du 19 décembre 1877.)

1. Étant donnée l'équation du second ordre

$$(1) \quad y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 6f(x),$$

où f désigne un polynôme du second degré en x , on sait que cette équation admet comme solutions une infinité de polynômes entiers du troisième degré, à savoir tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est égal à $f(x)$. Je me propose dans la Note suivante de trouver son intégrale générale.

A cet effet, je remarque qu'en posant $\frac{dy}{dx} = y'$, l'équation (1)

peut être remplacée par le système d'équations simultanées du premier ordre

$$(2) \quad \frac{dx}{y^{-\frac{4}{3}}} = \frac{dy}{y^{-\frac{1}{3}} y'} = \frac{dy'}{6fy^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y'^2 y^{-\frac{1}{3}}},$$

dont le *dernier multiplicateur* est égal à l'unité, puisque l'on a

$$\frac{d}{dx} (y^{-\frac{4}{3}}) + \frac{d}{dy} (y^{-\frac{1}{3}} y') + \frac{d}{dy'} (6fy^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y'^2 y^{-\frac{1}{3}}) = 0.$$

Des principes établis par Jacobi, il résulte qu'il suffit, pour intégrer complètement l'équation (1), d'en trouver une intégrale du premier ordre renfermant une constante arbitraire.

Pour l'obtenir, je prends successivement les trois premières dérivées de l'équation

$$(3) \quad yy'' - \frac{2}{3} y'^2 = 6f,$$

à savoir

$$(4) \quad yy''' - \frac{1}{3} y' y'' = 6f',$$

$$(5) \quad yy^{iv} + \frac{2}{3} y' y''' - \frac{1}{3} y''^2 = 6f'',$$

$$yy^v + \frac{5}{3} y' y^{iv} = 0.$$

La dernière équation s'intègre immédiatement, et donne, en désignant par α une constante arbitraire,

$$(6) \quad y^v = 36\alpha y^{-\frac{4}{3}}.$$

Éliminant y^{iv} , y''' et y'' entre les équations (3), (4), (5) et (6), on obtient l'intégrale du premier ordre

$$(7) \quad fy'^2 - 3f'yy' + \frac{9}{2} f''y^2 + 9f^2 = 9\alpha y^{\frac{4}{3}};$$

d'où l'on déduit, en posant

$$f = Ax^2 + Bx + C \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - 4AC = f'^2 - 2ff'',$$

$$(8) \quad y' = \frac{3(fy + \sqrt{\Delta y^2 - 4f^2 + 4\alpha y^{\frac{4}{3}}})}{2f};$$

d'où

$$2f\gamma' - 3f'\gamma = 3\sqrt{\Delta\gamma^3 - 4f^3 - 4\alpha f\gamma^{\frac{4}{3}}}.$$

2. Je remarque maintenant que, d'après la théorie due à Jacobi, le facteur qui rend une différentielle exacte le premier membre de l'équation

$$(9) \quad \gamma^{-\frac{4}{3}}\gamma' dx - \gamma^{-\frac{4}{3}} d\gamma = 0$$

est $\frac{1}{\frac{d\alpha}{d\gamma}}$, ou, à un facteur numérique près,

$$\frac{3\gamma^{\frac{4}{3}}}{2f\gamma' - 3f'\gamma} = \frac{\gamma^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\Delta\gamma^3 - 4f^3 - 4\alpha f\gamma^{\frac{4}{3}}}}.$$

En multipliant l'équation (9) par ce facteur intégrant et en remplaçant γ' par sa valeur tirée de l'équation (8), il viendra

$$\frac{3}{2} \frac{dx}{f} + \frac{3f'\gamma dx - 2f d\gamma}{2f\sqrt{\Delta\gamma^3 - 4f^3 - 4\alpha f\gamma^{\frac{4}{3}}}} = 0.$$

Posons $\gamma = z^{-\frac{3}{2}}$, d'où $d\gamma = -\frac{3}{2} z^{-\frac{5}{2}} dz$; en substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, après avoir supprimé le facteur $\frac{3}{2}$,

$$\frac{dx}{f} + \frac{f'z dx + f dz}{fz\sqrt{\Delta + 4\alpha fz - f^3 z^2}} = 0,$$

ou encore, en posant $fz = u$ et, par suite, $\gamma = \left(\frac{f}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$$(10) \quad \frac{dx}{f} + \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}} = 0.$$

L'équation (1) s'intègre donc complètement au moyen des fonctions elliptiques et cette intégrale est, en désignant par α et β deux constantes arbitraires,

$$\int \frac{dx}{f} + \int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}} = \beta,$$

où u doit être remplacé par sa valeur $f\gamma^{-\frac{2}{3}}$.

3. Comme je l'ai fait observer au début de cette Note, l'équation (1) admet comme solutions une infinité de polynômes entiers; en considérant l'intégrale intermédiaire (9), on voit immédiatement que, pour ces solutions, α doit être nul, et il est facile de voir, en effet, que, dans ce cas, l'équation (10) s'intègre algébriquement.

Pour l'une quelconque de ces solutions, on a ainsi

$$f\gamma'^2 - 3f'\gamma\gamma' + \frac{9}{2}f''\gamma^2 + 9f^2 = 0,$$

ou encore, en multipliant le premier membre par $4f$ et en décomposant ses premiers termes en la somme de deux carrés,

$$(2f\gamma' - 3f'\gamma)^2 + 9(2ff'' - 4f'^2)\gamma^2 + 36f^3 = 0.$$

Pour employer les notations habituelles, si nous posons $f = H$, $\gamma = U$ et $2f\gamma' - 3f'\gamma = 3J$, il viendra

$$J^2 - \Delta U^2 + 4H^3 = 0.$$

C'est la relation bien connue qui existe entre les covariants d'une forme cubique.

Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 9 janvier 1878.)

1. Soit à intégrer l'équation du premier ordre $dy - \gamma' dx = 0$, où γ' est déterminé par l'équation

$$(1) \quad V(x, \gamma, \gamma') = \alpha$$

α désignant une constante arbitraire.

M étant le multiplicateur propre à rendre $dy - \gamma' dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (1); M sera donc une fonction de x, γ, γ' , telle que

$$M(dy - \gamma' dx),$$

soit une différentielle exacte.

D'où l'on déduit l'équation de condition

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy'} \frac{dy'}{dx} + \frac{dM}{dy} y' + \left(M + y' \frac{dM}{dy'} \right) \frac{dy'}{dy} = 0.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs les relations

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy'} \frac{dy'}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \frac{dy'}{dy} = 0.$$

Tirons de ces relations les valeurs de $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dy}$, et portons-les dans l'équation précédente, il viendra

$$(2) \quad \frac{dV}{dx} \frac{dM}{dy'} - \frac{dV}{dy'} \frac{dM}{dx} + y' \left(\frac{dV}{dy} \frac{dM}{dy'} - \frac{dV}{dy'} \frac{dM}{dy} \right) + M \frac{dV}{dy} = 0.$$

Cette équation doit être identiquement satisfaite quand on y remplace y' par sa valeur tirée de (1), et, comme α est arbitraire, elle doit être satisfaite quel que soit y' .

Le facteur d'intégrabilité M est donc déterminé par l'équation aux différences partielles (2), où x , y et y' doivent être considérées comme trois variables indépendantes.

Il suffit de trouver une solution particulière quelconque de cette équation et de remplacer, dans cette solution, y' par sa valeur tirée de l'équation (1).

Quant à la solution générale de l'équation (2), il est évident qu'elle se ramène à la solution de l'équation (1) elle-même.

2. Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Trouver toutes les fonctions $V(x, y, y')$ telles que, y' étant déterminée par la relation (1), $V(x, y, y') = \alpha$, l'équation

$$dy - y' dx = 0$$

admette comme facteur d'intégrabilité une fonction donnée M de x , y et y' .

Si, dans l'équation (2), on regarde V comme la fonction inconnue, on voit immédiatement que l'intégration de cette équation dépend de l'intégration du système suivant d'équations aux différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(3) \quad \frac{dx}{\frac{dM}{dy'}} = \frac{dy}{M + y' \frac{dM}{dy'}} = \frac{dy'}{\left(\frac{dM}{dx} + y' \frac{dM}{dy} \right)};$$

on a identiquement

$$\frac{d}{dx} \frac{dM}{dy'} + \frac{d}{dy'} \left(M + y' \frac{dM}{dy'} \right) - \frac{d}{dy'} \left(\frac{dM}{dx} + y' \frac{dM}{dy} \right) = 0.$$

Le dernier multiplicateur du système d'équations (3) est donc l'unité.

Supposons que nous ayons trouvé une solution $V(x, y, y') = \alpha$ du problème proposé, d'après les principes donnés par Jacobi, on obtiendra une seconde solution du système (3), en posant

$$(3)' \quad \int \frac{1}{\frac{d\alpha}{dy'}} \left[\left(M + y' \frac{dM}{dy'} \right) dx - \frac{dM}{dy'} dy \right] = \beta,$$

y' étant remplacé sous le signe somme par sa valeur déduite de (1) et β désignant une constante; non-seulement la quantité sous le signe somme sera une différentielle exacte, comme on le sait par les propositions dues à Jacobi, mais encore l'intégration pourra toujours s'effectuer effectivement.

La solution la plus générale du problème est ainsi donnée par la relation suivante, où F désigne une fonction arbitraire,

$$(4) \quad F(\alpha, \beta) = \text{const.},$$

où α doit être remplacé par sa valeur déduite de (1); et l'équation $dy - y'dx = 0$, où la valeur de y' est fournie par l'équation (4), admet comme facteur d'intégrabilité l'expression $M(x, y, y')$, où y' doit être remplacé par sa valeur déduite de (4).

- 3. Soit $f(x, y, \alpha)$ une fonction quelconque de x, y et d'une constante arbitraire α ; en posant

$$(5) \quad \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0,$$

l'équation $dy - y'dx = 0$ admet évidemment comme facteur d'intégrabilité l'expression

$$M = \Phi(\alpha) F'(f) \frac{df}{dy},$$

quelles que soient les fonctions Φ et F .

Je suppose que, dans cette expression, on ait remplacé α par sa

valeur tirée de l'équation (5), et je me propose de trouver toutes les équations qui admettent M comme facteur d'intégrabilité.

Pour cela, on a à intégrer le système d'équation (3) dont une première intégrale est donnée par l'équation (5), où α désigne une constante arbitraire; d'après ce que j'ai dit plus haut, une seconde intégrale sera donnée par l'équation (3)', qui devient alors

$$\int \frac{dy'}{d\alpha} \left[\left(M + y' \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy'} \right) dx - \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy'} dy \right] = \beta,$$

ou encore

$$\int \frac{dy'}{d\alpha} \left(M + y' \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy'} \right) dx - \frac{dM}{d\alpha} dy = \beta.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{dy'}{d\alpha} = \frac{\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx dy} - \frac{df}{dy} \frac{d^2f}{dx dx}}{\left(\frac{df}{dy} \right)^2}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{dy'}{d\alpha}$ dans l'expression précédente et intégrant, il vient

$$\Phi(\alpha) F'(f) \frac{df}{d\alpha} + \Phi'(\alpha) F(f) = \beta;$$

d'où cette conclusion :

Quelles que soient les fonctions Φ , Θ et F , le facteur d'intégrabilité de l'équation

$$dy - y' dx = 0,$$

où y' est déterminé par la relation

$$(6) \quad \Phi(\alpha) F'(f) \frac{df}{d\alpha} + \Phi'(\alpha) F(f) + \Theta(\alpha) = 0,$$

relation dans laquelle α doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation (5), est

$$\Phi(\alpha) F'(f) \frac{df}{dy};$$

α étant, dans cette expression, remplacé par sa valeur tirée de l'équation (6).

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer ainsi :

En désignant par Φ , Ψ et Θ des fonctions arbitraires, on peut toujours ramener aux quadratures l'intégration de l'équation

$$(7) \quad \Phi(\alpha) F'(f) \frac{df}{d\alpha} + \Psi(\alpha) F(f) + \Theta(\alpha) = 0,$$

α étant déterminé par l'équation

$$\frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0.$$

En effet, si Φ n'est pas identiquement nul, on pourra facilement ramener l'équation précédente à la forme de l'équation (6).

Si $\Phi = 0$, l'équation peut se ramener à la forme $f = \varphi(\alpha)$, α étant remplacé par sa valeur tirée de (6) et son intégrale est, comme l'a remarqué Lagrange,

$$f(x, y, \alpha) = \varphi(\alpha),$$

α désignant une constante arbitraire.

5. Je ferai remarquer encore que, l'équation (6) ne déterminant f qu'à une constante arbitraire près, on peut, dans cette équation, remplacer f par $f + \mu(\alpha)$, μ désignant une fonction arbitraire de α .

On sait donc, quelles que soient les fonctions Φ , Ψ , Θ , μ et f , intégrer l'équation

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha) F'[f + \mu(\alpha)] \left[\frac{df}{d\alpha} + \mu'(\alpha) \right] \\ & + \Psi(\alpha) F[f + \mu(\alpha)] + \Theta(\alpha) = 0, \end{aligned}$$

où α doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0.$$

6. Soit, pour prendre l'exemple le plus simple, $f = y - \alpha x$; on en déduit $y' = \alpha$.

D'où il suit que l'équation

$$dy - y' dx = 0,$$

où y' est déterminée par l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} \Phi'(y') F[y - xy' + \varphi(y')] \\ - x \Phi(y') F'[y - xy' + \varphi(y')] + \Theta(y') = 0, \end{cases}$$

a pour facteur d'intégrabilité, quelles que soient les fonctions Φ , F , Θ et φ , l'expression

$$M = \Phi(y') F'[y - xy' + \varphi(y')],$$

où y' doit être remplacé par sa valeur tirée de la relation (8).
Faisons, par exemple,

$$\varphi(t) = 0, \quad \Phi(t) = 1, \quad F(t) = -t^2 \quad \text{et} \quad \Theta(t) = t^2,$$

on aura

$$y'^2 - 2x^2 y' + 2xy = 0;$$

d'où l'équation différentielle

$$dy - (x^2 + \sqrt{x^4 - 2xy}) dx = 0,$$

dont un facteur d'intégrabilité sera

$$y - x^2 - x\sqrt{x^4 - 2xy}.$$

Effectivement, on a

$$\begin{aligned} & (y - x^2 - x\sqrt{x^4 - 2xy}) [dy - (x^2 + \sqrt{x^4 - 2xy}) dx] \\ &= (y - x^2 - x\sqrt{x^4 - 2xy}) dy \\ & \quad - [3yx^2 - x^3 + (y - 2x^2)\sqrt{x^4 - 2xy}] dx, \end{aligned}$$

expression qui, comme il est facile de le vérifier, est une différentielle exacte.

Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes;
par M. LAGUERRE.

(Séance du 16 avril 1873.)

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai z , ζ et les quantités analogues comme des quantités égales à l'unité et introduites seulement pour rendre les formules homogènes.

Cela posé, A, B et C désignant trois polynômes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et y et liés par la relation

$$(1) \quad Ax + By + Cz = 0,$$

on voit qu'en faisant varier ξ et η , l'équation

$$(2) \quad A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

représente une infinité de courbes du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces courbes forment un réseau, et l'on pourra généralement, par deux points, pris arbitrairement dans le plan, faire passer une courbe appartenant à ce réseau.

Une telle courbe est déterminée par les valeurs particulières que l'on donne à ξ , η , ζ ; il est clair d'ailleurs, en vertu de l'équation (1), que le point M, dont les coordonnées sont ξ , η , ζ , appartient à cette courbe; je dirai que le point M est son point principal.

Une courbe du réseau singulier (2) est évidemment déterminée par son point principal.

2. Toutes les courbes du réseau ont en commun tous les points communs aux courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

Pour déterminer le nombre de ces points, je remarque que, si l'on désigne respectivement par P et par Q l'ensemble des termes du degré n , par rapport à x et y , dans A et B, on a identiquement, en vertu de la relation (1),

$$Px + Qy = 0.$$

On a donc, U désignant un polynôme homogène et du degré $(n-1)$ par rapport à x et y

$$(3) \quad P = Uy \quad \text{et} \quad Q = -Ux.$$

Cela posé, les courbes $A = 0$ et $B = 0$ se coupent en n^2 points qui, en vertu de (1), se trouvent sur la courbe $Cz = 0$; des relations (3) il résulte, d'ailleurs, que $(n-1)$ de ces points d'intersection se trouvent sur la droite de l'infini $z = 0$; les $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection se trouvent donc à la fois sur les trois courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

D'où la conclusion suivante :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ points fixes.

Je dirai que ces points sont les pivots du réseau.

3. En vertu des équations (1) et (2), on voit que l'équation d'une quelconque des courbes du réseau peut se mettre sous la forme

$$A(x - \xi) + B(r - \eta) = 0,$$

ξ et η étant les coordonnées de son point principal.

Soit

$$A(x - \xi') + B(r - \eta') = 0$$

une autre courbe du réseau ayant pour point principal (ξ', η') ; si A et B ne sont pas nuls en même temps, pour tout point commun aux deux courbes, on aura

$$\frac{r - \eta}{x - \xi} = \frac{r - \eta'}{x - \xi'}.$$

D'où la proposition suivante :

Indépendamment des $(n^2 - n + 1)$ points qui leur sont communs, deux courbes quelconques du réseau se coupent en $(n - 1)$ autres points qui sont situés sur une même droite. Le $n^{\text{ième}}$ point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.

4. De là se déduisent immédiatement quelques corollaires dont la démonstration est immédiate et qu'il suffit d'énoncer :

1° *Si deux courbes du réseau se coupent en $(n - 1)$ points distincts des pivots, on peut par ces $(n - 1)$ points faire passer une infinité de courbes du réseau; les points principaux de ces courbes sont situés sur la droite contenant les $(n - 1)$ points d'intersection.*

2° *Étant donnée une courbe quelconque du réseau ayant pour point principal le point M et étant pris arbitrairement dans le plan le point P, si l'on mène PM, cette droite rencontre la courbe en $(n - 1)$ points distincts du point M; ces $(n - 1)$ points et le point P sont situés sur une courbe du réseau ayant pour point principal le point P.*

5. Les résultats qui précèdent peuvent encore s'énoncer ainsi :
Étant donnée une droite dans le plan, les courbes du réseau, qui

ont pour points principaux les différents points de la droite, ont en commun $n-1$ points situés sur cette droite: je les appellerai, pour abréger, les points centraux de la droite.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau ayant ce point fixe pour point principal.

6. Étant pris un point quelconque M dans le plan, imaginons la courbe du faisceau ayant pour point principal le point M et menons par ce point les tangentes à la courbe dont le point de contact est distinct de M.

Je dis que ces droites sont tangentes à une même courbe K. En effet, MA étant l'une de ces tangentes et A le point où elle touche la courbe, si l'on désigne par M₁ un point quelconque de la droite MA : la courbe du réseau ayant M₁ pour point principal passe par les $n-1$ points distincts de M ou la première courbe coupe MA : elle rencontre donc MA en deux points confondus en A, et lui est tangente en ce point. Les deux faisceaux de droite émanant du point M et du point M₁, ont donc la droite MA en commun et la proposition est démontrée.

On peut, d'ailleurs, du point M, mener à la courbe du réseau qui a M pour point principal n^2-n-2 tangentes ayant un point de contact distinct de M.

D'où le théorème suivant :

Si, de chaque point M du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de M, toutes ces droites enveloppent une même courbe K, qui est de la classe n^2-n-2 .

7. Supposons le point M choisi de telle sorte que la courbe du réseau, qui a M pour point principal, possède un point double : deux des tangentes issues du point M coïncident, d'où il suit que le point M est situé sur K.

D'où cette conclusion :

La courbe K est le lieu des points principaux des courbes du réseau qui possèdent un point double.

Si la courbe du réseau ayant (ξ, η) pour point principal a un point double, on a simultanément les trois équations

$$(4) \quad \begin{cases} \xi \frac{dA}{dx} + \eta \frac{dB}{dx} + \zeta \frac{dC}{dx} = 0, \\ \xi \frac{dA}{dy} + \eta \frac{dB}{dy} + \zeta \frac{dC}{dy} = 0, \\ \xi \frac{dA}{dz} + \eta \frac{dB}{dz} + \zeta \frac{dC}{dz} = 0; \end{cases}$$

et l'équation de la courbe K s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ces trois relations.

D'où il suit que :

La courbe K est du degré $3(n-1)$.

8. Des considérations qui précèdent résulte encore la proposition suivante :

Si, de chaque point M du plan, on mène à la courbe du réseau dont ce point est le point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de M, les points de contact de toutes ces tangentes sont situées sur une même courbe H, qui est aussi le lieu des points doubles des courbes du réseau.

Il est facile de démontrer analytiquement l'identité de ces deux lieux.

Il est clair, en effet, que l'équation du lieu des points doubles du réseau s'obtient en éliminant ξ, η, ζ entre les équations (4); cette équation est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ \frac{dA}{dz} & \frac{dB}{dz} & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, puisque l'on a identiquement $C = -Ax - By$,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} \frac{dB}{dx} - A \\ \frac{dA}{dy} \frac{dB}{dy} - B &= A^2 \frac{dB}{dy} - AB \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) - B^2 \frac{dA}{dx} = 0. \\ A & B & 0 \end{aligned}$$

D'autre part, soit

$$5 \quad A x - \xi - B y - \pi = 0$$

l'équation de la courbe du réseau ayant pour point principal le point ξ, π ; l'équation de la tangente au point x, y de cette courbe est

$$\begin{aligned} X - x \left[A - \frac{dA}{dx} x - \xi - \frac{dB}{dx} y - \pi \right] \\ - Y - y \left[B - \frac{dA}{dy} x - \xi - \frac{dB}{dy} y - \pi \right] = 0; \end{aligned}$$

en exprimant que cette tangente passe par le point ξ, π , on aura la relation

$$\begin{aligned} \xi - x A - \pi - y B - \frac{dA}{dx} x - \xi \\ - \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) x - \xi - y - \pi - \frac{dB}{dy} y - \pi = 0. \end{aligned}$$

Eliminant $\xi - x$ et $\pi - y$ entre cette relation et la relation 5, il vient:

$$A^2 \frac{dB}{dy} - AB \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) - B^2 \frac{dA}{dx} = 0,$$

ce qui est bien l'équation que nous avions trouvée pour le lieu des points doubles du réseau.

La proposition que j'avais énoncée est donc vérifiée, et l'on voit en outre que la courbe H est du degré $3(n-1)$.

9. Soient deux courbes de degré n , supposons que $n-1$ de leurs n^2 points d'intersection soient situés sur une même ligne droite, je dis que leurs $n^2 - n - 1$ autres points d'intersection sont les points d'un réseau singulier de n lignes du même degré n . Je viens d'examiner

En effet, la propriété dont je parle étant projective, on peut supposer que la droite qui renferme $(n-1)$ des points d'intersection est la droite de l'infini et, en choisissant convenablement les axes, on voit que les équations des deux courbes peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$Py + Q = 0 \quad \text{et} \quad Px - Q' = 0$$

Q et Q' désignant des polynômes du $(n-1)$ degré en x et y , et P un polynôme homogène et du même degré par rapport à ces variables. De là résulte immédiatement que l'équation

$$\xi(Q + Py) + \eta(Q' - Px) - \zeta(Qx + Q'y) = 0$$

est celle d'un réseau singulier ayant pour pivots les $(n^2 - n + 1)$ points d'intersection des deux courbes données qui ne sont pas situés à l'infini.

10. De là résulte encore que les courbes du troisième degré : passant par sept points fixes forment un réseau singulier du troisième ordre.

La courbe K est alors de la quatrième classe et du sixième degré : c'est donc la courbe la plus générale de la quatrième classe. Je ne m'étendrai pas à ce sujet ; c'est, en effet, des propriétés de ce réseau particulier que M. Aronhold a déduit la solution du problème suivant : *Construire la courbe de quatrième classe ayant sept points doubles donnés* (ou, pour parler plus exactement, du problème corrélatif, *construire la courbe du quatrième degré ayant pour tangentes doubles sept droites données*). Je renverrai à cet égard au Mémoire de l'illustre géomètre ⁽¹⁾.

11. On sait que, généralement, les courbes du quatrième ordre, qui passent par treize points fixes, ont également en commun trois autres points parfaitement déterminés et forment un faisceau ⁽²⁾.

On voit, néanmoins, par ce qui précède, que si deux courbes du

⁽¹⁾ ARONHOLD, *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades*. (Monatsbericht der K. P. A. zu Berlin, 1861, p. 499).

⁽²⁾ SALMON, *Higher plane curves*, 2^e édition, p. 16.

quatrième ordre, passant par treize points donnés, se coupent en trois autres points situés en ligne droite, les courbes qui passent par ces treize points forment un faisceau; en d'autres termes, on peut toujours faire passer une de ces courbes par ces points et deux points pris arbitrairement dans le plan.

On peut, en outre, énoncer la proposition suivante :

Si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points d'intersection se rencontrent en trois autres points qui sont également en ligne droite.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 30 JANVIER 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Gardon : *Sur l'ombre propre du tore.*

M. Picquet : *Sur le déterminant dont les éléments sont les mineurs d'ordre donné d'un déterminant donné.*

M. Édouard Lucas : *Sur une transformation des formules de Gauss et de Cauchy.*

M. Halphen : *Sur les formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres.*

M. Darboux : *Sur les lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic, et sur les lignes de courbure de la surface des ondes.*

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur la nécessité d'abandonner l'ancienne théorie de la sphère.*

SÉANCE DU 13 FÉVRIER 1878.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Lemonnier : *Sur des fonctions analogues à celles de Sturm.*

M. Laisant : *Sur la Géométrie des quinconces.*

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur les solutions singulières dans la Mécanique des systèmes naturels.*

SÉANCE DU 27 FÉVRIER 1878,

PRÉSIDENCE DE M. LE PRINCE C. DE POLIGNAC.

Communications :

M. de Polignac : *Sur la représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée du premier degré.*

M. Perrin : *Sur la connexion des surfaces.*

M. Halphen : *Sur la Géométrie des quinconces appliquée aux suites de Farey.*

SÉANCE DU 13 MARS 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Picquet : *Sur l'application de l'analyse combinatoire à la théorie des déterminants.*

M. André (Désiré) adresse une Note *Sur les séries récurrentes.*

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur le nombre des éléments de la surface du Soleil.*

M. Fourret : *Sur les points fondamentaux des surfaces définies par une équation aux dérivées partielles du premier ordre, algébrique.*

. SÉANCE DU 27 MARS 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Rodet : *Sur un Traité de calcul égyptien.*

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur l'utilité de la création d'une bibliothèque scientifique.*

Édouard Lucas : *Théorèmes d'Arithmétique.*

M. Haton de la Goupillière : *Théorème nouveau de Cinématique générale.*

SÉANCE DU 10 AVRIL 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

M. André (Désiré) adresse une Note *Sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes du module.*

M. Lindemann adresse un deuxième Mémoire *Sur une représentation géométrique des formes binaires.*

M. Léauté adresse une Note *Sur un théorème relatif au déplacement d'une figure de grandeur invariable.*

M. Laporte adresse 15 exemplaires d'une Note autographiée *Sur les fonctions connues.*

Communications :

M. C. Jordan : *Sur les covariants des formes binaires.*

M. Laguerre : *Sur les normales aux surfaces du second ordre.*

M. C. de Polignac : *Sur quelques formules relatives à la théorie du plus grand commun diviseur.*

M. Halphen : *Sur les formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres.*

Sur un Manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien; par M. L. RODET.

(Séance du 27 mars 1878.)

M. Eisenlohr, professeur de langue et d'archéologie égyptiennes à l'Université de Heidelberg, vient de publier en *fac-simile, traduction et commentaire*, un très-ancien papyrus égyptien, qui n'est autre chose qu'un *Manuel* à l'usage d'un calculateur. Ce qui rend cet ouvrage très-précieux pour l'histoire des Mathématiques, c'est que les calculs qui y sont faits sont exécutés tout au long, ce qui permet de se rendre compte de la façon dont les Égyptiens s'y prenaient pour effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique, ou plutôt, comme disaient les Grecs, de la *Logistique*. Il est regrettable qu'on ne puisse pas, du moins pour le moment, lui assigner une date précise. Tout ce qu'on peut dire à ce sujet, c'est qu'il est certainement antérieur à la conquête grecque (332 ans avant notre ère), probablement même à celle de Cambyse (537). D'après ses caractères paléographiques, M. Eisenlohr pense qu'on pourrait le faire remonter jusqu'au xv^e et même au xvi^e siècle; mais cette conclusion n'est pas absolument certaine.

L'auteur sait effectuer sur les nombres entiers l'*addition*, si compliquée qu'elle soit; la *soustraction*, au moins lorsque le nombre à soustraire a tous ses chiffres, comme nous dirions aujourd'hui, plus petits que les chiffres de même ordre du nombre dont on soustrait; en fait de *multiplication*, il ne sait que *doubler* un nombre; pour effectuer un produit par 13, il prend, par exemple :

Le nombre simple.....	1 <i>a</i>
Son double.....	2 <i>a</i>
Son quadruple.....	4 <i>a</i>
Son octuple.....	8 <i>a</i>

et, ajoutant le simple, le quadruple et l'octuple, il obtient le produit 13 *a*. Il ignore absolument ce que peut être la *division*, quoi qu'on en puisse croire en se fiant à la traduction de M. Eisenlohr. L'expression que le savant égyptologue a traduite par : *divise a par b'* doit être rendue d'une tout autre façon, que j'expliquerai

tout à l'heure en partant des fractions. Pour obtenir le quotient de a par b , il multiplie b jusqu'à ce qu'il obtienne a , ou, plus mot à mot, il *fait croître b pour trouver a* .

Comme tous les anciens, notre calculateur fait un très-grand usage des fractions; seulement, pour lui, il ne peut exister d'autres fractions que celles qui ont pour numérateur l'unité, et quand un calcul le conduit à une autre expression fractionnaire, il la réduit en une somme de ce que les anciens appelaient des *fractions simples*. On sait, en effet, que cette manière de voir s'était perpétuée dans l'école grecque et chez les Arabes, chez ces derniers même avec une restriction tenant aux habitudes de la langue, et sur laquelle je vais revenir.

On rencontre dans le papyrus dont nous parlons des signes spéciaux pour les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$; toutes les autres se représentent par le dénominateur surmonté d'un point. La première de toutes les fractions est pour notre auteur $\frac{2}{3}$. On sait que Héron le Jeune admettait aussi cette fraction comme une fraction simple, et la représentait par un signe que M. Hultsch, dans son édition du géomètre alexandrin, représente par ω'' .

En ce qui concerne la manière dont les Égyptiens pratiquaient le calcul des fractions, un exemple en dira plus, et plus vite, que toute considération que je pourrais présenter. Je choisis pour cela le problème n° 36 de M. Eisenlohr, en avertissant le lecteur que :

1° J'emprunte l'explication des différentes opérations aux autres problèmes analogues, l'auteur ou le copiste les ayant omises dans celui-ci;

2° Pour tout ce qui est traduisible, énoncé ou explication des opérations, je refais la traduction, non d'après la version allemande, mais d'après le texte égyptien lui-même.

3° Je marque, comme dans l'original, d'un trait oblique les résultats partiels qui doivent être additionnés pour obtenir le total, les autres nombres n'étant que des intermédiaires dont notre Égyptien ne savait se passer.

N° 36. *Je verse trois fois (mon vase) dans un boisseau; j'ajoute $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de mon vase; je remplis. Quelle est la quantité en question?*

Si l'on te dit cela, fais comme ceci :

$$\begin{array}{l}
 \cdot \quad 1 \quad (30) \\
 \cdot \quad 2 \quad (60) \\
 \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad (10) \\
 \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad (6) \\
 \text{Total. } 3\frac{1}{3} \frac{1}{5} \quad \frac{106}{30}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Exprime 30 entre 106,} \\
 \text{c'est-à-dire cherche} \\
 \text{quelle fraction de 106} \\
 \text{vaut 30.}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \cdot \quad 106 \\
 \frac{1}{2} \quad 53 \\
 \frac{1}{4} \quad 26\frac{1}{2} \\
 \frac{1}{106} \quad 1 \\
 \frac{1}{53} \quad 2 \\
 \frac{1}{212} \quad \frac{1}{2} \\
 \text{Total. } 1 = \frac{30}{30}
 \end{array}$$

La quantité est donc $\frac{1}{4} \frac{1}{53} \frac{1}{106} \frac{1}{212}$.

Preuve :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \frac{1}{4} & \frac{1}{53} & \frac{1}{106} & \frac{1}{212} & & \\
 \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{50} & \frac{1}{318} & \frac{1}{795} & \frac{1}{53} & \frac{1}{106} \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{159} & \frac{1}{318} & \frac{1}{636} & & \\
 \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{265} & \frac{1}{530} & \frac{1}{1060} & &
 \end{array}$$

Ici l'auteur réduit les petites fractions, mais les petites seulement, au dénominateur commun 1060, afin d'en faire plus facilement la somme

$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{212}$			
20	10	5			35
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{795}$	$\frac{1}{53}$	$\frac{1}{106}$	
$35\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	20	10	70
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{318}$	$\frac{1}{126}$		
$88\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$		100
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{265}$	$\frac{1}{530}$	$\frac{1}{1060}$		
56	4	2	1		60
Total.....					<u>265 = $\frac{1}{4}$</u>

et, reprenant les grosses fractions, qu'il a laissées de côté, avec ces $\frac{265}{1060} = \frac{1}{4}$ qu'il vient de trouver,

	$\frac{1}{2}$	530
	$\frac{1}{4}$	265
	$\frac{1}{4}$	265
Total.....		<u>1060</u>

On voit, par cet exemple, que :

1° Notre calculateur savait qu'en multipliant le dénominateur d'une fraction par un nombre on divise la fraction par ce nombre;

2° En multipliant les deux termes par un même nombre, on n'en change pas la valeur;

3° On les peut réduire, pour en faire la somme, à un dénominateur commun. Seulement, pour lui, il n'était pas nécessaire que ce dénominateur commun rendit tous les numérateurs entiers;

4° Quant aux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, voire même $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, il les ajoute fort bien sans les réduire au préalable à un dénominateur commun;

5° Il ne fait usage que de fractions ayant pour numérateur l'unité; aussi, dans la dernière ligne de sa *preuve*, remplace-t-il $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

On peut encore déduire d'autres exemples les règles suivantes :

6° Pour prendre une certaine fraction d'un nombre (entier ou fractionnaire), il procède autant que possible par *dimidiation*, comme il procède par *duplication* pour prendre les multiples.

7° Quand 3 doit entrer au dénominateur de la fraction du nombre qu'il veut avoir, il commence par prendre les $\frac{2}{3}$ avant de prendre le $\frac{1}{3}$. Pour faciliter cette opération, lorsque le nombre donné est fractionnaire, une table spéciale (n° 61) indique la façon dont on peut prendre les $\frac{2}{3}$ d'une fraction.

Je terminerai cette Notice par une Table des matières traitées dans le papyrus en question, en faisant, à mesure que l'occasion s'en présentera, les observations qui me paraîtront utiles.

CHAPITRE I^{er}. — Réduction des fractions ayant 2 pour numérateur, et pour dénominateur un nombre impair, en une somme de fractions à numérateur 1.

Cette opération est énoncée en ces termes (d'après l'égyptien, et non d'après l'allemand) : « Exprime 2 entre 13 » par exemple, ce qui rappelle l'expression analogue des Arabes et des Juifs : 2 parties de 13 parties dans l'unité, chose que les Arabes appellent une expression inarticulable, et l'auteur juif Aben-Ezra une fraction que l'homme ne saurait prononcer. Voilà pourquoi l'auteur égyptien la rend prononçable en la convertissant en une somme de fractions très-simples. Héron le Jeune fait souvent des conversions de ce genre; il dit par exemple :

$$\alpha \text{ εως } \omega \text{ μέρος } \sigma'' \text{ γίνεται } \overline{\theta\theta} \delta'' \eta'' \sigma''.$$

15876, dont la $\frac{1}{200}$ partie est $79\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{100}$. L'auteur arabe Al-Khàrizmi nous en offre aussi des exemples fréquents.

Pour arriver à cette décomposition, notre auteur nous dira, par exemple : *Exprime 2 entre 17.*

Calcul :

$$\begin{array}{r}
 \cdot \quad 17 \\
 \frac{2}{3} \quad 11\frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3} \quad 5\frac{2}{3} \\
 \frac{1}{6} \quad 2\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \\
 / \quad \frac{1}{12} \quad 1\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \text{manquent } \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \\
 \cdot \quad 17 \quad \frac{1}{12} \quad 1 \\
 \cdot \quad 34 \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{2} \\
 / \quad \dots \quad 51 \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{3} \\
 / \quad \dots \quad 68 \quad \frac{1}{68} \quad \frac{1}{4}
 \end{array}$$

Le résultat de la conversion est donc

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{12} \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{63}, \\
 \text{valant} \\
 1\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}.
 \end{array}$$

CHAPITRE II, n^{os} 1 à 6. — *Partage de 1, 3, 6, 7, 8 et 9 rations entre 10 personnes.*

CHAPITRE III, n^{os} 7-23. — *Compléter une expression fractionnaire à 1, à $\frac{1}{2}$, à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{8}$, à $\frac{1}{16}$.*

CHAPITRE IV, n^{os} 24-38. — *Calcul d'une quantité qui, augmentée de fractions d'elle-même, donne un nombre donné*

$$x + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} + \dots = A.$$

Les quatre derniers problèmes (35-38) sont de la forme

$$hx + \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \dots = 1.$$

(Voir l'exemple cité plus haut.)

CHAPITRE V. — *Partage inégal.*

N° 39. *Partager 100 rations entre 10 personnes, 50 rations entre 6, 50 entre 4; quelle est la différence moyenne?*

N° 40. *100 rations entre 5 personnes; $\frac{1}{7}$ des 3 premières parts vaut les 2 dernières; quelle est la différence?*

D'après la solution donnée, les parts sont en progression arithmétique. L'auteur n'explique pas comment il trouve que, de la condition posée par l'énoncé, il déduit que la raison (la *différence* comme il dit) doit être $5\frac{1}{7}$. M. Eisenlohr fait très-bien voir que, si les parts sont

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r,$$

les trois plus élevées font $3a + 9r$, les deux dernières $2a + r$, et la condition énoncée

$$3a + 9r = 7(2a + r)$$

donne bien

$$r = 5\frac{1}{7}a \quad \text{ou si} \quad a = 1, \quad r = 5\frac{1}{7}.$$

CHAPITRE VI, n° 41-48. — *Calculs de volumes.*

Dans cette partie de son *Manuel*, notre Égyptien évalue la contenance en grains de certains volumes, que M. Eisenlohr n'a pas pu déterminer. Il calcule d'abord *une fois et demie* le produit de la surface de la base par la hauteur, et obtient ainsi ce qu'il appelle la *valeur du corps*, c'est-à-dire la *valeur estimée en unités de volume*. Il en prend $\frac{1}{16}$, qui lui donne la contenance en mesures de capacité pour les grains.

M. Eisenlohr a cherché vainement à se rendre compte de la signification géométrique de ces calculs; pourquoi les $\frac{3}{2}$ du produit de la base par la hauteur? Pourquoi $\frac{1}{16}$ de ce produit pour la contenance en mesures de capacité? Il a cru trouver la réponse à la première question en supposant qu'il s'agit d'un volume pyramidal ou conique tronqué, et que les dimensions horizontales données par l'auteur égyptien se rapportent à la base supérieure, à la petite base; mais le rapport qu'il trouve alors entre cette base supérieure, la *κορυφή* de Héron et la vraie base (*βάσις*) ne répond à aucune des formes de magasins à blé ou de meules dont les monuments égypt-

tiens nous ont conservé la représentation figurée. Quant à la seconde question, il lui semble que la conversion pratiquée par le calculateur indique que le volume évalué serait du blé en gerbes, et que $\frac{1}{7}$ de ce volume se rapporte au rendement en grains après battage. Mais toutes ces hypothèses sont peu satisfaisantes, et il faut encore attendre que de nouveaux documents viennent jeter plus de jour sur la question.

Quant à la base de ces solides, elle est ou carrée ou circulaire. Pour la base carrée, on fait le produit du côté par lui-même; pour la base circulaire, notre calculateur prend $\frac{2}{7}$ du diamètre, qu'il élève au carré. Cette fraction $\frac{2}{7}$ est la quatrième réduite de la valeur de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ évaluée en fraction continue, ou, si l'on aime mieux, elle substitue 0,888888... à la vraie valeur 0,88622682....

CHAPITRE VII, nos 49-55. — Évaluation de surfaces.

Nous avons, dans les problèmes de ce Chapitre, l'évaluation des surfaces suivantes :

N° 49. *Rectangle de 10 perches sur 2.*

L'auteur fait le produit des deux dimensions, mais d'une façon particulière, dans le but d'exprimer la surface en unité superficielle usuelle. Comme cette conversion touche à la métrologie, dont je n'ai pas l'intention de parler ici, je la laisse de côté.

N° 50. *Cercle de 9 perches de diamètre, calculé comme plus haut.*

N° 51. *Triangle isocèle, de 10 perches sur chaque rive et 4 perches à l'embouchure (le triangle est dessiné sur le côté).*

N° 52. *Trapeze ayant 20 perches sur chaque rive, 6 perches à l'embouchure, 4 perches à la troncature.*

Pour évaluer ces deux surfaces, notre Égyptien fait le produit de la moitié de la base dans le premier cas, de la demi-somme des bases dans le second par un des côtés, ou si l'on veut par la demi-somme des côtés. Je donne à l'expression de la surface cette forme, parce que nous y retrouvons la formule employée par l'auteur indien Brahmagupta, lequel prenait comme règle générale, pour

trouver la surface *grossière* d'un trilatère ou d'un quadrilatère, de faire le produit des demi-sommes des côtés opposés; mais l'Égyptien n'ajoute pas, comme l'Indien, que l'aire *exacte* s'obtiendra *en écrivant quatre fois la demi-somme des côtés, retranchant à chacun de ces nombres un des côtés successivement, faisant le produit des quatre restes, et extrayant la racine carrée du produit*.

N° 53. Il est impossible, pour le moment, de rien comprendre au problème de ce numéro. La figure qui l'accompagne représente un triangle partagé par deux parallèles à la base, portant, la première, comme la base, le chiffre 6, la seconde le chiffre $2\frac{1}{4}$. Les segments sont marqués 5, $3\frac{1}{4}$ et, en chiffres spéciaux à l'évaluation des surfaces, $7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4}$. Enfin, auprès du sommet, est inscrit le chiffre 7.

N° 54 et 55. *Partager respectivement 7 et 3 unités agraires en 10 et 5 parts.*

CHAPITRE VIII, n° 56-60. — Calcul des pentes des pyramides.

EXEMPLE, n° 56. — *Préceptes pour énoncer une pyramide de 360 au « travers de la plante » du pied, 250 à la « saillie en tranchant » (c'est-à-dire 360 de diagonale de base, 250 d'arête; le mot qui désigne l'arête, et qui signifie littéralement saillie en tranchant, est écrit pir-em-us : c'est vraisemblablement de là qu'est emprunté le grec πύραμυς). Donne-moi son rapport. Fais la moitié de 360, ce qui donne 180. Fais croître le nombre 250 pour trouver 180 (c'est-à-dire divise 180 par 260, la demi-diagonale par l'arête, ce qui donne par conséquent le sinus de l'angle d'inclinaison). Cela fait $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{50}$ de coudée. Or la coudée est de 7 palmes. Fais croître le nombre 7 :*

$$\begin{array}{r} \cdot \quad 7 \\ \frac{1}{2} \quad 3\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \quad 1\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \\ \frac{1}{50} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{25} \end{array}$$

Son rapport (sinus) en palmes est $5\frac{1}{25}$.

Le n° 57 est le problème inverse : *Une pyramide a 140 en diagonale, $5\frac{1}{4}$ palmes de rapport; on demande son arête.*

N° 58 et 59. Sont des problèmes du même genre.

N° 60. Est ainsi conçu :

Un monument dit àn de 15 coudées à la base (côté de la base), 30 dans sa hauteur vers le ciel : donne-moi son rapport. Fais croître 15, sa moitié $7\frac{1}{2}$; fais croître le nombre $7\frac{1}{2}$ quatre fois pour trouver 30 : son rapport est 4.

Donc ici l'auteur calcule le quotient de la hauteur par la moitié du côté de la base : il obtient donc la *tangente* de l'angle dièdre, inclinaison de la face sur la base.

Le n° 61 intercale une Table pour faire des produits de fractions simples, avec ces deux lignes d'explication :

Faire les $\frac{2}{3}$ d'une fraction. Si l'on te dit : quels sont les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$? fais-le (le dénominateur s'entend) 2 fois, 6 fois : ce sont ses $\frac{2}{3}$.

Tu feras de même pour avoir une fraction de fraction.

CHAPITRE IX. — Problèmes divers.

Les problèmes 62 à 65 se rapportent à des partages proportionnellement à certains nombres donnés, ou les parts ayant entre elles un certain rapport.

Le n° 66 évalue le revenu d'un jour, étant donné celui d'une année : l'année y est comptée de 365 jours.

Les n° 67, 68 sont des évaluations de salaires.

Enfin, de 69 à 78, divers problèmes relatifs au rendement en pains ou en brocs de bière d'un certain volume de farine ou de grains. Je n'entrerais dans aucun détail sur ce sujet, qui m'entraînerait trop loin.

Le n° 79 est un calcul de la somme des termes d'une progression géométrique. Dans une première colonne, l'auteur a rangé les cinq premières puissances de 7, et il en fait la somme, ce qui lui donne naturellement 19607. Dans une seconde colonne, dont le titre n'a pu être déchiffré, il multiplie par 7 le nombre 2801, qui est la somme des cinq premiers termes de la progression de raison 7 commençant à 1, et trouve pour résultat 19607. Chacune des puissances porte un nom que M. Eisenlohr n'a certainement pas su lire, car la traduction qu'il en donne n'a aucun sens; ces noms seraient, sui-

vant lui, dans l'ordre des puissances croissantes :

L'écrit;
Le chat;
La souris;
L'orge;
Le boisseau.

Il faut attendre assurément une interprétation plus rationnelle de ces mots, interprétation qui nous permettra peut-être d'y retrouver l'origine des dénominations de *nombre*, ἀριθμός, *puissance*, δυνάμεις, *cube* ou *solide*, κύβος, employés par les Grecs, de *chose*, شَيْء, *fortune* ou *quantité*, مَال, et *cube* ou *solide*, كعب, en usage chez les Arabes.

Suit une Table de concordance des mesures de capacité pour les grains, et de celles servant pour les liquides. L'unité de cette dernière est appelée *hinnu*, comme chez les Hébreux, tandis que l'unité pour les grains, de 10 *hinnus*, porte deux noms que M. Eisenlohr croit pouvoir lire *besha* et *auit*, rappelant assez les noms hébreux de *bath* (liquides) et *epha* (grains), lesquels contenaient également 10 *hin*. Cette Table est intéressante pour la métrologie. Pour l'Arithmétique, elle permet de déterminer la valeur des signes qui représentent les multiples et les fractions de l'étalon pour les grains.

Enfin trois problèmes assez longs dans lesquels, suivant M. Eisenlohr, l'auteur enseignerait la manière de calculer la nourriture des oies et des bœufs.

Tel est, en résumé, le contenu de ce curieux Ouvrage, intéressant encore une fois par les détails qu'il nous fournit sur la manière dont se pratiquaient les calculs arithmétiques à une époque bien antérieure à aucun des documents de ce genre qui nous soient parvenus de la Grèce. Les historiens des Mathématiques pourront y puiser des renseignements intéressants; mais ils devront, s'ils recourent seulement à la traduction résumée par laquelle M. Eisenlohr termine son commentaire, sans consulter ce commentaire lui-même, se rappeler que, en plus d'un point, la traduction *du texte* est loin d'être encore certaine. Seule l'interprétation des calculs est faite avec une exactitude scrupuleuse, et, n'y eût-il que cela, le traducteur allemand aurait déjà mérité de la Science; d'autant mieux, et il faut lui rendre ici hautement cette justice, qu'il

a su, avec un vrai talent divinatoire, débrouiller l'enchaînement des calculs, entassés sans ordre dans le papyrus original, et souvent transposés fort loin de la place où ils devraient raisonnablement se trouver.

Sur des fonctions analogues à celles de Sturm;

par M. LEMONNIER.

(Séance du 13 février 1878.)

Soient $F(x)$, $f(x)$ deux fonctions entières de x ; a et b deux indéterminées ou deux nombres pris à volonté, qui toutefois n'annulent pas $f(x)$.

Si l'on pose

$$F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x - a)(x - b)f_1(x),$$

la fonction $f_1(x)$ est entière, quand λ et μ se déterminent par les deux conditions

$$F(a) = f(a)(\lambda a + \mu),$$

$$F(b) = f(b)(\lambda b + \mu).$$

Par l'élimination de λ et de μ , en faisant

$$(x - a)(x - b)f_1(x) = u,$$

il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} u + F(x) & xf(x) & f(x) \\ F(a) & af(a) & f(a) \\ F(b) & bf(b) & f(b) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$u(a - b)f(a)f(b) + \begin{vmatrix} F(x) & xf(x) & f(x) \\ F(a) & af(a) & f(a) \\ F(b) & bf(b) & f(b) \end{vmatrix} = 0,$$

$$u(a - b)f(a)f(b) + (a - b)f(a)f(b)F(x) - (x - b)F(a)f(b)f(x) + (x - a)F(b)f(a)f(x) = 0,$$

$$(1) \quad \begin{cases} u = (x - a)(x - b)f_1(x) \\ = -F(x) + f(x) \left[\frac{F(a)}{f(a)} \frac{x - b}{a - b} + \frac{F(b)}{f(b)} \frac{x - a}{b - a} \right], \end{cases}$$

a et b supposés différents.

Si les coefficients sont réels dans $F(x)$ et $f'(x)$, qu'on prenne

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i,$$

en faisant

$$F(\alpha + \beta i) = P + Qi, \quad f(\alpha + \beta i) = p + qi,$$

on obtient

$$\frac{F(a)}{f'(a)} \frac{x-b}{a-b} + \frac{F(b)}{f'(b)} \frac{x-a}{b-a} = \frac{\beta(Pp + Qq) - (x-\alpha)(Pq - Qp)}{\beta(p^2 + q^2)},$$

et par suite

$$(2) \quad \begin{cases} (p^2 + q^2)[(x-\alpha)^2 + \beta^2]f_1(x) \\ = -(p^2 + q^2)F(x) + f(x)[Pp + Qq - (x-\alpha)\frac{Pq - Qp}{\beta}] \end{cases}.$$

C'est, en particulier, pour $\alpha + \beta i = i$,

$$(2)' \quad \begin{cases} (x^2 + 1)(p^2 + q^2)f_1(x) \\ = -(p^2 + q^2)F(x) + f(x)[Pp + Qq - x(Pq - Qp)], \end{cases}$$

avec

$$P = F_1(-1), \quad Q = F_2(-1), \quad p = f_1(-1), \quad q = f_2(-1),$$

si l'on a

$$F(x) = F_1(x^2) + xF_2(x^2), \quad f(x) = f_1(x^2) + xf_2(x^2).$$

En prenant $a = b$, et posant ainsi

$$F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)^2 f_1(x),$$

la fonction $f_1(x)$ sera également entière, quand λ et μ seront donnés par

$$F(a) = f(a)(\lambda a + \mu),$$

$$F'(a) = \lambda[f(a) + af'(a)] + \mu f'(a);$$

d'où résulte, en faisant $u = (x-a)^2 f_1(x)$,

$$\begin{vmatrix} u + F(x) & xf(x) & f(x) \\ F(a) & af(a) & f(a) \\ F'(a) & f(a) + af'(a) & f'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

par suite

$$\begin{vmatrix} u + F(x) & (x-a)f(x) & f(x) \\ F(a) & 0 & f(a) \\ F'(a) & f(a) & f'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} u \overline{f(a)}^2 = -F(x) \overline{f(a)}^2 \\ \quad + f(x) \{ F(a) f(a) - (x-a) [F(a) f'(a) - F'(a) f(a)] \} \\ \quad = (x-a)^2 \overline{f(a)}^2 f_1(x) = \dots \end{cases}$$

De là

$$(3)' \quad \begin{cases} x^2 \overline{f(o)}^2 f_1(x) = -F(x) \overline{f(o)}^2 \\ \quad + f(x) \{ F(o) f(o) - x [F(o) f'(o) - F'(o) f(o)] \}, \end{cases}$$

pourvu que $f(o)$ soit différent de zéro.

D'après les formules (2) et (3), si l'on pose

$$(p^2 + q^2) F(x) = f(x) (\lambda x + \mu) - [(x-\alpha)^2 - \beta^2] f_1(x)$$

et

$$\overline{f(a)}^2 F(x) = f(x) (\lambda x + \mu) - (x-a)^2 f_1(x),$$

on a

$$(3)'' \quad \begin{cases} [(x-\alpha)^2 + \beta^2] f_1(x) = -(p^2 + q^2) F(x) + f(x) \left[Pp + Qq - (x-\alpha) \frac{Pq - Qp}{\beta} \right], \\ (x-a)^2 f_1(x) = -[f(a)]^2 F(x) \\ \quad + f(x) \{ F(a) f(a) - (x-a) [F(a) f'(a) - F'(a) f(a)] \}. \end{cases}$$

Il est à remarquer que la formule (3), quand on fait tendre le module de a vers l'infini, donne un résultat qui revient au reste, changé de signe, que donne la division de $F(x)$ par $f(x)$, au cas de

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax^m + A_1 x^{m-1} + \dots, \\ f(x) &= Bx^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \dots \end{aligned}$$

En effet, on a pour lors

$$\begin{aligned} (x-a)^2 f_1(x) &= -F(x) + f(x) \left[-x \frac{F(a) f'(a) - F'(a) f(a)}{f(a)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(a) f(a) + a F(a) f'(a) - a F'(a) f(a)}{f(a)^2} \right] \\ &= -F(x) + f(x) \left[-x \frac{ABa^{2m-2} + \dots}{B^2 a^{2m-2} + \dots} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 B - AB_1) a^{2m-2} + \dots}{B^2 a^{2m-2} + \dots} \right]. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, le second membre, quand le module de a tend vers ∞ , a pour limite

$$-F(x) + f(x) \left(\frac{A}{B}x + \frac{A_1 B - AB_1}{B^2} \right),$$

ce qui est le reste, changé de signe, de la division de $F(x)$ par $f(x)$.

En désignant ce résultat par V_1 , on a ainsi

$$f_1(x) = \frac{V_1 a^{2m-2} + \dots}{(a^{2m-2} + \dots)(x-a)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{V_1 a^{2m-2} + \dots}{(a^{2m-2} + \dots) \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)},$$

par où l'on voit que $a^2 f_1(x)$ a pour limite V_1 . Le procédé de la division répond en conséquence à l'hypothèse de $a = \pm \infty$.

À la place des formules qui précèdent, on peut en établir d'autres qui dépendent d'un plus grand nombre d'indéterminées, en faisant varier le nombre des indéterminées distinctes et leur degré de multiplicité.

Par exemple, en prenant

$$u = (x-a)(x-b)(x-c)f_1(x),$$

on aura

$$u \begin{vmatrix} a^3 f(a) & a f(a) & f(a) \\ b^3 f(b) & b f(b) & f(b) \\ c^3 f(c) & c f(c) & f(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F(x) & x^3 f(x) & x f(x) & f(x) \\ F(a) & a^3 f(a) & a f(a) & f(a) \\ F(b) & b^3 f(b) & b f(b) & f(b) \\ F(c) & c^3 f(c) & c f(c) & f(c) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$u(a-b)(a-c)(b-c)f(a)f(b)f(c) = \begin{vmatrix} F(x) & (x-a)^2 f(x) & (x-a)f(x) & f(x) \\ F(a) & 0 & 0 & f(a) \\ F(b) & (b-a)^2 f(b) & (b-a)f(b) & f(b) \\ F(c) & (c-a)^2 f(c) & (c-a)f(c) & f(c) \end{vmatrix}.$$

Pour $u = (x-a)^3 f_1(x)$, on aurait

$$\begin{vmatrix} u + F(a) & x^3 f(x) & x f(x) & f(x) \\ F(a) & a^3 f(a) & a f(a) & f(a) \\ F'(a) & 2a f(a) + a^2 f'(a) & f(a) + a f'(a) & f'(a) \\ F''(a) & 2f(a) + 4a f'(a) + a^2 f''(a) & 2f'(a) + a f''(a) & f''(a) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$2u\overline{f(a)}^3 = \begin{vmatrix} F(x) & (x-a)^2 f(x) & (x-a)f(x) & f(x) \\ F(a) & 0 & 0 & f(a) \\ F'(a) & 0 & f(a) & f'(a) \\ F''(a) & 2f(a) & 2f'(a) & f''(a) \end{vmatrix},$$

$$2(x-a)^2 f_1(x) \overline{f(a)}^3 = -2\overline{f(a)}^2 [F(x)f(a) - f(x)F(a)]$$

$$- (x-a)^2 f(x)f(a) [F(a)f''(a) - f(a)F''(a)]$$

$$+ 2(x-a)f(x) [F(a)f'(a) - F'(a)f(a)]$$

$$\times [(x-a)f'(a) - f(a)].$$

Les formules que nous avons ainsi établies peuvent servir à la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers en x , lorsque les coefficients y sont numériques, et, en s'appliquant à deux polynômes dont l'un soit la dérivée de l'autre, peuvent conduire à des séries de polynômes susceptibles de remplacer la série des fonctions de Sturm.

Reprenons, en effet, l'égalité

$$F(x) = (\lambda x + \mu)f(x) - (x-a)(x-b)f_1(x)$$

ou

$$F(x) = (\lambda x + \mu)f(x) - (x-a)^2 f_1(x).$$

Si ni a , ni b , n'annule $f(x)$, les diviseurs communs de $F(x)$ et $f(x)$ sont les mêmes que ceux de $f(x)$ et $f_1(x)$.

Lorsque $F(x)$ est du degré m , et $f(x)$ d'un degré inférieur, le degré de $f_1(x)$ est $m-2$ au plus. Quand $f(x)$ est comme $F(x)$ du degré m , le degré de $f_1(x)$ est $m-1$, et si, $f(x)$ étant du degré m , $F(x)$ est d'un degré moindre, c'est encore du degré $m-1$ que se trouve $f_1(x)$.

D'après cela, en remplaçant $F(x)$ par $f_1(x)$, puis en continuant de la même manière jusqu'à un résultat constant ou nul, soit qu'on emploie à chaque calcul d'une nouvelle fonction les mêmes nombres a et b , soit qu'on les change, on arrivera à connaître le plus grand commun diviseur.

Si au point de départ $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, ces polynômes $F(x)$, $f(x)$ et les suivants $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... constitueront une suite de polynômes jouissant des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm à l'égard de valeurs de x situées d'un même côté des nom-

bres a et b , à l'égard de valeurs réelles de x quelconques. si a et b sont des nombres imaginaires conjugués ou des nombres réels égaux, aucun d'eux d'ailleurs ne devant annuler $f(x)$.

Comme exemple, sous ce rapport, prenons

$$\begin{aligned} F(x) &= x^4 - x^3 - x^2 - x^2 - x^2 - x - 1, \\ f(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 4x^2 + 2x - 1. \end{aligned}$$

En usant de la formule (3)°, on a

$$\begin{aligned} x^2 f_1(x) &= -(x^4 + x^3 - x^2 - x^2 + x^2 - x - 1) \\ &\quad + 6x^3 + 5x^2 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 1 - 1 - x \\ &= -7x^3 - 12x^2 + 18x^2, \end{aligned}$$

d'où

$$f_1(x) = -7x^3 - 12x^2 + 8x.$$

Qu'on pose, en second lieu,

$$\begin{aligned} F(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 1, \\ f(x) &= -7x^3 - 12x^2 + 8x, \end{aligned}$$

et qu'on observe qu'on a

$$\begin{aligned} F(-1) &= -3, & f(-1) &= -3, \\ F'(-1) &= 6, & f'(-1) &= 0, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} (x+1)^2 f_1(x) &= -(6x^3 + 5x^2 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 1, 9 \\ &\quad + (-7x^3 - 12x^2 + 8x)[9 - (x-1)^2], \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 f_1(x) &= -6x^3 - 5x^2 + 4x^2 + 3x^2 - 2x + 1 \\ &\quad + (7x^3 + 12x^2 - 8x)(1 + 2x) \\ &= 8x^3 + 26x^2 + 16x^2 - 10x^2 - 10x + 1. \end{aligned}$$

De là

$$f_2(x) = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1.$$

Soit, en troisième lieu,

$$\begin{aligned} F(x) &= -7x^3 - 12x^2 + 8x, \\ f(x) &= 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} F(-1) &= -3, & f(-1) &= 15, \\ F'(-1) &= 0, & f'(-1) &= 8, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}(x+1)^2 f_1(x) &= (7x^3 + 12x^2 - 8x) \cdot \overline{15}^2 \\ &\quad + (8x^3 + 10x^2 - 12x + 1)[-3 \cdot 15 - (x+1)3 \cdot 8], \\ \frac{1}{3}(x+1)^2 f_1(x) &= (7x^3 + 12x^2 - 8x)75 \\ &\quad - (8x^3 + 10x^2 - 12x + 1)(8x - 23) \\ &= 461x^3 + 636x^2 + 134x^2 - 332x - 23,\end{aligned}$$

d'où

$$f_3(x) = 461x^2 - 286x - 23.$$

Faisant là

$$F(x) = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1,$$

$$f(x) = 461x^2 - 286x - 23,$$

on a

$$F(0) = 1, \quad f(0) = -23,$$

$$F'(0) = -12, \quad f'(0) = -286,$$

$$\begin{aligned}x^3 f_1(x) &= -(8x^3 + 10x^2 - 12x + 1)529 \\ &\quad + (461x^2 - 286x - 23)(-23 + 562x) \\ &= 254850x^3 - 176625x^2,\end{aligned}$$

de sorte que

$$f_4(x) = 254850x - 176625,$$

ou mieux

$$f_4(x) = 3398x - 2355;$$

puis par

$$F(x) = 461x^3 - 286x - 23, \quad F(1) = 152, \quad f(1) = 1043,$$

$$f(x) = 3398x - 2355, \quad F'(1) = 636, \quad f'(1) = 3398,$$

on obtient

$$\begin{aligned}(x-1)^2 f_1(x) &= (-461x^2 + 286x + 23)1087849 \\ &\quad + (3398x - 2355)(11684 + 146852x) \\ &= -2495293x^2 + 4990586x - 2495293,\end{aligned}$$

d'où

$$f_5(x) = -2495293.$$

De gros coefficients, à mesure qu'on avance, paraissent inévitables; les suppressions de facteurs communs sont accidentelles, toujours avantageuses. Il y a à chaque opération un contrôle des calculs qui s'étend à tous les coefficients, pour peu qu'on recoure à

d'autres nombres auxiliaires que zéro, ce qui est chose précieuse. Cependant la méthode de calcul par des déterminants, à laquelle j'ai été conduit par d'autres considérations, me paraît en général préférable; elle se distingue surtout par son heureuse application à la résolution de deux équations entières en x et y .

Note sur la Géométrie des quinconces; par M. LAISANT.

(Séance du 13 février 1878.)

Dans une Communication faite à la *Société mathématique* le 7 novembre 1877 (*Bulletin*, t. VI, p. 9), M. Éd. Lucas a énoncé et démontré le théorème suivant :

Les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.

La démonstration très-ingénieuse de M. Lucas repose sur une remarque géométrique préliminaire et sur un théorème relatif aux sommes de deux carrés. Je crois qu'il est possible de la rendre beaucoup plus élémentaire et de généraliser en même temps le résultat obtenu.

Il est visible, en effet, en prenant un sommet A du triangle pour origine, et traçant deux axes AX, AY parallèles aux côtés des cases, que les coordonnées des deux autres sommets B et C seront exprimées par des nombres entiers, si l'on adopte pour unité de longueur le côté d'une case. Par conséquent, la tangente de l'angle BAX sera de la forme $\frac{l}{m}$, et celle de l'angle CAX sera de la forme $\frac{l_1}{m_1}$, l, m, l_1, m_1 étant entiers.

Or, l'angle A du triangle ABC étant égal, soit à la somme, soit à la différence de BAX, CAX, nous aurons

$$\text{tang A} = \frac{\frac{l}{m} + \frac{l_1}{m_1}}{1 - \frac{ll_1}{mm_1}} = \frac{lm_1 + ml_1}{mm_1 - ll_1} = \frac{p}{q}$$

ou bien

$$\operatorname{tang} A = \frac{\frac{l}{m} - \frac{l_1}{m_1}}{1 + \frac{ll_1}{mm_1}} = \frac{lm_1 - ml_1}{mm_1 + ll_1} = \frac{p'}{q'},$$

c'est-à-dire que la tangente de l'angle A est nécessairement commensurable.

On peut donc énoncer le théorème suivant, plus général que celui de M. Lucas, qui n'en est qu'un corollaire :

Tout triangle, ayant pour sommets les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque, présente trois angles dont les tangentes sont commensurables.

Appelons *figure inscriptible dans l'échiquier* une figure composée de lignes droites passant chacune par deux centres de cases. Il est clair que la propriété s'applique à deux droites quelconques d'une figure inscriptible.

La hauteur AH d'un triangle inscriptible divise la base BC en deux segments dont le rapport est commensurable ; car, $\frac{AH}{CH} = \operatorname{tang} C$ et $\frac{AH}{BH} = \operatorname{tang} B$ étant commensurables, il en sera de même du rapport $\frac{BH}{CH}$ de ces deux tangentes.

Les carrés des côtés d'un triangle inscriptible (et par suite les carrés des côtés et des diagonales d'un polygone inscriptible) sont commensurables entre eux. En effet, si nous appelons $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ les coordonnées des trois sommets, les carrés des côtés sont $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$, c'est-à-dire que ces carrés sont exprimés par des nombres entiers.

On pourrait sans doute établir encore de nombreuses propriétés de ces figures inscriptibles, et il est probable que quelques-unes d'entre elles seraient de nature à fournir des théorèmes sur les nombres.

Il y a lieu, du reste, de remarquer le lien qui rattache l'étude de cette Géométrie des quinconces avec celle des nombres complexes de la forme $x + yi$, x et y étant des nombres entiers. En

choisissant les axes comme nous l'avons dit plus haut, tout centre de case se trouve, en effet, avoir des coordonnées x et y représentées par des nombres entiers.

Par exemple, ce théorème bien connu que rappelle M. Lucas : *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés*, résulte immédiatement de la considération suivante. Soient OI une longueur égale à l'unité portée sur l'axe des x à partir de l'origine, A et B deux centres de cases; si l'on construit le triangle OBC directement semblable à OIA , C sera encore un centre de case.

Algébriquement :

$$(x + yi)(x' + y'i) = z + ui,$$

z et u étant entiers, si x, y, x', y' le sont; d'où

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = z^2 + u^2,$$

relation qui correspond à $OA^2 \cdot OB^2 = OC^2$.

On sait que

$$z = xx' - yy', \quad u = xy' + x'y.$$

Comme cas particulier, si $xx' = yy'$, le produit $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$ est un carré parfait.

Les considérations relatives à cet ordre d'idées seraient peut-être d'un certain secours dans la théorie des nombres, et pourraient fournir la matière de recherches intéressantes.

*Représentation graphique de la résolution en nombres entiers
de l'équation indéterminée $ax + by = c$;*

par M. C. DE POLIGNAC.

(Séance du 4 avril 1877.)

La considération d'un réseau orthogonal ou échiquier indéfini a déjà été utilisée dans des Communications antérieures ⁽¹⁾. Je me propose d'en faire ici une nouvelle application.

(¹) EDOUARD LUCAS, *Théorèmes sur la Géométrie des quinconces*, séance du 7 novembre 1877. — LAISANT, sur la même question, séance du 13 février 1878.

Le réseau étant supposé tracé, deux de ses lignes orthogonales sont prises pour axes, et chaque sommet est affecté d'un nombre égal à la somme de ses coordonnées prises avec leurs signes.

Les nombres égaux sont disposés sur les diagonales parallèles à la bissectrice $y = -x$, que nous appellerons, pour abrégcr, *diagonales négatives*.

Résoudre graphiquement l'équation $ax + by = c$ revient à partager l'échiquier en un nombre indéfini de rectangles élémentaires ayant pour côté horizontal a et pour côté vertical b , et à chercher les sommets de ces rectangles qui se trouvent sur la *diagonale négative* c .

En particulier, les solutions positives seront comprises dans l'angle des directions positives des axes.

Bornons-nous à la recherche de ces dernières, et supposons a et b premiers entre eux et $a < b$.

Il suffira de déterminer le sommet-solution le plus voisin de l'axe des x . Des raisons de symétrie évidentes feront de suite obtenir les autres.

Soient R, R' les deux sommets de rectangles élémentaires (i, e les deux multiples de a) entre lesquels passe la diagonale c sur l'axe des x . Construisons les deux triangles égaux $ABR, A'B'R'$, dans lesquels les côtés de l'angle droit sont égaux à ab . Soit I le sommet-solution le plus voisin de l'axe des x . On a

$$HI = b\beta,$$

où β est un nombre entier. D'ailleurs

$$HI = Hc = \frac{c}{a} + HR = Rc,$$

où HR égale un multiple de $a = a\alpha$. Or, en estimant les longueurs à partir de l'origine O , on aura

$$Oc = c \quad \text{et} \quad Rc = R\left(\frac{c}{a}\right),$$

en désignant ainsi le *reste de la division de c par a* .

Il vient donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} b\beta = a\alpha + R\frac{c}{a}, \\ b\beta - a\alpha = R\frac{c}{a}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

où la solution en nombres positifs de l'équation indéterminée

$$ax + by = c$$

est ramenée à celle de l'équation (1). Tel est le résultat arithmétique auquel nous conduit l'inspection de l'échiquier. On aura $y_1 = \beta$, solution minima pour y .

Nombre de solutions positives. — On obtiendra la seconde solution positive en faisant glisser le triangle $A'B'R'$ le long de son hypoténuse, de façon à amener le point R' en B' . Le point I viendra se placer sur un autre sommet-solution, dont la distance à l'axe des x sera évidemment donnée par la formule

$$by_1 = b\beta + ab, \quad \text{d'où} \quad y_1 = \beta + a = y_1 + a,$$

et ainsi de suite.

Désignons maintenant par Q un point pris sur l'axe des x tel que

$$OQ = \left[\frac{c}{ab} \right] ab, \quad \dots,$$

c'est-à-dire le produit de ab par le quotient entier de c par ab . On vérifiera aisément par le même procédé de glissement que, si la première solution I tombe à gauche de la verticale passant par Q , le nombre des solutions positives sera

$$\left[\frac{c}{ab} \right].$$

Si I tombe à droite de cette verticale, il sera

$$\left[\frac{c}{ab} \right] + 1;$$

de même si I tombe sur la verticale.

Sur la figure, cette condition s'exprime par

$$cQ > cH,$$

c'est-à-dire

$$cQ > HI \quad \text{ou} \quad cQ > b\beta;$$

mais, par construction,

$$cQ = R \frac{c}{ab}.$$

On aura donc un nombre de solutions $\left[\frac{c}{ab} \right] + 1$ lorsque

$$(2) \quad R \left[\frac{c}{ab} \right] \geq b\beta.$$

Donc, si l'on emploie le mode de résolution suggéré par la considération de l'échiquier, à savoir :

Diviser par a les multiples successifs de b

$$b, 2b, 3b, \dots, (a-1)b,$$

jusqu'à ce qu'on en rencontre un qui donne pour reste

$$R \left(\frac{c}{a} \right), \text{ d'où } b\beta = a\alpha + R \left(\frac{c}{a} \right).$$

On aura en même temps la solution minimum pour γ et le nombre des solutions positives par la condition (2).

On peut montrer que, dans le cas général où

$$a = Da', \quad b = Db',$$

D étant le plus grand commun diviseur, le nombre des solutions positives est toujours donné par la formule

$$N = \left[\frac{\left[\frac{c}{b} \right] - \gamma_1}{a'} \right] + 1,$$

où γ désigne la solution minimum positive pour γ .

Voici une autre application de l'échiquier :

Joignons deux sommets M et A , et supposons que la ligne MA ne rencontre aucun autre sommet dans l'intervalle. L'abscisse et l'ordonnée du point M , rapportées au point A comme origine, seront deux nombres $x = a, y = a'$ premiers entre eux. Prenons-les positifs tous les deux, et menons par le point M une droite perpendiculaire à MA . Elle rencontrera un sommet B tel, que les coordonnées de M par rapport à B seront

$$x = -a', \quad y = a.$$

Prolongeons les deux droites MA, MB indéfiniment. Les sommets

de l'échiquier rencontrés par MA, savoir

$$A, A_1, A_2, \dots,$$

seront situés sur des horizontales dont les distances verticales au point M sont respectivement

$$a', 2a', 3a', \dots, aa'.$$

De même les sommets rencontrés par MB seront à des distances verticales de M, respectivement égales à

$$a, 2a, 3a, \dots, a'a.$$

Les nombres a et a' étant premiers entre eux, les deux côtés de l'angle droit MA, MB ne s'appuieront sur la même horizontale qu'à la distance aa' du point M.

Soient L, L' les sommets où MA et MB rencontrent cette horizontale commune, H le pied de la perpendiculaire abaissée du point M. On voit facilement, d'après la remarque précédente, que

$$HL = a^2, \quad HL' = a'^2;$$

donc

$$LL' = a^2 + a'^2.$$

Donc, si l'on prend pour diamètre d'un cercle la distance de deux sommets situés sur une même ligne horizontale, si le cercle passe par un autre sommet de l'échiquier, le diamètre sera décomposable en la somme de deux carrés.

Supposons que ce diamètre soit un nombre pair $2r$; l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sera satisfaite en nombres entiers par les coordonnées du point M. D'ailleurs la perpendiculaire abaissée du centre sur MA rencontrera cette droite en un point N qui sera nécessairement un sommet de l'échiquier. Donc, par la remarque précédente, r sera décomposable en la somme de deux carrés. On voit que l'échiquier sert à démontrer cette propriété, à savoir que, si un carré est égal à la somme de deux carrés, sa racine est égale à la somme de deux carrés.

Autrement dit, toutes les solutions de

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sont contenues dans l'identité

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2.$$

Enfin on a démontré que la perpendiculaire MH, abaissée sur le diamètre, est égale à aa' . On a donc

$$\overline{MH}^2 = HL \times HL'.$$

Cette propriété élémentaire du cercle ne dépend donc, en définitive, que du fait que le plus petit multiple de deux nombres premiers entre eux est égale à leur produit.

Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module; par M. Désiré André.

(Séance du 10 avril 1878.)

I. Dans le développement, suivant les puissances du module k , de la fonction elliptique $\mu(x)$, les coefficients des puissances successives de k sont des fonctions de x .

Nous nous proposons, dans la présente Note, de déterminer la forme générale de ces fonctions.

II. Pour y parvenir, nous partons de l'équation connue

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

que nous écrivons sous cette forme

$$(1) \quad \frac{d^2\mu}{dx^2} + \mu = 2k^2(\mu - \mu^3),$$

et nous posons simultanément

$$(2) \quad \mu = \nu_0 + \nu_1 k^2 + \nu_2 k^4 + \nu_3 k^6 + \dots$$

$$(3) \quad \mu^3 = V_0 + V_1 k^2 + V_2 k^4 + V_3 k^6 + \dots$$

En portant ces développements dans l'équation (1), puis égalant aux deux membres de cette équation les coefficients de k^{2n} , nous ob-

tenons l'équation différentielle

$$(4) \quad \frac{d^2 v_t}{dx^2} + v_t = 2v_{t-1} - 2V_{t-1},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs entières et non négatives de t , si l'on convient de regarder comme nulles les expressions v_{-1} et V_{-1} .

III. Cette équation (4) nous donne immédiatement

$$v_0 = \cos x;$$

de plus, elle nous permet de calculer, de proche en proche, les fonctions $v_1, v_2, \dots$, dont nous cherchons à déterminer la forme.

Supposons, en effet, connues toutes les quantités $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{t-1}$, c'est-à-dire tous les v dont l'indice est inférieur à t . Nous pouvons immédiatement calculer V_{t-1} , qui ne dépend que de ces v , et qui est lié à eux par l'équation

$$(5) \quad V_{t-1} = \frac{1}{(t-1)v_0} \sum_{h=0}^{t-2} (3t-3-4h) V_h v_{t-1-h},$$

laquelle se déduit très-facilement des égalités (2) et (3).

Or, V_{t-1} , calculé, v_t s'obtient aussitôt; car on tire sans peine, de l'équation (4), la formule

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} v_t &= 2 \sin x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \cos x \, dx \\ &\quad - 2 \cos x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \sin x \, dx. \end{aligned} \right.$$

IV. Pour revenir à la forme des coefficients considérés, appliquons les formules (5) et (6) au calcul des quantités v_1 et v_2 , puis écrivons les résultats que nous obtenons au-dessous de l'expression déjà trouvée pour v_0 ; nous formons le tableau

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos x, \\ v_1 &= \frac{1}{16} (-\cos x + \cos 3x) + \frac{x}{4} \sin x, \\ v_2 &= \frac{1}{256} (-9 \cos x + 8 \cos 3x + \cos 5x) \\ &\quad + \frac{x}{64} (4 \sin x + 3 \sin 3x) - \frac{x^2}{32} \cos x. \end{aligned}$$

Un examen attentif de ces expressions de ν_0, ν_1, ν_2 nous conduit à poser

$$(7) \quad \nu_t = \sum p_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum q_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

$p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ étant des constantes, i et j des entiers non négatifs, et les Σ s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la condition $2i+j \leq t$, et le second à tous les systèmes tels que l'on ait

$$2i+1+j \leq t.$$

V. Mais cette égalité (7), prise dans toute sa généralité, n'est écrite que par induction. Vraie évidemment pour ν_0, ν_1, ν_2 , on peut douter qu'elle le soit pour les coefficients suivants. Elle l'est cependant, et non-seulement pour les premiers de ces coefficients, mais pour tous, de façon qu'elle exprime la forme générale des fonctions ν et résout notre problème. On le démontre en établissant, à l'aide des formules (5) et (6), que, si elle est exacte pour tous les coefficients ν dont l'indice est inférieur à t , elle l'est encore pour ν_t . Les raisonnements assez longs qu'exige cette démonstration nous paraissent faciles; ils sont tout à fait analogues à ceux que nous avons employés dans notre Mémoire *Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module*.

VI. Évidemment, en remplaçant les sinus et cosinus de la formule (7) par leurs développements respectifs suivant les puissances de x , on peut arriver à la forme des coefficients du développement suivant les puissances de x de la fonction elliptique $\mu(x)$. On retrouve par cette voie, pour le cas particulier de $\mu(x)$, les résultats que nous avons présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 10 juillet 1876.

Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes;
par M. Désiré ANDRÉ.

(Séance du 13 mars 1878.)

I. On sait qu'on appelle *série récurrente* toute série dont chaque terme est la somme d'un nombre fixe des termes précédents multipliés respectivement par des coefficients constants.

La relation qui existe entre le terme général V_n et les termes précédents V_{n-1} , V_{n-2} , ... est la *loi* de la série. Lagrange a nommé ⁽¹⁾ *équation génératrice* de cette série l'équation en x qu'on obtient en remplaçant, dans la loi, V_n , V_{n-1} , V_{n-2} , ... respectivement par x^n , x^{n-1} , x^{n-2} , ..., et en supprimant ensuite la plus haute puissance de x qui se trouve en facteur commun dans tous les termes.

Une même série récurrente, comme Moivre l'a démontré ⁽²⁾ et comme on peut le voir aisément, admet une infinité de lois, et par suite une infinité d'équations génératrices différentes. Néanmoins, comme, dans la présente Note, nous ne considérerons jamais, pour une série récurrente donnée, qu'une seule équation génératrice, nous emploierons constamment cette locution : *l'équation génératrice de telle série récurrente*.

II. Cela étant, voici le problème que nous nous proposons de résoudre :

Étant donnée une relation linéaire et homogène entre les termes V_n , V_{n-1} , V_{n-2} , ... d'une série récurrente et les termes U_n , U_{n-1} , U_{n-2} , ... d'une autre série récurrente, en laquelle relation les termes V sont multipliés par des constantes, et les termes U par des polynômes entiers en n , déduire l'équation génératrice de la série V de l'équation génératrice de la série U .

Pour répondre à cette question, faisons passer au premier membre de la relation donnée tous les termes V , au second tous les termes U , appelons T_n le premier membre de la relation ainsi écrite, et dési-

⁽¹⁾ *OEuvres complètes*, t. V, p. 265.

⁽²⁾ *Miscellanea analytica*.

gnons par i le plus fort exposant de n dans les polynômes entiers en n qui multiplient les termes U . Soient d'ailleurs $f(x) = 0$ l'équation génératrice de la série récurrente U et $\varphi(x) = 0$ l'équation génératrice de la série récurrente dont la loi serait $T_n = 0$, série qu'il faut se garder de confondre avec la série récurrente V .

Si nous désignons par a l'une des racines de l'équation génératrice $f(x) = 0$ et par α le degré de multiplicité de cette racine, la relation donnée peut, comme on le sait, s'écrire de la manière suivante :

$$T_n = S_n + \xi_\alpha(n) a^n,$$

$\xi_\alpha(n)$ étant un polynôme entier en n du degré $\alpha + i - 1$, et S_n représentant la somme des termes analogues à $\xi_\alpha(n) a^n$ qui correspondent aux racines autres que a .

Remplaçons n par $n - 1$, nous trouvons immédiatement

$$T_{n-1} = S_{n-1} + \xi_\alpha(n-1) a^{n-1}.$$

Retranchons membre à membre cette équation, multipliée préalablement par a , de l'équation qui précède, nous arrivons à l'équation

$$T_n - a T_{n-1} = (S_n - a S_{n-1}) + \Delta \xi_\alpha(n-1) a^n,$$

en laquelle $S_n - a S_{n-1}$ est de même forme que S_n ; où $\Delta \xi_\alpha(n-1)$, différence première de $\xi_\alpha(n-1)$, est encore un polynôme entier en n , mais du degré $\alpha + i - 2$ seulement, et où la série récurrente définie par la loi $T_n - a T_{n-1} = 0$ a évidemment pour équation génératrice l'équation

$$\varphi(x)(x - a) = 0.$$

Si nous répétons l'opération que nous venons d'effectuer $\alpha + i - 1$ fois encore, nous sommes conduits à la relation

$$T_n = S_n,$$

en laquelle S_n est de même forme que S_n , mais où le terme en a^n a complètement disparu. Il suit d'ailleurs évidemment de ce qui précède que l'équation génératrice de la série ayant pour loi $T_n = 0$ n'est autre que l'équation

$$\varphi(x)(x - a)^{\alpha+i} = 0.$$

De là cette première conséquence que, quand on fait disparaître la racine a , le premier membre de l'équation génératrice $\varphi(x) = 0$ est multiplié par $(x - a)^{n+i}$.

Si donc on désigne par $a, b, c, \dots, l$ les racines de $f(x) = 0$, par $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ les degrés de multiplicité respectifs de ces racines, et qu'en opérant comme précédemment on les fasse disparaître toutes, l'équation génératrice $\varphi(x) = 0$ sera remplacée par l'équation

$$\varphi(x) (x - a)^{\alpha+i} (x - b)^{\beta+i} (x - c)^{\gamma+i} \dots (x - l)^{\lambda+i} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\varphi(x) f(x) g^i(x) = 0,$$

$g(x)$ étant le quotient de $f(x)$ par le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et sa dérivée.

Cette équation génératrice finale est évidemment l'équation génératrice cherchée de la série récurrente V. Donc on peut énoncer le résultat suivant :

Pour obtenir les racines de l'équation génératrice de la série récurrente V, il suffit de prendre : 1° les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ chacune avec son degré de multiplicité; 2° les racines de l'équation $f(x) = 0$, en augmentant le degré de multiplicité de chacune d'elles du nombre entier constant i .

III. On peut se poser le même problème d'une manière plus générale, en supposant que la relation linéaire et homogène donnée présente des termes, non plus de deux séries récurrentes V et U seulement, mais d'un nombre quelconque de séries récurrentes V, U, T, S, R, $\dots$, les termes V ayant toujours des coefficients constants et tous les autres étant multipliés par des polynômes entiers en n . On supposera alors connues les équations génératrices de toutes les séries autres que la série V, et l'on se proposera d'en déduire celle de cette dernière série.

En raisonnant comme dans le problème particulier qui précède, on serait conduit très-facilement à une solution nouvelle, ne différant de la précédente qu'en un seul point, à savoir : que le polynôme $f(x)$ y serait remplacé par le plus petit commun multiple de tous les polynômes constituant les premiers membres des équations

génératrices connues, c'est-à-dire des équations génératrices correspondant aux séries récurrentes autres que la série V.

Par conséquent, si l'on conserve à $\varphi(x)$ et à i leurs significations du problème précédent, qu'on désigne par $F(x)$ le plus petit commun multiple dont nous venons de parler, et par $G(x)$ le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et sa dérivée, l'équation génératrice cherchée de la série V sera l'équation

$$\varphi(x) F(x) G'(x) = 0.$$

Il est bien évident d'ailleurs que, dans beaucoup de cas particuliers, cette équation génératrice pourra être remplacée par une équation plus simple; mais, dans chacun de ces cas, ces simplifications seront si faciles à effectuer qu'il est inutile d'en présenter ici une étude spéciale.

IV. Dans tout ce qui précède, nous avons constamment supposé la relation donnée homogène par rapport aux termes des séries récurrentes. On pourrait généraliser encore notre problème en supposant que cette relation contient une partie indépendante de ces termes. Si l'on suppose que cette partie indépendante soit simplement un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n , le problème pourra encore se résoudre comme le précédent.

Alors, en effet, cette partie indépendante est justement l'expression développée du terme général d'une série récurrente, et, de cette expression développée, se déduit immédiatement, comme on le sait, l'équation génératrice de cette série. Le cas actuel rentre donc dans le précédent, et, par suite, il ne nécessite point une étude nouvelle.

V. Le problème que nous venons de résoudre et de généraliser est un problème d'une réelle importance. Les développements d'un grand nombre de fonctions présentent, en effet, comme nous l'avons établi ⁽¹⁾, des coefficients qui sont des termes de séries récurrentes. Trouver les formes générales de ces coefficients, c'est, en définitive,

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 29 octobre 1877.

trouver les équations génératrices de ces séries, et il est évident que la solution du problème actuel facilite beaucoup la détermination de ces équations.

Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan; par M. H. LÉAUTÉ.

(Séance du 10 avril 1878.)

Le théorème que nous voulons démontrer ici est le suivant :

Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan suivant une loi quelconque, si l'on considère à un instant donné tous les points situés sur une droite quelconque issue du centre instantané de rotation, les diamètres des trajectoires que décrivent ces points à l'instant considéré enveloppent une conique inscrite dans le triangle rectangle formé par le diamètre de la circonférence des inflexions issu du centre instantané de rotation, par la droite considérée et par la perpendiculaire à cette droite menée par son point d'intersection avec la circonférence des inflexions.

Soient C le centre instantané de rotation, O le centre de la circonférence des inflexions, A le point de cette circonférence diamétralement opposé à C, CM la droite considérée, M un point quelconque de cette droite, MP le diamètre de la trajectoire de M, γ l'angle que forme ce diamètre avec CM, m le point de rencontre de CM avec la circonférence des inflexions, P le point de rencontre du diamètre MP avec la perpendiculaire mA à CM, x la longueur Mm, γ la longueur mP, a le diamètre de la circonférence des inflexions, ρ le rayon de courbure en M de la trajectoire de M, s l'arc de cette trajectoire, r la longueur CM.

On a

$$\frac{\gamma}{x} = \tan \gamma,$$

et comme, d'après une propriété connue.

$$\frac{ds}{ds} = 3 \tan \gamma.$$

on en déduit

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}.$$

Mais on sait que le rayon de courbure en un point M est donné par

$$\rho = \frac{r^3}{r - a \cos \theta};$$

on a donc

$$d\rho = \frac{r}{(r - a \cos \theta)^2} [(r - a \cos \theta) dr + r \cos \theta da - ra \sin \theta d\theta].$$

Il faut calculer les quantités dr , da et $d\theta$.

Or, à l'instant qui suit l'instant considéré, le point O est venu en O', le point C en C'; la droite O'C' coupe la droite CA en un point B, et, si l'on représente par α l'angle de OO' avec CC', par dc la longueur CC', par b la longueur CB, on a

$$dr = -dc \sin \theta,$$

$$\frac{da}{2} = OO' \sin \alpha = dc \frac{a + 2b}{2b} \tan \alpha,$$

$$d\theta = -(\angle CBC' + \angle M C C') = -dc \left(\frac{1}{b} + \frac{\cos \theta}{r} \right).$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $d\rho$, on trouve

$$d\rho = \frac{r dc}{(r - a \cos \theta)^2} \times \left(3a \sin \theta \cos \theta + r \frac{a - b}{b} \sin \theta + r \frac{a + 2b}{b} \cos \theta \tan \alpha \right),$$

Remarquons maintenant que l'angle dont tourne la figure pour passer de la position correspondant à C à la position correspondant à C' est $\frac{dc}{a}$, et que, par suite,

$$ds = r \frac{dc}{a};$$

on a alors

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{a}{(r - a \cos \theta)^2} \times \left(3a \sin \theta \cos \theta + r \frac{a - b}{b} \sin \theta + r \frac{a + 2b}{b} \cos \theta \tan \alpha \right),$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{a}{x^2} (Ax + B),$$

en posant

$$A = \frac{a-b}{b} \sin \theta + \frac{a+2b}{b} \cos \theta \tan \alpha,$$

$$B = a \frac{a+2b}{b} \frac{\cos \theta \sin(\theta + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Les quantités A et B sont des constantes à l'instant considéré, car a , b et α sont les mêmes à cet instant pour tous les points de la figure, et θ a la même valeur pour tous les points de la droite CM.

En portant cette valeur de $\frac{d\rho}{ds}$ dans $\frac{r}{x}$, on a

$$\frac{xy}{a} = \frac{Ax + B}{3}.$$

Les points M et P décrivent, par conséquent, deux divisions homographiques, et, dès lors, le diamètre MP enveloppe une conique tangente aux deux droites CM et mP.

Si maintenant nous cherchons le diamètre de la trajectoire du point C considéré comme un point marqué de la figure mobile, c'est-à-dire si nous cherchons la valeur de $\tan \gamma$ pour x égal à

$$- a \cos \theta,$$

nous avons, puisque r est nul,

$$\tan \gamma = \frac{1}{3} \frac{a}{a^2 \cos^2 \theta} 3a \sin \theta \cos \theta = \tan \theta;$$

le diamètre du point C est donc CA, et par suite la conique trouvée est tangente à cette droite CA, ce qui complète le théorème énoncé.

Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers; par M. HALPHEN.

(Séances du 10 et du 24 avril 1878.)

1. J'ai communiqué précédemment à la Société ⁽¹⁾ deux formules analogues à celle d'Euler concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers. Comme la formule d'Euler, ces nouvelles formules, et beaucoup d'autres encore, se déduisent facilement des deux identités suivantes, dues à Jacobi ⁽²⁾ :

$$\prod_{i=1}^{i=\infty} (1 - q^{(2i-1)n-m}) (1 - q^{(2i-1)n+m}) (1 - q^{2in}) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (-1)^i q^{ni^2+mi},$$

$$\prod_{i=1}^{i=\infty} (1 + q^{(2i-1)n-m}) (1 + q^{(2i-1)n+m}) (1 - q^{2in}) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{ni^2+mi}.$$

Sans faire appel à ces deux formules, je me propose actuellement d'obtenir par des considérations purement arithmétiques les résultats arithmétiques qu'on en peut faire découler. On pourra juger que les considérations très-simples dont je vais faire usage équivalent entièrement aux formules de Jacobi, quand on verra que ces dernières peuvent à leur tour s'en déduire.

Des formules de Jacobi on peut aussi tirer divers résultats relatifs à la partition des nombres, notamment de la première des deux formules pour le cas particulier $n = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, cas dans lequel on a

$$(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4) = \dots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i q^{\frac{i(3i+1)}{2}}.$$

Ce résultat avait été trouvé par Euler, qui en avait déduit, en premier lieu, la célèbre formule récurrente concernant les sommes de diviseurs et, en second lieu, cette propriété : *Le nombre des partitions d'un entier a en un nombre pair de parties positives et iné-*

⁽¹⁾ Voir ce Bulletin, t. V et VI.

⁽²⁾ *Fundamenta nova.*

gales est supérieur d'une unité, ou inférieur d'une unité, ou bien précisément égal au nombre des partitions du même entier a en un nombre impair de parties positives et inégales, suivant que a est de la forme $\frac{i(3i+1)}{2}$ ou de la forme $\frac{i(3i-1)}{2}$, ou bien n'est d'aucune de ces deux formes.

Cette proposition a été démontrée directement par Jacobi ⁽¹⁾. Je ne m'en occuperai pas ici; si j'en parle actuellement, c'est pour rectifier une légère erreur qui s'est glissée à ce propos dans la belle édition des *Mémoires arithmétiques* d'Euler ⁽²⁾. Le commentateur y cite Jacobi comme ayant démontré d'une manière élémentaire la loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs, et renvoie au Mémoire dans lequel Jacobi démontre, non pas cette loi, mais le théorème de partitions.

Une démonstration arithmétique de la loi d'Euler était donc encore à trouver, et c'est cette démonstration que je vais faire ici.

2. Mon analyse se fonde sur deux propriétés d'une équation indéterminée. Je considère les deux équations suivantes :

$$(1) \quad a - x^2 = (b - x)y,$$

$$(2) \quad a - x'^2 = (x' - b)y',$$

Toutes les lettres représentent des nombres entiers :

a et b sont donnés et positifs;

y et y' doivent être positifs et impairs;

x et x' doivent être, en valeur absolue, inférieurs à $\sqrt{a}$.

Pour résoudre en nombres entiers les équations (1) et (2), on les écrira

$$y = \frac{a - b^2}{b - x} + b + x, \quad y' = \frac{a - b^2}{x' - b} - (b + x').$$

Soient δ et δ' des diviseurs de $(a - b^2)$ et δ_1, δ'_1 les diviseurs complémentaires. Les solutions seront comprises dans les formules

$$\begin{aligned} x &= b - \delta, & y &= 2b + \delta_1 - \delta, \\ x' &= b + \delta', & y' &= -2b + \delta'_1 - \delta'. \end{aligned}$$

(1) *Mathematische Werke*, t. I, p. 345.

(2) *L. Euleri Commentationes arithmeticae collectae*. Saint-Petersbourg. 1819, t. I. p. LIX de l'Avertissement.

Il s'agit de distinguer, parmi ces solutions, celles qui satisfont aux conditions imposées :

1° γ et γ' doivent être impairs; donc δ_1 et δ , ainsi que δ'_1 et δ' , doivent être de parités opposées; donc, tout d'abord, il n'y a pas de solution si a et b sont de parités opposées. Si maintenant a et b sont de même parité, $(a - b^2)$ est pair, et il faudra choisir pour δ , ainsi que pour δ' , soit un diviseur impair, soit le complément d'un diviseur impair; cela fait, γ et γ' seront impairs.

2° γ et γ' doivent être positifs, et x^2 , x'^2 inférieurs à a . Sur les équations proposées, on voit qu'on peut remplacer cette double condition par celle-ci : x^2 et x'^2 doivent être inférieurs à a , et $(b - x)$ et $(x' - b)$ doivent être positifs. On prendra donc δ et δ' positifs, et il restera à assurer les inégalités

$$x^2 < a, \quad x'^2 < a,$$

qui donnent lieu aux suivantes :

$$(3) \quad b - \sqrt{a} < \delta < b + \sqrt{a},$$

$$(4) \quad \delta' < \sqrt{a} - b.$$

Ici il y a lieu de distinguer deux cas suivant le signe de $(a - b^2)$. En premier lieu, si b est supérieur à $\sqrt{a}$, la seconde inégalité ne peut être satisfaite puisque δ' doit être positif. L'équation (2) n'a donc pas de solution satisfaisant aux conditions imposées. A l'égard de l'équation (1), la première inégalité limite les diviseurs qu'il faut choisir; mais, si δ satisfait à ces inégalités, son complément δ_1 (pris positivement) y satisfait aussi, attendu que le produit des deux limites est $(b^2 - a)$, c'est-à-dire $\delta\delta_1$.

Donc, en désignant par δ un diviseur *impair* quelconque de $(b^2 - a)$, satisfaisant à (3), et par δ_1 son complément, on aura les solutions de (1) par couples, comme il suit :

$$\begin{aligned} x &= b - \delta, & \gamma &= 2b - (\delta_1 + \delta), \\ x_1 &= b - \delta_1, & \gamma_1 &= 2b - (\delta_1 + \delta). \end{aligned}$$

Et, comme δ et δ_1 sont de parités opposées, on peut, en réunissant sous un même signe sommatoire toutes les solutions, conclure les deux égalités suivantes :

$$\Sigma (-1)^x = 0, \quad \Sigma (-1)^x \gamma = 0.$$

En second lieu, si b est inférieur à $\sqrt{a}$, la limite inférieure dans (3) doit être remplacée par zéro. Soit alors Δ un diviseur de $(a - b^2)$ compris entre zéro et la limite (4). On pourra le prendre à la fois pour δ et pour δ' , et l'on aura simultanément

$$\begin{aligned}x &= b - \Delta, & y &= 2b + \Delta, - \Delta, \\x' &= b + \Delta, & y' &= -2b + \Delta, - \Delta;\end{aligned}$$

d'où, à l'égard de ces solutions, les égalités

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma(-1)^x = \Sigma(-1)^{x'}, \\ \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = 2(-1)^b \Sigma(-1)^{\Delta} (\Delta, - \Delta). \end{cases}$$

Quant aux diviseurs δ de $(a - b^2)$ compris entre la limite (4) et la limite supérieure (3), chacun d'eux fournit une solution de (1); mais, comme tout à l'heure, chacun d'eux a son complémentaire compris entre les mêmes limites. Alors, en désignant par δ un diviseur *impair*, on a deux solutions à la fois :

$$\begin{aligned}x &= b - \delta, & y &= 2b + \delta, - \delta, \\x &= b - \delta_1, & y &= 2b + \delta - \delta_1,\end{aligned}$$

et ces solutions vérifient les égalités

$$(6) \quad \Sigma(-1)^x = 0, \quad \Sigma(-1)^x y = 2(-1)^{b+1} \Sigma(\delta_1 - \delta).$$

Ajoutons la première de ces deux égalités membre à membre à la première des égalités (5), et concluons

$$(7) \quad \Sigma(-1)^x = \Sigma(-1)^{x'} = 0,$$

les signes sommatoires s'appliquant maintenant à toutes les solutions de (1) et (2). On peut envisager cette égalité (7) comme s'appliquant aussi au cas précédent ($b - a^2 > 0$). Elle exprime donc une propriété générale des équations (1) et (2).

Combinons de même la deuxième égalité (5) et la deuxième égalité (6). Dans (5) distinguons les diviseurs impairs par la lettre Δ , et les diviseurs pairs par la lettre Δ' . Soient Δ_1 et Δ'_1 leurs compléments respectifs; Δ_1 est pair et Δ'_1 impair. J'écrirai alors la combinaison obtenue de la sorte

$$\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = 2(-1)^{b+1} \Sigma(\delta_1 - \delta + \Delta_1 - \Delta + \Delta'_1 - \Delta'_1).$$

Ici δ est un diviseur impair compris entre $(\sqrt{a} - b)$ et $(\sqrt{a} + b)$, Δ un diviseur impair compris entre zéro et $(\sqrt{a} - b)$, Δ' un diviseur impair dont le complément est compris entre ces deux dernières limites; donc Δ' est lui-même supérieur à $(\sqrt{a} + b)$. Donc la somme des nombres $(\delta + \Delta + \Delta')$ se compose de *tous* les diviseurs impairs de $(a - b^2)$. En désignant donc par δ un diviseur impair *quelconque* et par δ_1 son complément, on peut écrire

$$\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' + 2(-1)^b \Sigma(\delta_1 - \delta) = 0.$$

Je désigne par $P(\omega)$ la somme des diviseurs *pairs* du nombre ω ; on a manifestement

$$2\Sigma(\delta_1 - \delta) = P(a - b^2);$$

donc enfin

$$(8) \quad \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' + (-1)^b P(a - b^2) = 0.$$

De même que (7), cette égalité peut être appliquée aussi au cas où $(a - b^2)$ est négatif, sous la convention que $P(\omega)$ se réduise à zéro quand ω est négatif. Pour qu'il n'y ait aucune restriction, il faut encore examiner ce que deviennent les égalités (7) et (8) dans le cas singulier où $(a - b^2)$ est nul, cas auquel l'analyse précédente ne s'applique pas, puisqu'elle repose sur la considération des diviseurs de $(a - b^2)$.

Les équations étant prises sous leur seconde forme, remarquons qu'on ne peut annuler $(b - x)$ ou $(x' - b)$; car alors la condition $x^2 < a$, $x'^2 < a$ ne serait pas respectée. Les équations se réduisent donc à

$$y = b + x, \quad y' = -(b + x').$$

La seconde est impossible, y' devant être positif, et x' inférieur en valeur absolue à b . La première admet les solutions

$$\begin{aligned} x &= 1 - b, \quad 3 - b, \quad 5 - b, \quad \dots, \quad (2b - 1) - b, \\ y &= 1, \quad 3, \quad 5, \quad \dots, \quad 2b - 1. \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \Sigma(-1)^x &= (-1)^{b+1} b, \\ \Sigma(-1)^x y &= (-1)^{b+1} b^2. \end{aligned}$$

Si maintenant on observe que le changement de b en $-b$, accompagné du changement de signe de x , permute entre elles les équations

tions (1) et (2), on peut faire disparaître la condition que b soit positif et résumer toute cette analyse ainsi :

LEMME I.— Soient a et b des entiers donnés, le premier positif, puis x et x' des entiers positifs ou négatifs inférieurs en valeur absolue à $\sqrt{a}$, et y, y' des entiers positifs et impairs, choisis de toutes les manières possibles pour satisfaire aux égalités

$$a - x^2 = (b - x)y, \quad a - x'^2 = (x' - b)y'.$$

Soit aussi $P(\omega)$ la somme des diviseurs positifs et pairs de l'entier positif ω , quantité que l'on réduit à zéro si ω n'est pas positif.

1° Si $(a - b^2)$ n'est pas nul, on a

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = 0, \quad \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' + (-1)^b P(a - b^2) = 0.$$

2° Si $(a - b^2)$ est nul, on a

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = (-1)^{b+1} b, \quad \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = (-1)^{b+1} b^2.$$

3. Tout à l'heure je transformerai cet énoncé de manière à l'approprier à toutes les conséquences que j'ai en vue d'obtenir; mais je vais tout d'abord exposer les conséquences qu'on peut en tirer sous cette forme même.

THÉORÈME I. — Soit $f(z)$ une fonction impaire : que l'on fasse la somme des expressions $(-1)^x f\left(\frac{a - x^2}{y} + x\right)$ en y prenant pour x tous les nombres entiers compris entre la racine carrée négative et la racine carrée positive de l'entier a , et pour y tous les diviseurs positifs et impairs de $(a - x^2)$. Cette somme est nulle si a n'est pas un carré; et, si a est un carré, elle est égale à

$$(-1)^{a+1} \sqrt{a} f(\sqrt{a}).$$

Pour prouver ce théorème, ramenons dans chaque terme de la somme l'argument de la fonction f à être, par exemple, positif, ce qui se peut, puisque cette fonction est impaire. Cherchons maintenant le coefficient de $f(b)$, b étant un entier positif quelconque. Pour avoir $f(b)$, il faudra poser l'une ou l'autre des deux égalités

$$\frac{a - x^2}{y} + x = b, \quad \frac{a - x^2}{y} + x = -b.$$

Eu égard au double signe que peut prendre x , on voit que ces deux équations coïncident avec (1) et (2); donc le coefficient de $f(b)$ dans la somme est précisément $\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'}$, c'est-à-dire zéro, sauf si $a = b^2$. Cette dernière circonstance se présente si a est un carré et qu'on choisisse $b = \sqrt{a}$. Dans ce cas, d'après le lemme, $f(b)$ a le coefficient $(-1)^{b+1}b$; donc le théorème est entièrement démontré.

4. Voici l'exemple le plus simple du théorème I; nous l'obtenons en posant $f(z) = z$. Dans la somme, réunissons deux à deux les termes qui ne diffèrent que par le signe de x ; alors

$$f\left(\frac{a-x^2}{y} + x\right) + f\left(\frac{a-x^2}{y} - x\right) = 2 \frac{a-x^2}{y}.$$

La somme des divers termes relatifs à une même valeur de x est ainsi le double de la somme des diviseurs de $(a-x^2)$, dont les compléments y sont impairs.

Ainsi, en désignant par $C(\omega)$ la somme des diviseurs de ω dont les compléments sont impairs, on a

$$C(a) - 2C(a-1) + 2C(a-4) - 2C(a-9) \dots \pm 2C(a-n^2) = 0,$$

si a n'est pas un carré. Si, au contraire, a est un carré, le premier membre est égal à $(-1)^{a+1}a$. La somme doit être prolongée jusqu'au dernier nombre positif $(a-n^2)$.

On peut encore, à la manière d'Euler, écrire

$$C(a) = 2[C(a-1) - C(a-4) \dots \pm C(a-n^2) \dots],$$

en convenant, si a est un carré, de pousser jusqu'à $C(0)$, qu'on remplacera par $\frac{1}{2}a$.

C'est précisément une des formules que j'ai déjà communiquées à la Société. J'ai fait remarquer qu'on peut en faire découler les lois de la décomposition des nombres premiers en sommes de deux carrés; je répète ici cette remarque, qui s'applique aussi aux décompositions en trois carrés.

Si a n'est pas carré, le terme $\frac{1}{2}a$ n'existe pas dans la parenthèse; donc $C(a)$ est pair.

Si a n'est ni carré ni somme de deux carrés, alors, en outre,

aucun des nombres $(a - n^2)$ n'est carré; tous les termes dans la parenthèse sont pairs, et $C(a)$ est divisible par 4.

Si a n'est ni carré ni somme de deux ou trois carrés, alors, en outre, aucun des nombres $(a - n^2)$ n'est somme de deux carrés, et tous les termes de la parenthèse sont divisibles par 4; donc $C(a)$ est divisible par 8.

Si maintenant a est premier, $C(a)$ est égal à $(a + 1)$; donc :

1° Un nombre premier non décomposable en somme de deux carrés est de la forme $(4m - 1)$;

2° Un nombre premier non décomposable en somme de deux ou trois carrés est de la forme $(8m - 1)$.

Donc inversement :

1° Tout nombre premier $(4m + 1)$ est somme de deux carrés;

2° Tout nombre premier $(8m + 3)$ est somme de trois carrés.

5. Si l'on fait $f(z) = z^3$, le théorème I donne une formule récurrente pour la somme $C_3(a)$ des cubes des diviseurs de a dont les compléments sont impairs, savoir :

$$C_3(a) = 2[C_3(a-1) - C_3(a-4) \dots \pm C_3(a-n^2) \dots] \\ + 6[C(a-1) - 2C(a-4) \dots \pm nC(a-n) \dots],$$

à quoi, si a est un carré, il faut ajouter le terme complémentaire $(-1)^{s+1}a^3$. On peut multiplier les exemples analogues et en conclure que le théorème I permet de calculer, par voie de récurrence, les diviseurs mêmes des nombres; mais on peut, à cet effet, obtenir une formule simple en posant $f(z) = \alpha^z - \alpha^{-z}$. On a alors

$$f(z+x) + f(z-x) \\ = \alpha^{z+x} - \alpha^{-z-x} + \alpha^{z-x} - \alpha^{-z+x} = (\alpha^z - \alpha^{-z})(\alpha^x + \alpha^{-x}).$$

En conséquence, si, de toutes les manières possibles, on pose

$$a = (2k+1)p,$$

k et p étant positifs, et que l'on fasse $U(a) = \Sigma(\alpha^p - \alpha^{-p})$, la fonction $U(a)$ satisfait à la formule récurrente

$$U(a) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) U(a-1) - \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) U(a-4) + \dots \\ + (-1)^{n+1} \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) U(a-n^2) + \dots,$$

dans laquelle, si a est un carré, le terme correspondant à $n^2 = a$ doit être remplacé par $(-1)^{s+1} \sqrt{a} (\alpha^{\sqrt{a}} - \alpha^{-\sqrt{a}})$.

6. Si, dans cette dernière formule, on divise tous les termes par $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ et qu'on prenne ensuite, dans les deux membres, le coefficient de α^m , on obtient le résultat suivant :

Soit $V(a, m)$ le nombre des diviseurs impairs de a qui sont inférieurs à $\frac{a}{m}$; cette fonction numérique satisfait à la formule récurrente

$$\begin{aligned} V(a, m) = & V(a-1, m-1) - V(a-4, m-2) \dots \\ & + (-1)^{s+1} V(a-n^2, m-n) \dots \\ & + V(a-1, m+1) - V(a-4, m+2) \dots \\ & + (-1)^{s+1} V(a-n^2, m+n) \dots \end{aligned}$$

Dans la première ligne, le nombre $(m-n)$ doit toujours être pris positivement. Si a est un carré, que m soit inférieur à $\sqrt{a}$ et en diffère d'un nombre impair, les deux termes correspondant à $n^2 = a$ doivent être remplacés par $(-1)^{s+1} \sqrt{a}$. Dans les autres cas, la formule se termine aux deux termes pour lesquels $(a-n^2)$ a la plus petite valeur positive possible.

Par exemple, pour $m = 0$, on a

$$V(a, 0) = 2[V(a-1, 1) - V(a-4, 2) \dots + (-1)^{s+1} V(a-n^2, n) \dots],$$

et cette formule ne comporte un terme complémentaire que si a est un carré impair. Ce terme complémentaire est alors $\sqrt{a}$.

Appliquons, par exemple, cette dernière formule au nombre 101; nous devons trouver 2 pour résultat, puisque le nombre envisagé est premier. Ainsi la somme des termes positifs de la parenthèse doit surpasser d'une unité la somme des termes négatifs. C'est ce qu'on vérifiera par le tableau suivant :

	Valeur.	Limite des diviseurs.	Diviseurs impairs.	Valeur de ceux qui sont inférieurs à la limite.
$V_{22} - 1.1 = V_{100.1}$	100	$\frac{1.107}{1}$	1.51.25	3
$V_{22} - 3.3 = V_{122.3}$	122	$\frac{1.133}{3}$	1.23	2
$V_{22} - 13.13 = V_{151.13}$	151	$\frac{1.151}{13}$	1.13	1
$V_{22} - 43.7 = V_{172.7}$	172	$\frac{1.171}{7}$	1.17	1
$V_{22} - 51.3 = V_{207.3}$	207	$\frac{1.207}{3}$	1.51	1
Total				6
$V_{22} - 1.2 = V_{17.2}$	17	$\frac{1.17}{1}$	1.17	1
$V_{22} - 19.1 = V_{15.1}$	15	$\frac{1.15}{1}$	1.15.1.15	3
$V_{22} - 36.3 = V_{123.3}$	123	$\frac{1.123}{3}$	1.13	1
$V_{22} - 31.3 = V_{154.3}$	154	$\frac{1.154}{3}$	1.51	1
$V_{22} - 10.1 = V_{11.1}$	11	$\frac{1.11}{1}$	1.11	1
Total				7

Total 13 diviseurs.

Il est évident que nous avons épuisé l'ensemble complet de toutes les possibilités de décomposition de 22.

Il est évident que si nous cherchons à décomposer 22 en un produit de facteurs premiers, nous ne pouvons pas le faire, car 22 est un nombre premier. La seule décomposition possible est 22 = 22.

22

dans laquelle $P(a)$ est, comme plus haut, la somme des diviseurs pairs de a si a est positif, et zéro dans les autres cas.

Si a n'est pas un carré, la somme obtenue est nulle. Si a est un carré, la somme est égale à $(-1)^{e+1} a F(\sqrt{a})$.

La démonstration se fait comme pour le théorème I. Dans la somme envisagée, le coefficient de $F(b)$ est

$$\Sigma(-1)^s y + \Sigma(-1)^{s'} y' + (-1)^t P(a - b^2),$$

ce qui, d'après le lemme, est égal à zéro, sauf dans le cas où b^2 est égal à a ; donc la somme est zéro, à moins que a ne soit un carré.

Les applications les plus simples que l'on puisse faire du théorème II conduisent aux formules obtenues précédemment au moyen du théorème I; il n'y a donc pas lieu d'y insister pour le moment.

8. Je vais maintenant considérer les équations (1) et (2) sous une autre forme. J'envisagerai les deux équations

$$(9) \quad \frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x = b,$$

$$(10) \quad \frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} - x' = -b,$$

dans lesquelles b est un entier donné, et A, n, m sont des nombres donnés quelconques, entiers ou non, n essentiellement positif et supérieur à la valeur absolue de m . Comme précédemment, x et x' doivent être entiers et astreints aux inégalités

$$(11) \quad nx^2 + mx < A, \quad nx'^2 + mx' < A,$$

et y, y' doivent être entiers, positifs et impairs.

Les équations (9), (10) se ramènent immédiatement aux équations (1), (2). Elles s'écrivent, en effet,

$$\begin{aligned} A - mb &= n(x^2 - xy + by), \\ A - mb &= n(x'^2 + x'y' - by'). \end{aligned}$$

Les deux quantités entre parenthèses étant des nombres entiers, les équations ne peuvent être résolues que s'il existe un nombre

entier a vérifiant l'égalité

$$A - mb = na.$$

Supposons qu'il en existe effectivement un, c'est-à-dire que $\frac{A - mb}{n}$ soit un nombre entier; alors les équations se réduisent à

$$\begin{aligned} a &= x^2 - xy + by, \\ a &= x'^2 + x'y' - by'. \end{aligned}$$

Ce sont précisément les équations (1) et (2). En second lieu, on a

$$\begin{aligned} y \frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} &= (b - x)y = a - x^2, \\ y' \frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} &= (x' - b)y' = a - x'^2. \end{aligned}$$

Puisque y et y' sont tous deux égaux au moins à l'unité, et que m est, en valeur absolue, inférieur à n , les dénominateurs $(ny + m)$, $(ny' - m)$ sont positifs comme y et y' ; donc les inégalités (11), imposées à x et x' , se confondent avec les inégalités $x^2 < a$, $x'^2 < a$.

En conséquence, la résolution des équations (9) et (10), avec les conditions imposées aux inconnues, coïncide exactement avec celle des équations (1) et (2). Je peux donc appliquer ici l'énoncé du lemme I convenablement transformé, et dire :

LEMME II. — Soient A, m, n des nombres quelconques, le dernier positif et supérieur à la valeur absolue du second, et b un nombre entier. Soient aussi y, y' des entiers positifs et impairs, x, x' des entiers devant vérifier les inégalités

$$nx^2 + mx < A, \quad nx'^2 + mx' < A,$$

ces nombres devant être choisis de toutes les manières possibles pour satisfaire aux équations

$$\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x = b, \quad \frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} - x' = -b.$$

Ces équations ne peuvent être résolues que si $\frac{A - nb^2 - mb}{n}$ est un

entier. Cette condition remplie, si l'on envisage toutes les solutions, on aura les relations suivantes :

1° Si $(A - nb^2 - mb)$ n'est pas nul,

$$\begin{aligned} \Sigma(-1)^s - \Sigma(-1)^{s'} &= 0, \\ \Sigma(-1)^s(ny + m) + \Sigma(-1)^{s'}(ny' - m) \\ &+ (-1)^b n P\left(\frac{A - nb^2 - mb}{n}\right) = 0. \end{aligned}$$

2° Si $(A - nb^2 - mb)$ est nul,

$$\begin{aligned} \Sigma(-1)^s - \Sigma(-1)^{s'} &= (-1)^{b+1} b, \\ \Sigma(-1)^s(ny + m) + \Sigma(-1)^{s'}(ny' - m) &= (-1)^{b+1} A. \end{aligned}$$

9. Du lemme II je déduis le théorème suivant, généralisation du théorème I :

THÉOREME III. — Soient A, m, n des nombres quelconques, le dernier positif et supérieur à la valeur absolue du second. On fait la somme des expressions

$$(-1)^s f\left(\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x\right) \quad \text{et} \quad (-1)^{s+1} f\left(x - \frac{A - nx^2 - mx}{ny - m}\right),$$

$f(z)$ étant une fonction quelconque, et les entiers x et y , ce dernier positif et impair, étant choisis de toutes les manières possibles pour rendre entier l'argument de la fonction. Cette somme est nulle, sauf dans le cas où il existe un entier α , tel que A soit égal à $(n\alpha^2 + mx)$. S'il existe un pareil entier, la somme est égale à $(-1)^{s+1} \alpha f(\alpha)$. S'il existe deux pareils entiers α, β , la somme est égale à $(-1)^{s+1} \alpha f(\alpha) + (-1)^{s+1} \beta f(\beta)$.

On prouvera ce théorème en remarquant que, b étant un entier quelconque, le coefficient de $f(b)$ dans la somme est

$$\Sigma(-1)^s - \Sigma(-1)^{s'},$$

les sommations s'appliquant à toutes les solutions de (9) et (10).

10. On généralise de même le théorème II comme il suit :

THÉOREME IV. — Dans les mêmes conditions, on fait la somme

des expressions

$$\begin{aligned} & (-1)^x (ny + m) f\left(\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x\right), \\ & (-1)^x (ny - m) f\left(x - \frac{A - nx^2 - mx}{ny - m}\right), \\ & (-1)^x n P\left(\frac{A - nx^2 - mx}{n}\right) f(x). \end{aligned}$$

Cette somme est nulle ou bien égale à l'une des deux quantités

$$(-1)^{x+1} f(\alpha) A, \quad [(-1)^{x+1} f(\alpha) + (-1)^{x+1} f(\beta)] A.$$

11. L'application la plus simple des théorèmes III et IV consistera à supposer $f(x) = 1$. Le théorème III conduit ainsi à la conséquence suivante :

A étant un nombre positif quelconque donné, ainsi que m, n, ce dernier positif et supérieur à la valeur absolue de m, on pose de toutes les manières, k et k' étant des entiers non négatifs, et p, p' des entiers quelconques,

$$(11) \quad \frac{A}{n(2k+1)+m} = p, \quad \frac{A}{n(2k'+1)-m} = p';$$

et l'on désigne par $D(A)$ la fonction numérique égale à l'excès du nombre des solutions de la première équation sur le nombre des solutions de la seconde. Cette fonction satisfait à la formule récurrente

$$\begin{aligned} D(A) = & D(A - n - m) - D(A - 4n - 2m) \dots \\ & + (-1)^{x+1} D(A - nx^2 - mx) \dots \\ & + D(A - n + m) - D(A - 4n + 2m) \dots \\ & + (-1)^{x+1} D(A - nx^2 + mx) \dots, \end{aligned}$$

les deux suites devant être arrêtées au dernier argument positif, et, si A est de la forme $nx^2 + mx$, α étant un entier, le terme $D(0)$ devant être remplacé par α .

12. La même hypothèse, appliquée au théorème IV, conduit à cette autre conséquence :

Si l'on envisage l'équation $A = zp$, dans laquelle p doit être

un entier et z de l'une des formes

$$n(2k+1) \pm m \text{ ou } 2nk, \quad k=0, 1, \dots,$$

et qu'on désigne par $S(A)$ la somme des solutions z , cette fonction satisfait à la même formule récurrente

$$\begin{aligned} S(A) &= S(A-n-m) - S(A-4n-2m) \dots \\ &+ (-1)^{s+1} S(A-nx^2-mx) \dots \\ &+ S(A-n+m) - S(A-4n+2m) \dots \\ &+ (-1)^{s+1} S(A-nx^2+mx) \dots, \end{aligned}$$

dans laquelle, s'il y a lieu, $S(0)$ doit être remplacé par A .

13. Dans ce dernier énoncé, si l'on suppose $n = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, on obtient une formule récurrente pour la fonction $S(A)$, qui est alors la somme de tous les diviseurs de A . En effet, les trois formes de z sont alors

$$3k+2, \quad 3k+1, \quad 3k,$$

c'est-à-dire que z est un entier quelconque. La formule récurrente est précisément celle d'Euler; c'est là la loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.

L'énoncé du n° 11 montre également que la formule récurrente d'Euler est aussi vérifiée par la fonction numérique $D(A)$ qui est égale à l'excès du nombre des diviseurs $3k+2$ sur le nombre des diviseurs $3k+1$ du nombre A . Ces deux formules ne diffèrent que par le terme complémentaire, et ce dernier existe dans le cas où A est de la forme $\frac{x(3x \pm 1)}{2}$.

14. Soit toujours $S(A)$ la même fonction numérique qu'au n° 12; je considère la série

$$Q = qS(1) + q^2S(2) + q^3S(3) + \dots,$$

que l'on peut aussi écrire

$$Q = \sum \frac{z q^z}{1 - q^z},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de z comprises dans

les formules

$$z = (2k + 1)n \pm m, \quad z = 2kn, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La quantité $(-1)^x \Sigma S(A - nx^2 - mx)$ est le coefficient de q^A dans le produit de Q par la série

$$S = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} (-1)^x q^{nx^2+mx}.$$

D'après le n° 12, ce coefficient est nul si A n'est pas de la forme $(nx^2 + mx)$; dans le cas opposé, ce coefficient est $\pm A$. On a donc

$$S \cdot Q = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} (-1)^x q^{nx^2+mx} \times (nx^2 + mx).$$

Divisant par qS les deux membres de l'égalité, intégrant entre les limites zéro et q , puis revenant des logarithmes aux nombres, j'obtiens

$$\prod_{k=0}^{k=\infty} (1 - q^{(2k+1)n+m}) (1 - q^{(2k+1)n-m}) (1 - q^{2n}) = S,$$

c'est-à-dire l'une des identités dues à Jacobi.

En terminant, j'indique que les théorèmes III et IV, en subissant de très-légères modifications, s'appliquent au cas où les nombres m , n sont égaux. C'est à ce cas que se rapporte une formule récurrente que j'ai précédemment donnée dans ce *Bulletin*; mais il me semble inutile d'entrer à ce sujet dans plus de détails.

Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point;
par M. P. TCHEBICHEF.

(Séance du 14 juillet 1878.)

1. D'après un théorème sur les angles compris entre les plans qui passent par un point, on parvient aisément à une relation très-remarquable entre les angles que font les trois forces R_1 , R_2 , R_3 ,

appliquées à un seul point et les résultantes de ces forces, prises deux à deux, savoir :

$$(1) \quad \frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} \frac{\sin(R_2, [R_2, R_3])}{\sin(R_3, [R_2, R_3])} \frac{\sin(R_3, [R_3, R_1])}{\sin(R_1, [R_3, R_1])} = 1,$$

où, par

$$[R_1, R_2], [R_2, R_3], [R_3, R_1],$$

nous désignons les résultantes des forces R_1 et R_2 , R_2 et R_3 , R_3 et R_1 , et par

$$(R_1, [R_1, R_2]), (R_2, [R_1, R_2]), (R_2, [R_2, R_3]), \dots$$

les angles entre les résultantes et les forces qui les composent.

C'est cette équation qui servait de base à deux nouvelles démonstrations du *parallélogramme des forces*, données en décembre 1875 par M. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, et par moi dans une Communication faite à la *Société mathématique de Moscou* ⁽¹⁾.

Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver, d'après cette équation, la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])},$$

sans rien admettre sur la direction de la résultante et la continuité.

2. Après avoir remarqué, d'après l'équation (1), que le rapport

$$\frac{\sin(R_2, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])}$$

ne dépend pas de l'angle fait par les forces R_1 , R_3 ⁽²⁾, nous supposons que cet angle est réduit à 120 degrés, et nous désignons par φ l'angle entre la force R_1 et la résultante $[R_1, R_3]$ des deux forces

⁽¹⁾ *Recueil mathématique de la Société*, 1876. (Extrait du protocole de la séance du 14 décembre 1875.)

⁽²⁾ Voir la démonstration du parallélogramme des forces de M. Darboux, citée plus haut.

R_1, R_3 . Nous obtenons ainsi

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi + \frac{1}{2}.$$

Mais on reconnaît aisément que la résultante d'un tel système de deux forces ne sera pas altérée si l'on diminue de 60 degrés l'angle compris entre elles, et que l'on diminue en même temps la force R_1 de R_3 ; car un tel changement de notre système peut évidemment être effectué si l'on y ajoute trois forces égales à R_3 et disposées symétriquement autour du point d'application, savoir : deux forces dans les directions opposées aux deux forces en question, et la troisième faisant avec ces forces un angle de 60 degrés. Or, pour le système de deux forces R_1, R_3 ainsi modifié, on aura, d'après notre notation,

$$\frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1, [R_1 - R_3, R_3])} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi - \frac{1}{2},$$

ce qui, étant retranché de la formule précédente, nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1 - R_3, [R_1 - R_3, R_3])} = 1.$$

3. En remplaçant, dans cette équation, R_1 par

$$R_0, \quad R_0 - R_3, \quad R_0 - 2R_3, \quad \dots, \quad R_0 - (m-1)R_3,$$

que nous supposons toutes ne pas être inférieures à R_3 , nous trouvons une série d'équations qui donnent

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{\sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} = m,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} \\ = \frac{R_0}{R_3} \left(1 + \frac{R_0 - mR_3}{R_0} \left\{ \frac{R_3 \sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{(R_0 - mR_3) \sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} - 1 \right\} \right) \end{array} \right\}$$

en remplaçant le nombre m par la différence

$$\frac{R_0}{R_3} - \frac{R_0 - mR_3}{R_3},$$

égale à ce nombre.

C'est à l'aide de cette formule que nous parvenons à tirer de l'équation (1) la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])}.$$

4. A cet effet, nous supposons que, pour une force quelconque r , on ait trouvé une quantité L telle que la valeur numérique de

$$\frac{r \sin(r, [r, r_1])}{r_1 \sin(r_1, [r, r_1])} - 1$$

ne surpasse pas L pour toutes les valeurs de r_1 depuis $r_1 = r$ jusqu'à $r_1 = 2r$, l'angle (r, r_1) étant égal à 90 degrés. Dans cette supposition, en désignant par θ , $\theta^{(0)}$ des quantités comprises entre zéro et 1, nous aurons, pour toutes les valeurs de $r_1 = r + \theta r$, cette formule

$$\frac{r \sin(r, [r, r + \theta r])}{(r + \theta r) \sin(r, [r + \theta r])} - 1 = \pm \theta^{(0)} L.$$

Comme il est certain que la résultante ne change pas de direction quand on remplace les forces par leurs sous-multiples, on aura de même

$$(3) \quad \frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3) \sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1 = \pm \theta^{(0)} L,$$

pour toutes les valeurs de

$$(4) \quad R_3 = \frac{r}{n},$$

n étant un nombre entier.

5. Mais, en prenant dans l'équation (2) pour m la partie entière du quotient $R_0 - R_3 : R_3$, on aura

$$R_0 - nR_3 = R_3 + \theta R_3,$$

et, pour cette valeur de m , l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} \\ &= \frac{R_0}{R_3} \left(1 + \frac{R_3 + \theta R_3}{R_0} \left\{ \frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3) \sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1 \right\} \right), \end{aligned}$$

qui, d'après (3), dans le cas de

$$R_3 = \frac{r}{n},$$

nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_3, R_3])}{\sin(R_3, [R_3, R_3])} = \frac{R_3}{R_3} \left[1 \pm \frac{R_3 + \theta R_3}{R_3} \theta^{(0)} L \right].$$

En posant, dans cette formule,

$$R_3 = R_1, \quad R_3 = R_2,$$

et en désignant par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \\ \theta_1^{(0)}, \quad \theta_2^{(0)}$$

les valeurs correspondantes de θ et $\theta^{(0)}$, nous obtenons

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{R_1}{R_3} \left[1 \pm \frac{R_3 + \theta_1 R_3}{R_1} \theta_1^{(0)} L \right], \\ \frac{\sin(R_3, [R_2, R_3])}{\sin(R_2, [R_2, R_3])} = \frac{R_2}{R_3} \left[1 \pm \frac{R_3 + \theta_2 R_3}{R_2} \theta_2^{(0)} L \right].$$

6. En portant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons qu'elle donnera

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 \pm \frac{(1 + \theta_2) R_3}{R_2} \theta_2^{(0)} L}{1 \pm \frac{(1 + \theta_1) R_3}{R_1} \theta_1^{(0)} L};$$

d'où, par la substitution de la valeur (4) de R_3 , nous tirons cette formule :

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 \pm \frac{(1 + \theta_2) r}{n R_2} \theta_2^{(0)} L}{1 \pm \frac{(1 + \theta_1) r}{n R_1} \theta_1^{(0)} L}.$$

Comme, dans cette formule, le nombre n peut être pris aussi grand qu'on le voudra, et que les quantités

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_1^{(0)}, \quad \theta_2^{(0)},$$

les seules qui dépendent du nombre n et des forces R_1, R_2 , restent

comprises entre zéro et 1, on trouve, d'après cette formule, en faisant croître n à l'infini,

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. LAISANT.

(Séance du 31 juillet 1878.)

Dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1783, Lagrange a donné sous ce titre : *Sur une propriété nouvelle du centre de gravité*, une Note qui a été réimprimée dans les *OEuvres complètes*, t. V, p. 535.

L'objet essentiel de cette Note consiste dans la démonstration des deux théorèmes suivants, dont je reproduis textuellement les énoncés :

THÉOREME I. — *Soit un système ou assemblage quelconque de plusieurs corps ou masses dont chacune soit considérée comme un point, qu'on multiplie toutes ces masses deux à deux, et ensuite chaque produit de deux masses par le carré de la distance entre elles; qu'enfin on divise la somme de ces différents produits par la somme de toutes les masses; on aura une quantité égale à la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance au centre de gravité du système.*

THÉOREME II. — *La somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à un point quelconque donné est égale au produit de la somme des masses par le carré de la distance de ce point au centre de gravité de toutes ces masses, plus à la somme des produits des masses multipliées deux à deux entre elles, et par le carré de leurs distances respectives, cette dernière somme étant divisée par la somme même des masses.*

Sans être difficile, l'analyse de Lagrange présente encore des calculs assez développés. On peut arriver plus rapidement, par la

méthode des quaternions, à établir la proposition qui fait l'objet du théorème II.

Soient O l'origine que nous prenons au point quelconque d'où l'on compte les distances; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$ les vecteurs des divers points dont les masses sont respectivement $m_1, m_2, \dots$; enfin $\mathbf{G}$ le vecteur du centre de gravité.

Le théorème II s'exprime évidemment par l'équation

$$(a) \quad \Sigma m \mathbf{A}^2 = \Sigma m \cdot \mathbf{G}^2 + \frac{\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2}{\Sigma m}.$$

Or nous avons

$$\frac{\Sigma m \mathbf{A}}{\Sigma m} = \mathbf{G},$$

$$\Sigma m \mathbf{A} = \Sigma m \cdot \mathbf{G},$$

et, en élevant au carré,

$$\Sigma m^2 \mathbf{A}^2 + 2 \Sigma m_p m_q \mathfrak{S} \mathbf{A}_p \mathbf{A}_q = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2,$$

p et q représentant ici deux indices quelconques, différents l'un de l'autre.

De là

$$\Sigma m^2 \mathbf{A}^2 = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2 - 2 \Sigma m_p m_q \mathfrak{S} \mathbf{A}_p \mathbf{A}_q.$$

Si nous ajoutons maintenant de part et d'autre la quantité

$$\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p^2 + \mathbf{A}_q^2),$$

il est visible que nous aurons

$$\Sigma m \cdot \Sigma m \mathbf{A}^2 = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2 + \Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2,$$

c'est-à-dire, en divisant par Σm , l'équation (a) en démonstration.

Quant au théorème I, c'est un corollaire immédiat de celui-ci; car, si nous supposons que nous prenions le centre de gravité pour origine, le premier terme du second membre de l'équation (a) disparaît, et il reste

$$(b) \quad \Sigma m \mathbf{A}^2 = \frac{\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2}{\Sigma m},$$

relation qui exprime le théorème I.

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (deuxième Note); par M. LINDEMANN.

(Séance du 10 avril 1878.)

Dans une Communication antérieure (t. V du *Bulletin*, p. 113), j'ai expliqué une méthode qui permet de profiter des résultats de la théorie des formes algébriques ternaires d'ordre n pour la théorie des formes binaires d'ordre $2n$, et réciproquement. Elle était fondée sur ce théorème qu'il y a une courbe d'ordre n , qui est particulièrement attachée à une forme binaire, représentée par $2n$ points arbitraires d'une conique fixe, de façon que les polaires binaires d'ordre 2ρ par rapport aux $2n$ points se trouvent déterminées par les intersections de la conique avec les polaires ternaires d'ordre ρ par rapport à la courbe en question ⁽¹⁾. Cette dernière passe par les $2n$ points donnés, et toutes ses polaires quadratiques sont harmoniquement circonscrites à la conique fixe; c'est-à-dire, la relation $(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2} = 0$ est satisfaite par tous les points x du plan, si $\alpha_x^n = 0$ et $p_x^2 = p_x'^2 = 0$ sont respectivement l'équation de la courbe d'ordre n et celle de la conique. En vertu de cette propriété, la courbe $\alpha_x^n = 0$ n'est pas générale, si $n > 3$; elle est particularisée parce qu'un certain covariant, dont j'ai donné l'expression, s'annule identiquement.

Pour compléter les recherches de la Note précitée, on peut demander de trouver l'équation de cette courbe $\alpha_x^n = 0$ qui jouit des propriétés mentionnées et qui passe par les intersections de $p_x^2 = 0$ avec une courbe générale donnée par l'équation $\alpha_x^n = 0$. C'est cette question que nous allons traiter; la solution donnera lieu à quelques applications, se rapportant aux conditions de contact d'une conique avec une courbe algébrique quelconque.

2. D'abord il nous faut démontrer un théorème auxiliaire que voici :

(¹) M. Salmon a aussi indiqué qu'il doit exister une courbe particulièrement liée à une forme binaire d'ordre pair, quand on représente les valeurs de la variable binaire par les points d'une conique (*Lessons introductory to the modern higher Algebra*; third edition, art. 190).

Chaque covariant simultané d'une conique

$$p_x^2 = p_x'^2 = p_x''^2 = \dots = 0$$

et d'une courbe d'ordre $n(a_x^n = 0)$, qui est du premier degré par rapport aux coefficients de cette courbe, doit être une fonction entière de diverses expressions, dont le type général est donné par la forme

$$(ap'p'')^r (ap''p''')^s \dots (ap^{(r-1)}p^{(r)})^2 a_x^{n-2r},$$

r étant un nombre entier positif.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème connu ⁽¹⁾, que chaque covariant simultané d'une conique $p_x^2 = 0$ et d'une droite $u_x = 0$ est une fonction entière des quatre formes

$$u_x, \quad p_x^2, \quad (pp'u)^2, \quad (pp'p'')^2.$$

En effet, les covariants simultanés de p_x^2 et de a_x^n qui sont du premier degré par rapport aux coefficients de a_x^n , c'est-à-dire qui ne contiennent qu'un seul symbole a , ne peuvent être changés essentiellement, quand on remplace les symboles a_i de a_x^n par les coefficients u_i d'une forme linéaire, coordonnées d'une droite; et réciproquement, chaque contrevariant (ou connexe covariant, *Zwischenform*) de p_x^2 qui est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coordonnées u_i se transforme, par la substitution $u_i = a_i$, en un invariant (ou covariant) simultané de a_x^n et p_x^2 .

3. Maintenant je me propose d'établir l'équation de la courbe d'ordre n qui appartient au système linéaire proposé

$$\alpha_x^n = \Pi a_x^n + \pi_x^{n-2} p_x^2 = 0$$

(où Π est un facteur constant et π_x^{n-2} désigne une forme d'ordre $n-2$ à déterminer) et qui jouit des propriétés demandées au n° 1.

La condition $(\alpha pp')^2 \alpha_x^{n-2} = 0$ nous donne la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & n(n-1)(app')^2 a_x^{n-2} \Pi + (n-2)(n-3)(\pi pp')^2 \pi_x^{n-4} p_x'^2 \\ & + 2\pi_x^{n-2}(pp'p'')^2 + 2(n-2)(\pi p'p'') \pi_x^{n-3}(pp'p'') p_x = 0, \end{aligned} \right.$$

(1) Voir CLEBSCH, *Leçons de Géométrie*, t. I, p. 287.

laquelle, étant satisfaite pour toutes les valeurs de x_1, x_2, x_3 , est équivalente à un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations linéaires et homogènes par rapport au facteur Π et aux $\frac{1}{2}n(n-1)$ coefficients de π_x^{n-2} . Au lieu de les résoudre par une voie directe, nous faisons remarquer qu'elles sont de forme invariante et que, par conséquent, la forme cherchée, α_x^n , doit être covariant simultanée des deux formes proposées α_x^n et p_x^2 . Ce covariant se détermine par le raisonnement suivant.

Les coefficients de α_x^n ne se trouvent pas multipliés, dans l'équation (1), par ceux de π_x^{n-2} . Il faut donc que α_x^n soit linéaire par rapport aux coefficients de α_x^n . D'après le théorème démontré au numéro précédent, nous connaissons tous les covariants doués de cette propriété. En désignant par r_i des facteurs numériques, nous pouvons donc poser, pour $n = 2\nu$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n &= \alpha_x^n \Delta^\nu + r_1 \alpha_x^{n-2} (\alpha p p')^2 F \Delta^{\nu-1} \\ &+ r_2 \alpha_x^{n-4} (\alpha p p')^2 (\alpha p'' p'')^2 F^2 \Delta^{\nu-2} + \dots \\ &+ r_\nu (\alpha p' p'')^2 (\alpha p'' p^{iv})^2 \dots (\alpha p^{(n-1)} p^{(n)})^2 F^\nu, \end{aligned} \right.$$

où

$$\Delta = (p p' p'')^2, \quad F = p_x^2,$$

et, pour $n = 2\nu + 1$:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n &= \alpha_x^n \Delta^\nu + \rho_1 \alpha_x^{n-2} (\alpha p p')^2 F \Delta^{\nu-1} + \dots, \\ &+ \rho_\nu \alpha_x (\alpha p' p'')^2 (\alpha p'' p^{iv})^2 \dots (\alpha p^{(n-2)} p^{(n-1)})^2 F^\nu. \end{aligned} \right.$$

4. Il est aisé de calculer les nombres r_i et ρ_i qu'il nous reste encore à déterminer. Formons le covariant $(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2}$ qui doit s'évanouir. En prenant d'abord $n = 2\nu$, on déduit de (2)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &n(n-1) (\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2} \\ &= n(n-1) \Delta^\nu (\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2} \\ &+ r_1 \Delta^{\nu-1} [(n-2)(n-3) (\alpha p' p'')^2 (\alpha p'' p^{iv})^2 \alpha_x^{n-4} F \\ &\quad + 4(n-2) (\alpha p' p'')^2 (\alpha p'' p^{iv})^2 \alpha_x^{n-3} (p p'' p^{iv}) p_x \\ &\quad + 2 (\alpha p' p'')^2 \alpha_x^{n-2} \Delta] + \dots \end{aligned} \right.$$

Supposons les termes du deuxième membre ordonnés suivant les puissances du déterminant Δ ; alors nous pouvons calculer les

nombres r_i de telle manière que chaque expression qui multiplie une certaine puissance de Δ s'évanouit identiquement. En effet, dans le deuxième terme du crochet qui multiplie r_1 par exemple, nous permutons les lettres $pp'''p''$ et nous formons la somme des trois expressions ainsi obtenues, laquelle contient les facteurs symboliques

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & (ap''p''')(pp'''p'')p_x \\ &= \frac{1}{3} (pp'''p'') [(app'')p_x - (app'')p_x'' + (app''')p_x''] \\ &= \frac{1}{3} (pp'''p'')^2 a_x = \frac{1}{3} \Delta a_x. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de $r_1 \Delta^{n-1}$ devient donc égal à

$$(n-2)(n-3)(ap'p'')^2(ap'''p'')^2 a_x^{n-3} F + \frac{2}{3} (2n-1)(ap'p'')^2 a_x^{n-2} \Delta;$$

par conséquent, le facteur de Δ^n , au second membre de (1), est donné par

$$(ap'p'')^2 a_x^{n-2} \left[n(n-1) + \frac{2}{3} r_1 (2n-1) \right];$$

et, pour le faire s'évanouir, il suffit de poser

$$r_1 = -\frac{3}{2} \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

5. Après avoir déterminé r_1 , on peut trouver les autres nombres r_i par voie récurrente. Le terme général du second membre de (4) se trouve représenté par

$$\begin{aligned} & r_i \Delta^{n-i} F^{i-1} (ap'p'')^2 (ap'''p'')^2 \dots (ap^{(2i-1)}p^{(2i)})^2 a_x^{n-2i-2} \\ & \times [(n-2i)(n-2i-1)(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)})^2 F^2 \\ & + 4i(n-2i)(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)}) a_x F (pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)}) p_x \\ & + 4i(i-1) a_x^2 (pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)}) (p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)}) p_x p_x' + 2i a_x^2 F \Delta]. \end{aligned}$$

Pour transformer le second terme de l'expression entre crochets, faisons usage de l'identité (5), en y mettant $p^{(2i+1)}$, $p^{(2i+2)}$ à la place de p''', p'' ; elle nous donne alors

$$(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_x = \frac{1}{3} \Delta a_x.$$

Par un procédé analogue, on a, dans le troisième terme,

$$(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})(p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_xp'_x = \frac{1}{3} (p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)})^2 p_x^2 = \frac{1}{3} \Delta F.$$

En posant, pour abréger,

$$(6) \quad A_i = (ap'p'')^2 (ap'''p^{iv})^2 \dots (ap^{(2i-1)}p^{(2i)})^2 \alpha_x^{n-2i},$$

le terme général dont il s'agit devient donc

$$r_i \Delta^{n-i} F^{i-1} \left[(n-2i)(n-2i-1) A_{i+1} F + \frac{2}{3} i (2n-2i+1) \Delta A_i \right].$$

De même, le terme précédent est égal à

$$r_{i-1} \Delta^{n-i+1} F^{i-2} \left[(n-2i+2)(n-2i+1) A_i F + \frac{2}{3} (i-1)(2n-2i+3) \Delta A_{i-1} \right];$$

et il n'y a pas d'autres termes, dans le second membre de (4), qui contiennent le facteur Δ^{n-i+1} , que ceux qui résultent de ces deux expressions. Voici donc l'expression qui y multiplie Δ^{n-i+1} :

$$F^{i-1} A_i \left[r_{i-1} (n-2i+2)(n-2i+1) + \frac{2}{3} r_i i (2n-2i+1) \right];$$

par conséquent, le covariant $(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2}$ s'évanouit identiquement, quand on suppose les nombres r_i calculés par la formule récurrente

$$r_i = -\frac{3}{2} \frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{i(2n-2i+1)} r_{i-1}.$$

Or, la valeur de r_1 étant trouvée au n° 4, on en tire, sans difficulté, la formule directe

$$r_i = \left(-\frac{2}{3}\right)^i \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2i+1)}{1.2\dots i.(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2i+1)}.$$

Enfin on obtient, en se servant des notations introduites par (6), pour $n = 2\nu$,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha_x^n = \alpha_x^n \Delta^\nu - \frac{3}{2} \frac{n(n-1)}{2n-1} A_1 F \Delta^{\nu-1} \\ & + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)} A_2 F^2 \Delta^{\nu-2} + \dots \\ & + \left(-\frac{3}{2}\right)^\nu \frac{2\nu(2\nu-1)\dots(\nu+1)}{\nu!(4\nu-1)(4\nu-3)\dots(2\nu+1)} A_\nu F^\nu. \end{aligned} \right.$$

6. On voit immédiatement que les mêmes raisonnements et les mêmes calculs s'appliquent encore au cas où n est impair, de sorte que l'on a $r_i = p_i$. Ce n'est, en effet, que le dernier terme du second membre de (7) qui doit être modifié. On obtient, en vertu de (3), pour $n = 2\nu + 1$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n &= \alpha_x^n \Delta^\nu - \frac{3}{2} \frac{n(n-1)}{2n-1} \Lambda_1 F \Delta^{\nu-1} + \dots \\ &+ \left(-\frac{3}{2} \right)^\nu \frac{(2\nu+1)2\nu(2\nu-1)\dots(\nu+1)}{\nu!(4\nu+1)(4\nu-1)\dots(2\nu+3)} \Lambda_1 F^\nu. \end{aligned} \right.$$

Les équations (7) et (8) impliquent la solution du système d'équations linéaires, représenté par (1).

7. Cette solution ne peut devenir indéterminée ⁽¹⁾. En effet, supposons qu'il y ait une autre courbe $\beta_x^n = 0$, qui jouisse des mêmes propriétés que $\alpha_x^n = 0$. Alors ces deux courbes auraient les mêmes intersections avec la conique $F = 0$, et il en serait de même pour toutes les polaires des deux courbes, car ces polaires déterminent, sur $F = 0$, les polaires binaires (d'ordre pair) des $2n$ points fondamentaux. En désignant par z un point arbitraire de la conique, on aurait donc

$$\begin{aligned} \alpha_x^n &= \beta_x^n + b_x^{n-2} p_x^2, \\ n \alpha_x^{n-1} \alpha_z &= n \beta_x^{n-1} \beta_z + (n-2) b_x^{n-2} b_z p_x^2 + 2 b_x^{n-2} p_x p_z. \end{aligned}$$

D'autre part, le premier membre doit être de la forme

$$n \beta_x^{n-1} \beta_z + B p_x^2,$$

et, par conséquent, nous pouvons poser

$$b_x^{n-2} = b_x^{n-4} p_x^2.$$

En continuant de raisonner d'une manière analogue, on est con-

⁽¹⁾ Nous remarquons qu'elle reste aussi déterminée si les $2n$ zéros de la forme binaire se confondent en un même point. La tangente de $F = 0$ en ce point, comptée n fois, est alors la seule courbe d'ordre n dont toutes les polaires ne rencontrent la conique que dans son point de contact. Donc, si $\alpha_x^n = 0$ a, avec la conique, un contact d'ordre $2n-1$, la forme α_x^n , donnée par (7) ou (8), est une puissance d'une forme linéaire.

duit aux relations

$$\begin{aligned} b_x^{n-1} &= [p_x^2]^{r-1} C \quad \text{pour } n = 2r \\ &= [p_x^2]^{r-1} u_x \quad \text{pour } n = 2r + 1, \end{aligned}$$

C étant une constante et u_x une forme linéaire. Cependant il faut que l'on ait $C = 0$ et $u_x = 0$; car d'ailleurs, comme on le vérifie aisément, les relations

$$(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-1} = 0, \quad (\beta p p')^2 \beta_x^{n-1} = 0, \quad (p p' p'')^2 \geq 0$$

ne pourraient être satisfaites à la fois.

8. Je vais indiquer une application immédiate que l'on peut faire des résultats que nous venons d'établir, et du lien qui existe, d'après nos recherches antérieures, entre la théorie des formes binaires et celle des formes ternaires. Il est connu que le tactinvariant d'une courbe algébrique quelconque et d'une courbe unicursale se trouve donné par le discriminant d'une certaine forme binaire. On obtient cette forme en exprimant les coordonnées des points de la courbe unicursale par deux paramètres homogènes et en formant le premier membre de l'équation algébrique dont dépendent les intersections des deux courbes proposées. Ainsi, le tactinvariant se présente exprimé par les invariants d'une forme binaire; cependant on a encore à vaincre quelques difficultés, quand on se propose de l'exprimer par les invariants simultanés des deux formes qui, égalées à zéro, représentent les deux courbes. C'est ce problème dont nous pouvons donner la solution, par notre méthode, pour le cas particulier où la courbe unicursale est notre conique fixe $p_x^2 = 0$.

Soit l'équation d'une courbe algébrique quelconque donnée par $a_x^n = 0$. Ses $2n$ points d'intersection avec la conique sont représentés par les zéros d'une forme binaire a_x^{2n} , d'après les formules (1) et (6) de ma première Note (1). Le discriminant de cette forme sera donc le tactinvariant cherché. Lorsque la courbe d'ordre n touche la conique, chaque autre courbe du même ordre qui passe par leurs $2n$ intersections, jouit de la même propriété. En particulier, on peut remplacer, sans altérer le tactinvariant, la courbe $a_x^n = 0$

(1) Il n'y aura aucune ambiguïté si j'applique ici et dans ce qui va suivre les mêmes symboles a_i pour la forme ternaire a_x^n que pour la forme binaire a_x^{2n} .

par cette courbe $\alpha_x^n = 0$ qui est attachée à la forme binaire α_x^n de la manière convenue, et dont on peut former l'équation à l'aide des relations (7) ou (8). En appliquant les formules fondamentales que j'ai établies dans ma première Note et qui expriment les facteurs symboliques (ab) , a_x des covariants et des invariants de la forme binaire α_x^n par les facteurs symboliques $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta p)$, $(\alpha pp')$, $(pp'p'')$, α_x , p_x des covariants et des invariants simultanés de α_x^n et de p_x^n , nous sommes à même de remplacer immédiatement les invariants de la forme α_x^n qui figurent dans l'expression de son discriminant, par les invariants simultanés de α_x^n et p_x^n . Or nous pouvons supposer connue, d'après les recherches de M. Gordan ⁽¹⁾, l'expression symbolique du discriminant; par conséquent, nous pouvons calculer le tactinvariant de α_x^n et de p_x^n , sous forme invariante. Cela posé, il nous reste à introduire les coefficients de α_x^n au lieu des coefficients de α_x^n , et ce sont encore les équations (7) et (8) qui nous permettent d'achever parfaitement la solution de la question. Évidemment on établira d'une manière analogue, en partant des relations correspondantes de la théorie des formes binaires, les conditions pour des contacts d'ordre supérieur de la conique avec une courbe algébrique quelconque, comme on va le voir par un cas particulier.

J'espère pouvoir communiquer prochainement à la Société les résultats des calculs indiqués, pour le cas $n = 3$, où il s'agit d'exprimer le tactinvariant d'une conique et d'une cubique quelconque par leurs invariants simultanés.

9. Je me borne ici à appliquer ce raisonnement au cas $n = 2$ pour lequel, d'ailleurs, les résultats sont connus. Cherchons donc le tactinvariant des deux coniques arbitraires :

$$a_x^2 = b_x^2 = c^2 = 0 \quad \text{et} \quad p_x^2 = p_x'^2 = p_x''^2 = 0.$$

Leurs invariants simultanés seront définis par les équations

$$(9) \quad \Delta = (pp'p'')^2 = 3D^4 \quad (1),$$

$$(10) \quad \Delta' = (app')^2, \quad \Delta'' = (abp)^2, \quad \Delta''' = (abc)^2.$$

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. III. — Voir aussi CLEBSCH, *Theorie der binären Formen*, § 20.

⁽²⁾ Voir le calcul qui nous a servi pour établir l'équation (20) de ma Note précitée. La quantité D est définie par l'équation (3) de cette Note.

En vertu de (7), la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée à la forme binaire a_x^4 qui représente les intersections de $a_x^2 = 0$ et $p_x^2 = 0$, est

$$(11) \quad 0 = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \gamma_x^2 = a_x^2 \Delta - p_x^2 \Delta' = b_x^2 \Delta - p_x^2 \Delta'.$$

En effet, la condition $(\alpha p p')^2 = 0$ est satisfaite identiquement par cette conique $\alpha_x^2 = 0$.

Le discriminant de a_x^4 est donné par $i^2 - 6j^2$ où, d'après les formules (20) et (14) de ma première Note,

$$(12) \quad \begin{cases} D^4 i = D^4 (ab)^4 = -2(\alpha\beta p)^2, \\ D^4 j = D^4 (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 = (\alpha\beta\gamma)^2. \end{cases}$$

En appliquant, deux fois de suite, la formule (11) et en ayant égard à la relation $(\alpha p p')^2 = 0$, on trouve

$$(\alpha\beta p)^2 = (\alpha\beta p')^2 \Delta = \Delta[(abp)^2 \Delta - (ap'p)^2 \Delta'] = \Delta(\Delta\Delta'' - \Delta'^2),$$

et de même

$$\begin{aligned} (\alpha\beta\gamma)^2 &= (abc)^2 \Delta^3 - 3\Delta^2 \Delta' (abp)^2 + 3\Delta\Delta'^2 (app')^2 - \Delta'^3 (pp'p'')^2 \\ &= \Delta(\Delta''\Delta^2 - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3). \end{aligned}$$

Δ étant égal à $3D^4$, on en tire

$$(13) \quad i = -6(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)$$

$$(14) \quad j = 3(\Delta''\Delta^2 - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3),$$

et de là

$$(15) \quad \begin{cases} i^2 - 6j^2 = -54[4(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)^2 + (\Delta^2\Delta'' - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3)^2] \\ = 54\Delta^2[6\Delta\Delta'\Delta''\Delta''' + 3\Delta'^2\Delta''^2 \\ - \Delta^2\Delta''^2 - 4\Delta\Delta''^2 - 4\Delta'^3\Delta''^2]. \end{cases}$$

Or c'est en effet, au facteur Δ^2 près, l'expression connue du tact-invariant cherché.

10. Si les deux coniques ont entre elles un contact du second ordre, l'équation $a_x^4 = 0$ doit avoir une racine triple, ce qui arrivera quand on a, à la fois, $i = 0$ et $j = 0$. À l'aide des relations (13) et (14), on en déduit immédiatement les conditions ternaires, éga-

lement connues,

$$(16) \quad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\Delta''}{\Delta} \quad (1).$$

11. Les coniques auront deux contacts distincts, chacun du premier ordre, si la forme binaire $a\xi^2$ est le carré d'une forme quadratique, c'est-à-dire si l'on a

$$iH - ja\xi^2 = 0,$$

en désignant par H la hessienne de $a\xi^2$, savoir

$$H = (ab)^2 a\xi^2 b\xi^2.$$

Pour établir la relation ternaire correspondante, nous appliquons la relation (18) de ma Note antérieure qui nous donne

$$(17) \quad D^3H = \zeta^2(\alpha p' p'')(\beta p' p'')\alpha_x \beta_x \quad (2),$$

ou, en vertu de (11),

$$\begin{aligned} D^3H &= \zeta^2[(ap' p'')\alpha_x \Delta - (pp' p'')p_x \Delta'] [bp' p'')b_x \Delta - (p'' p' p'')p_x'' \Delta'] \\ &= \zeta^2[(ap' p'')(\beta p' p'')\alpha_x b_x \Delta^2 - 2\Delta\Delta'(ap' p'')(pp' p'')\alpha_x p_x \\ &\quad + \Delta'^2(pp' p'')(p'' p' p'')p_x p_x'']. \end{aligned}$$

Transformons le deuxième membre à l'aide des égalités

$$\begin{aligned} (pp' p'')(ap' p'')p_x &= \frac{1}{3}(pp' p'')[(ap' p'')p_x - (app'')p_x' + (app')p_x''] \\ &= \frac{1}{3}(pp' p'')^2 \alpha_x = \frac{1}{3}\Delta \alpha_x, \\ (pp' p'')(p'' p' p'')p_x &= \frac{1}{3}(pp' p'')^2 p_x'' = \frac{1}{3}\Delta p_x'', \end{aligned}$$

et négligeons, aux deux membres, le facteur $\Delta = 3D^4$; alors il vient

$$D^3H = \zeta^2[3\Delta(ap' p'')(bp' p'')\alpha_x b_x - 2\Delta\Delta'\alpha_x^2 + \Delta'^2 p_x''].$$

Pour les calculs suivants, il sera utile d'introduire, au lieu de

(1) Voir le *Traité des sections coniques*, par M. Salmon.

(2) On pourrait aussi partir de l'équation (16) de la Note citée. Cependant il faudrait y poser, au premier membre, D^{3u+1} à la place de $4D^{3u+1}$; de même, dans l'équation (15), il faut diviser le dernier membre par 2.

$(app')(bpp')a_xb_x$, un autre covariant, qui est symétrique par rapport aux coefficients de a_x^2 et de p_x^2 , comme on vérifie aisément par les identités connues, savoir :

$$(18) \quad \varphi_x^2 = \Delta' a_x^2 - (app')(bpp')a_xb_x = \Delta'' p_x^2 - (pab)(p'ab)p_xp'_x.$$

A l'aide de cette forme, nous obtenons la formule

$$(19) \quad D^3H = \zeta'(\Delta\Delta' a_x^2 + \Delta'^2 p_x^2 - 3\Delta\varphi_x^2).$$

Nous aurons encore besoin de la relation suivante, qui découle de (11) et de l'équation (6) de la Note précitée

$$(20) \quad D^2a_x^2 = \zeta^2 a_x^2 = \zeta'(\Delta a_x^2 - \Delta' p_x^2).$$

Pour obtenir la relation ternaire correspondant à l'équation $iH - ja_x^2 = 0$, nous pouvons négliger, dans les dernières formules, tous les termes qui contiennent le facteur p_x^2 , car les relations (19) et (20) supposent toujours que $p_x^2 = 0$. Ainsi la condition

$$iH - ja_x^2 = 0$$

se transforme, par (13), (14), (19) et (20), en

$$(21) \quad a_x^2 \Delta(\Delta' \Delta'' - \Delta \Delta'') + 6\varphi_x^2(\Delta \Delta'' - \Delta'^2) = C p_x^2,$$

C étant une constante indéterminée. Nous pouvons la calculer, en posant, en particulier,

$$x_1 = c_1 d_1 - c_2 d_2, \quad x_2 = c_1 d_2 - c_2 d_1, \quad x_3 = c_1 d_3 - c_2 d_4.$$

Alors il vient

$$\begin{aligned} a_x^2 &= (acd)^2 = \Delta'', \quad p_x^2 = (pcd)^2 = \Delta'', \\ \varphi_x^2 &= \Delta' \Delta'' - (app')(bpp')(acd)(bcd) \\ &= \Delta' \Delta'' - \frac{1}{3}(app')(bcd)[(acd)(bpp') - (abd)(cpp') + (abc)(dpp')] \\ &= \Delta' \Delta'' - \frac{1}{3}(app')^2(bcd)^2 = \frac{2}{3} \Delta' \Delta''. \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$5\Delta\Delta'\Delta''\Delta'' - 4\Delta'^2\Delta'' - \Delta'\Delta''^2 = C\Delta''.$$

Or le tactinvariant des deux coniques est nul dans le cas envisagé;

par suite, l'équation (15) nous donne

$$C\Delta'' = 5\Delta\Delta'\Delta''\Delta''' - 4\Delta'\Delta'' - \Delta'\Delta'' = 4\Delta\Delta'' - 3\Delta'\Delta'' - \Delta\Delta'\Delta''$$

ou bien

$$C = 4\Delta\Delta'' - 3\Delta'\Delta'' - \Delta\Delta'\Delta''.$$

La condition (21) devient ainsi

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta(\Delta'\Delta'' - \Delta\Delta''')a_x^2 + 6(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)\varphi_x^2 \\ + (\Delta\Delta'\Delta'' + 3\Delta'\Delta'' - 4\Delta\Delta''')p_x^2 = 0. \end{cases}$$

Il doit donc exister une relation linéaire entre les trois formes quadratiques a_x^2 , p_x^2 et φ_x^2 .

12. Ce résultat s'accorde parfaitement avec une autre forme, sous laquelle j'ai donné, dans mon édition des *Leçons de Clebsch*, t. I, p. 298, la condition pour que les deux coniques $a_x^2 = 0$ et $p_x^2 = 0$ se touchent en deux points distincts, savoir :

$$(23) \quad (\Delta\Delta'' - \Delta'^2)F_{22} - (\Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'')F_{12} + (\Delta'\Delta''' - \Delta''^2)F_{11} = 0,$$

où

$$F_{22} = (abu)^2, \quad F_{12} = (pau)^2, \quad F_{11} = (pp'u)^2.$$

En effet, on tire de (23)

$$(24) \quad \begin{cases} (\Delta\Delta'' - \Delta'^2)(abu)(abv) - (\Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'')(apu)(apv) \\ + (\Delta'\Delta''' - \Delta''^2)(pp'u)(pp'v) = 0. \end{cases}$$

Il faut que cette relation ait lieu quelles que soient les quantités u_i et v_i . Posons donc, en particulier,

$$u_i = p_x'' p_i'', \quad v_i = p_x''' p_i''''.$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} (abu)(abv) &= (abp)(abp')p_x p_x' = \Delta'' p_x^2 - \varphi_x^2, \\ (apu)(apv) &= (app')(app'')p_x' p_x'' = \frac{1}{2}(app')p_x''[(app'')p_x' - (ap'p'')p_x] \\ &= \frac{1}{2}(app')p_x''[(app')p_x'' - (pp'p'')a_x] \\ &= \frac{1}{2}\Delta' p_x^2 - \frac{1}{6}\Delta a_x^2, \\ (pp'u)(pp'v) &= (pp'p'')(pp'p'')p_x'' p_x''' = \frac{1}{3}\Delta p_x^2. \end{aligned}$$

En vertu de ces trois relations, l'équation (24) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \Delta(\Delta\Delta'' - \Delta'\Delta'') a_x^2 - (\Delta\Delta'' - \Delta'^2) \varphi_x^2 \\ & - \left(\frac{1}{6} \Delta\Delta'\Delta''' + \frac{1}{2} \Delta'^2\Delta'' - \frac{2}{3} \Delta\Delta''^2 \right) p_x^2 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation même que nous venons de déduire, par notre méthode, de la théorie des formes binaires biquadratiques.

13. Il nous reste à considérer le cas où *les deux coniques ont entre elles un contact du troisième ordre*. Dans ce cas, la forme binaire a_x^2 devient la quatrième puissance d'une forme linéaire; par conséquent on a la condition binaire $H = 0$, et de là, en vertu de (19), la condition ternaire

$$3\varphi_x^2 - \Delta'a_x^2 = Cp_x^2,$$

C étant une constante. En posant, comme à la fin du n° 11,

$$x_1 = c_2 d_3 - c_3 d_2, \quad x_2 = c_3 d_1 - c_1 d_3, \quad x_3 = c_1 d_2 - c_2 d_1,$$

on trouve

$$2\Delta'\Delta''' - \Delta'\Delta'' = C\Delta'',$$

ou, en appliquant les relations (16), qui sont satisfaites,

$$C = \Delta''.$$

Le cas envisagé se trouve donc caractérisé par la condition

$$(25) \quad 3\varphi_x^2 - \Delta'a_x^2 - \Delta''p_x^2 = 0,$$

jointe aux relations du n° 10, savoir :

$$(26) \quad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\Delta''}{\Delta'''}$$

L'équation (25) ne diffère pas essentiellement des deux conditions que j'ai données dans mon édition des *Leçons de Clebsch*, p. 299 :

$$\Delta'''(pp'u)^2 - 2\Delta''(apu)^2 + \Delta'(abu)^2 = 0,$$

$$\Delta''(pp'u)^2 - 2\Delta'(apu)^2 + \Delta(abu)^2 = 0,$$

dont l'une découle de l'autre à l'aide des relations (26). On pourra

en déduire la condition (25) par un calcul analogue à celui que nous venons d'effectuer au n° 12.

14. Je profite de cette occasion pour corriger une application prématurée qui se trouve dans ma Note antérieure. J'y ai parlé du faisceau de formes binaires

$$(27) \quad ka\xi^2 + l(ab)^2(bc)^2(ca)^2a\xi^2b\xi^2c\xi^2 = 0,$$

auquel correspond le faisceau de cubiques

$$(28) \quad x\alpha_x^3 + \lambda(\alpha\beta\gamma)^2\alpha_x\beta_x\gamma_x = 0.$$

Or la cubique $(\alpha\beta\gamma)^2\alpha_x\beta_x\gamma_x = 0$ ne jouit pas de cette propriété, que toutes ses coniques polaires soient harmoniquement circonscrites à la conique $p_x^2 = 0$; donc les invariants et covariants des courbes du faisceau (28) ne se transforment pas en ceux des formes binaires du faisceau (27) par les mêmes formules que les invariants et covariants de α_x^2 en ceux de $a\xi^2$. Par conséquent, les énoncés qui se rapportent à la forme $j_{\lambda\lambda}$ et aux invariants $S_{\lambda\lambda}$ et $T_{\lambda\lambda}$, et que j'avais donnés antérieurement, ne sont pas exacts. A la page 120 du tome V du *Bulletin*, il faut effacer douze lignes, à partir des mots « Pour chacune » jusqu'à l'équation $T_{\lambda\lambda} = 0$. En outre, page 119, ligne 10, il faut lire *circonscrites* au lieu de *inscrites*.

*Mémoire de Géométrie sur la construction des normales
à plusieurs courbes mécaniques; par M. CHASLES (1).*

I.

1. Nous entendrons par *courbe mécanique* toute courbe décrite par un point pendant le mouvement d'une figure plane dans son plan, soit que le point décrivant soit mobile avec la figure, soit qu'il reste fixe et qu'il imprime à chaque instant sa trace sur le plan mobile.

(1) Ce Mémoire inédit a été présenté à la Société philomathique le 11 août 1829.
(Note de la Rédaction.)

Ces deux manières de considérer la description mécanique des courbes planes sont essentiellement différentes, et donnent lieu aussi à des courbes différentes; mais il existe toujours une certaine position du stylet fixe qui décrit la même courbe que dans le mode accoutumé de description par un point mobile. Ainsi, quand on fait mouvoir un angle pour décrire la cissoïde de Dioclès, à la manière de Newton, un stylet fixe, placé convenablement, trace aussi une cissoïde sur le plan mobile de l'angle.

La première manière de décrire les courbes par un point mobile est la seule qu'on ait considérée jusqu'à ce jour dans les spéculations géométriques. La seconde manière, par la trace d'un stylet fixe, y a été à peine aperçue. Cependant elle est en usage dans l'art du tourneur, et elle donne lieu, dans la théorie, à des descriptions de courbes intéressantes et curieuses, qui pourraient recevoir des applications utiles.

Clairaut est peut-être le seul géomètre qui ait pensé à cet ordre de questions, sur lequel il a donné un court écrit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1740.

Après avoir signalé ce nouveau mode de description des courbes qui, au premier coup d'œil, dit-il, lui avait paru devoir produire les mêmes courbes que le mode de description ordinaire, il se borne à en faire deux applications. Il cherche les équations des courbes formées par la trace d'un stylet fixe sur un plan dont le mouvement est produit par le roulement d'un cercle sur une droite ou sur un autre cercle. Dans le premier cas, il trouve que, pour une certaine position du stylet fixe, on obtient une spirale d'Archimède et non une cycloïde, qui est la courbe décrite par un point du cercle roulant.

Cette matière présente à l'analyse de grandes difficultés : on en peut juger par la complication des calculs de Clairaut; mais des considérations géométriques parviennent à la rendre aussi simple que le mode ordinaire de description des courbes. Ainsi nous verrons sans difficulté que les courbes que Clairaut a exprimées par des équations qui renferment plusieurs intégrations qu'il n'a pas effectuées sont simplement des épicycloïdes produites à la manière ordinaire, par le roulement d'une droite sur un cercle ou d'un cercle sur un autre cercle.

Il ne va être question dans le présent travail que des courbes dé-

crites par un stylet mobile. Dans un second Mémoire, nous traiterons, d'une manière générale, des courbes décrites par un stylet fixe, en indiquant le mécanisme particulier à chaque courbe, comme dans le tour à ovale et à épicycloïde.

2. La méthode que nous allons exposer, pour mener les normales aux courbes mécaniques, s'applique à une infinité de courbes géométriques et autres, pour lesquelles on peut trouver une description mécanique convenable : telles sont l'ellipse, les conchoïdes, la cissoïde de Dioclès, la ligne à longue inflexion, qui dirige le piston d'une machine à vapeur, la courbe qui est le lieu des sommets de tous les angles égaux circonscrits à une courbe donnée, etc. Cette méthode sert aussi pour déterminer les points où une courbe en mouvement touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt, par exemple pour déterminer les points où toutes les cordes égales d'une courbe quelconque touchent leur courbe enveloppe, et enfin pour déterminer les centres de courbure de certaines courbes, telles que la *tractoire*, la *spirale logarithmique*, etc.

Les principes auxquels conduisent les développements de cette méthode peuvent devenir d'un usage utile dans diverses recherches de pure Géométrie, comme nous aurons occasion de le faire voir par divers exemples.

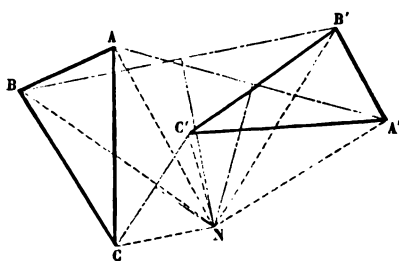
Cette méthode n'exige aucun calcul, et elle est indépendante de la doctrine des mouvements composés, sur laquelle repose la méthode de Roberval; elle a pour base unique une proposition de Géométrie élémentaire, que nous allons d'abord démontrer.

3. LEMME. — *Si l'on a dans un plan deux polygones égaux placés d'une manière quelconque, et qu'on joigne deux à deux par des droites leurs sommets correspondants, les perpendiculaires élevées sur ces droites par leurs milieux passeront toutes par un même point.*

En effet, soient A, B, C (*fig. 1*) trois sommets du premier polygone, et A', B', C' les trois sommets correspondants du second polygone. Menons les droites AA', BB', CC', et, par leurs milieux, élevons-leur des perpendiculaires. Soit N le point de rencontre des deux premières de ces perpendiculaires; il s'agit de prouver que la troisième passera par ce point N.

Le point N est également éloigné des deux points A, A' ; on a donc $NA = NA'$, et pareillement $NB = NB'$. Les côtés $AB, A'B'$ des deux polygones sont égaux; les deux triangles $ANB, A'NB'$

Fig. 1.



sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; donc les deux angles $NAB, NA'B'$ sont égaux. Or les deux angles $BAC, B'A'C'$ des deux polygones sont égaux; on en conclut que l'angle $NAC(= NAB - CAB)$ est égal à l'angle $NA'C'(= NA'B' - C'A'B')$; mais les deux côtés $AC, A'C'$ des polygones sont égaux; donc les deux triangles $NAC, NA'C'$ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; donc leurs côtés NC, NC' sont égaux, ce qui prouve que le point N est sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de CC' .

Ainsi le lemme est démontré ⁽¹⁾.

4. Pour faire l'application du lemme, supposons que les deux polygones soient infiniment voisins l'un de l'autre, de sorte que le second pourra être considéré comme étant précisément le premier polygone qui aurait éprouvé un déplacement infiniment petit; on en conclut cette proposition générale :

Si une figure plane, de forme quelconque, éprouve un déplace-

⁽¹⁾ Si l'on considère le point N comme appartenant au premier polygone, il sera lui-même son point correspondant dans le second polygone. On conclut de là cette proposition :

Quand on a une figure plane, si on la déplace d'une manière quelconque dans son plan, il y aura toujours dans cette figure un point qui, après le déplacement, se retrouvera au même lieu.

Conséquemment tout déplacement d'une figure sur son plan peut se faire par un mouvement de rotation autour d'un point fixe.

ment infiniment petit dans son plan, les normales menées par ses différents points aux directions des lignes infiniment petites parcourues par ces points passeront toutes par un même point.

En d'autres termes :

Si une figure plane est en mouvement dans son plan, les normales menées à un instant quelconque du mouvement par les différents points de la figure, à leurs trajectoires respectives, passeront toutes par un même point.

5. Ce point, considéré comme appartenant à la figure en mouvement, sera évidemment fixe pendant le mouvement infiniment petit de la figure, à l'instant où l'on mène les normales, de sorte que nous pouvons dire que :

Quel que soit le mouvement d'une figure plane dans son plan, il se réduit toujours, à chaque instant, à une rotation autour d'un point qui reste fixe pendant cet instant ⁽¹⁾.

Par exemple, si la figure en mouvement est une courbe qui roule sur une autre courbe fixe, elle éprouvera à chaque instant un mouvement de rotation infiniment petit autour de son point de contact avec la courbe fixe.

6. On pourrait croire que ce mouvement d'une figure, dont le périmètre roule sur une courbe fixe, est un cas particulier du mouvement général d'une figure dans son plan.

(¹) Il est à remarquer que le lemme que nous avons démontré a également lieu pour deux polygones sphériques tracés sur une même sphère, c'est-à-dire que, *quand on a sur une sphère deux polygones sphériques égaux, si l'on joint deux à deux par des arcs de grands cercles leurs sommets correspondants, et si, par les milieux de ces arcs, on mène d'autres arcs de grands cercles qui leur soient perpendiculaires, ces nouveaux arcs passeront tous par un même point.* On en conclut immédiatement que : *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, retenu par un point fixe, est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe mené par ce point, ce qu'on a coutume de démontrer par l'analyse.* Mais il résulte de notre lemme, appliqué aux polygones sphériques, cette proposition plus générale : *Quand un corps solide, retenu par un point fixe, éprouve un déplacement quelconque, il existe toujours dans ce corps une droite passant par le point fixe, qui, après le déplacement, se trouve au même lieu qu'auparavant.* D'où il suit que le déplacement du corps aurait pu se faire par un mouvement de rotation autour de cette droite.

Mais nous verrons que *tout mouvement d'une courbe plane dans son plan, de quelque nature et de quelque durée qu'il soit, n'est autre que le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe* (56).

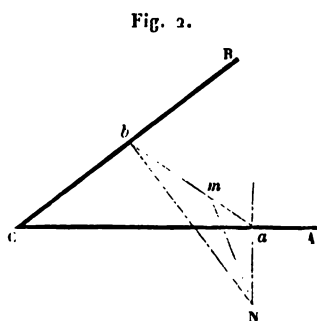
II.

7. Du théorème (3), on conclut sur-le-champ ce premier principe général sur la construction des normales aux courbes planes :

PREMIER PRINCIPE. — *Quand une courbe est décrite par un point d'une figure plane en mouvement dans son plan, il suffit, pour mener les normales à cette courbe, de connaître le mouvement de deux points de la figure.*

On mènera par ces points les normales aux courbes qu'ils décrivent et l'on joindra par une droite le point de concours de ces normales au point décrivant : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

8. Soit, par exemple, une droite de longueur donnée, dont les extrémités a, b (fig. 2) glissent sur les côtés d'un angle fixe; on



sait que chaque point m de la droite engendre une ellipse (¹). Pour

(¹) Cette propriété de l'ellipse a donné lieu à l'instrument appelé *compas elliptique*, qui sert à décrire cette courbe d'un mouvement continu; Stévin, dans son Livre I^{er} de la *Géométrie* (*Description des grandeurs*), l'attribue au marquis Guido Ubaldi.

avoir la normale à cette ellipse, il suffit de mener par les extrémités a, b de la droite mobile les perpendiculaires aux côtés de l'angle que ces extrémités parcourent; la droite qui joint le point de rencontre N de ces deux perpendiculaires au point décrivant m est la normale à l'ellipse.

9. Si l'angle dans lequel se meut la droite ab est droit, et si le point décrivant m de cette droite est son milieu, la courbe engendrée sera un cercle; car la droite Nm , qui est la normale à cette courbe, passera constamment par le sommet C de l'angle droit, ce qui prouve que cette courbe est un cercle. Donc :

Toutes les cordes d'égale longueur qu'on peut inscrire dans un angle droit ont leurs milieux sur une circonférence de cercle ⁽¹⁾.

10. Si les deux extrémités de la droite mobile ab , au lieu de glisser sur deux droites fixes, parcourent deux courbes de forme quelconque, il faudra mener les normales à ces deux courbes et joindre par une droite leur point de concours au point décrivant de la droite mobile; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

11. M. Hachette, dans son *Histoire des machines à vapeur*, applique cette construction à la ligne qu'il a nommée *courbe à longue inflexion*, dont on fait usage en Mécanique pour régler le mouvement des pistons.

Cette courbe est décrite par un point d'un côté d'un quadrilatère

(¹) Puisque le point milieu de la droite ab , qui se meut dans un angle droit, engendre un cercle, pendant qu'un autre point quelconque de cette droite engendre une ellipse, on en conclut que :

Si une droite égale au rayon d'un cercle se meut de manière que ses deux extrémités parcourent respectivement la circonférence du cercle et un diamètre fixe, chaque point de la droite engendrera une ellipse dont la demi-somme des diamètres principaux sera égale au rayon du cercle.

Cette description mécanique de l'ellipse a été démontrée par plusieurs géomètres; elle est due, je crois, à Stone, qui l'a donnée dans son *Dictionnaire de Mathématiques*.

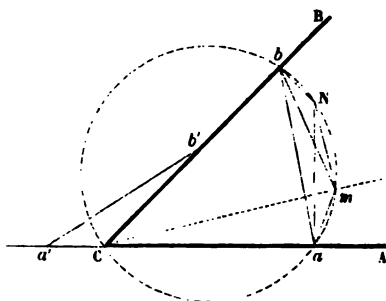
qu'on déforme, en faisant pivoter les deux côtés contigus autour des sommets du quadrilatère opposés au premier côté.

Pour mener la normale à cette courbe, il suffit de prolonger les deux côtés qui pivotent jusqu'à leur point de rencontre, et de joindre ce point par une droite au point décrivant : cette droite est la normale ; car le côté du quadrilatère sur lequel est le point décrivant a constamment ses deux extrémités sur deux circonférences de cercles, dont les deux autres côtés mobiles sont les rayons ; ces deux côtés sont donc les normales à ces circonférences, ce qui justifie la construction.

12. Au lieu de prendre pour point décrivant dans les deux exemples ci-dessus un point de la droite mobile, on peut prendre un point en dehors de cette droite, ce qui se réduit à considérer cette droite comme la base d'un triangle mobile dont le sommet est le point décrivant. La normale en un point de la courbe décrite par ce sommet passera encore par le point de concours des normales aux deux lignes parcourues par les deux autres sommets du triangle.

Ainsi, soit (*fig. 3*) le triangle *mab*, dont les deux sommets *a*, *b*

Fig. 3.



glissent sur les deux droites CA, CB ; le troisième sommet *m* engendrera une courbe dont la normale passera par le point de rencontre *N* des perpendiculaires aux deux droites CA, CB, menées par les points *a*, *b*.

13. Supposons que le sommet *m* soit sur la circonférence du cercle qu'on peut faire passer par les trois points *a*, *b*, *c*. Cette

circonférence, pendant le mouvement de la figure, passera toujours par le point C, parce qu'on ne peut décrire sur la droite ab qu'un segment capable de l'angle C.

Le point N est sur la même circonférence, puisque l'angle aNb est supplément de l'angle C; donc l'angle bNm est de grandeur constante, comme ayant pour mesure la moitié de l'arc bm ; mais son côté bN est toujours perpendiculaire à CB; son second côté Nm est donc constamment parallèle à une même droite. Ainsi toutes les normales à la courbe parcourue par le point m sont parallèles entre elles, ce qui prouve que cette ligne est droite.

Il est visible que cette droite passe par le point d'intersection des deux axes CA, CB; car, si l'on prend $Ca' = am$ et $Cb' = bm$, le triangle $Ca'b'$ représentera une position du triangle mobile abm , dans laquelle son sommet m sera en C. On a donc ce théorème :

Quand un plan glisse sur lui-même, de manière que deux de ses points parcourent deux axes fixes, il existe une infinité de points de ce plan qui parcourent aussi des droites, lesquelles passent toutes par le point d'intersection de ces deux axes; tous ces points sont sur une circonférence de cercle.

14. D'après cela, il est clair que tous les autres points du plan décrivent des ellipses; car, si, par un de ces points, on mène une transversale qui rencontre ce cercle en deux points, ces deux points décriront deux droites, ainsi que nous venons de le démontrer; donc chaque point de cette transversale décrira une ellipse, comme nous l'avons déjà dit (8).

Ainsi tous les points du plan en mouvement, autres que ceux de la circonférence en question, décriront des ellipses.

Ajoutons que les normales à ces ellipses, menées à un instant quelconque du mouvement, passeront toutes par un même point (4).

III.

15. Nous avons supposé jusqu'à présent que le mouvement d'une figure dans son plan était déterminé par le mouvement de deux de ses points, et nous avons mené la normale à la courbe décrite par un autre quelconque de ses points; mais le mouvement

de la figure peut être déterminé par diverses autres conditions. Par exemple, son périmètre peut être assujéti à toucher constamment une ou deux courbes données, ou bien à passer par un ou deux points fixes.

Nous allons examiner ces différents cas, et mener les normales aux courbes décrites par les points de la figure en mouvement.

Cela donnera lieu naturellement à une question inverse, qui est celle-ci :

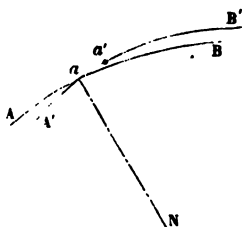
Quand une courbe de forme constante est en mouvement dans son plan, déterminer la courbe à laquelle elle est perpétuellement tangente, c'est-à-dire la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.

La solution de cette question et la construction des normales reposent sur le principe suivant :

16. DEUXIÈME PRINCIPE. — *Quand une figure, de forme quelconque, est en mouvement dans son plan, les normales aux points où son périmètre touche, à un instant quelconque du mouvement, la courbe enveloppe de l'espace qu'il parcourt, passent toutes par un même point; ce point est celui par lequel passent les normales aux trajectoires des différents points de la figure.*

En effet, pour déterminer les points où une courbe mobile AB (fig. 4) touche, dans une de ses positions, la courbe enveloppe de

Fig. 4.



l'espace qu'elle parcourt, il faut, comme l'on sait, considérer aussi cette courbe dans sa position infiniment voisine A'B'; les points cherchés sont les points d'intersection a de ces deux courbes infiniment voisines AB, A'B'.

Or la courbe AB , pendant son mouvement pour prendre la position $A'B'$, a tourné, comme nous l'avons démontré (3), autour d'un certain point N , par où passent les normales aux trajectoires de ses différents points. Si donc on abaisse du point N une normale sur cette courbe, son pied a parcourra pendant le mouvement infiniment petit autour du point N l'arc aa' de cette courbe, et le point a' , où viendra se placer le point a , appartiendra à la seconde position $A'B'$ de la courbe; ce point a' sera donc l'intersection des deux courbes infiniment voisines AB , $A'B'$. Il est donc prouvé que les normales à la courbe AB aux points d'intersection de cette courbe par sa position infiniment voisine, c'est-à-dire les normales aux points où cette courbe touche l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt, passent toutes par un même point N , qui est le point par lequel passent les normales aux trajectoires des différents points de la figure en mouvement. Ainsi le théorème est démontré.

17. Ce théorème va nous servir pour résoudre trois questions :

PREMIÈRE QUESTION. — *Connaissant le mouvement d'une figure plane dans son plan, déterminer les points où son périmètre touche, dans chacune de ses positions, la courbe enveloppe de l'espace qu'il parcourt.*

On mènera les normales aux courbes décrites par deux points de la figure, et, par le point de concours de ces deux droites, on abaissera les normales sur le périmètre de la figure; leurs pieds seront les points cherchés, où ce périmètre touche sa courbe enveloppe; ce qui résulte évidemment du deuxième principe (16).

18. Soit, par exemple, une droite ab de longueur donnée, dont les extrémités a , b glissent sur deux droites fixes; pour déterminer le point où cette droite touche, dans chacune de ses positions, sa courbe enveloppe, on mènera par ses extrémités les perpendiculaires aux deux droites qu'elles parcourent, et de leur point de concours on abaissera la perpendiculaire sur la droite mobile; son pied sera le point de la courbe enveloppe.

19. Si la droite mobile glisse sur deux courbes quelconques, il faudra mener par ses extrémités les normales à ces deux courbes,

et abaisser de leur point de rencontre une perpendiculaire sur la droite : le pied de cette perpendiculaire sera le point où la droite touche sa courbe enveloppe.

20. Si les deux courbes sur lesquelles glissent les extrémités de la droite mobile se confondent, on en conclut que :

Si l'on inscrit dans une courbe toutes ses cordes égales à une ligne donnée, pour déterminer le point où chacune d'elles touche la courbe qu'elles enveloppent, il faut mener les normales à la courbe proposée par les extrémités de la corde, et du point d'intersection de ces deux normales abaisser une perpendiculaire sur cette corde : le pied de cette perpendiculaire sera le point cherché.

D'après cette construction, on voit facilement que chaque corde touche la courbe enveloppe en un point qui divise cette corde en segments proportionnels aux tangentes trigonométriques des angles qu'elle fait avec les deux tangentes à la courbe proposée, en ses extrémités.

21. DEUXIÈME QUESTION. — *Quand une figure se meut dans son plan, de manière que son périmètre touche constamment deux courbes données, déterminer les normales à la courbe décrite par un point de cette figure.*

On mènera les normales aux deux courbes fixes, par les points où le périmètre de la figure mobile les touche, et l'on joindra par une droite le point de concours de ces normales au point décrivant : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

22. Soit un angle de grandeur constante, qui se meut de manière que ses deux côtés touchent constamment deux courbes données ; pour avoir la normale à la courbe décrite par le sommet de cet angle, on mènera les perpendiculaires aux deux côtés de l'angle par les points où ils touchent respectivement les deux courbes, et l'on joindra par une droite le point de concours de ces deux perpendiculaires au sommet de l'angle : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce sommet.

On voit facilement que cette droite est le diamètre du cercle qui

passé par le sommet de l'angle et par les deux points où ses côtés touchent les deux courbes fixes.

23. Si l'angle mobile est droit, les perpendiculaires à ses côtés, menées par les points où ils touchent les deux courbes fixes, forment avec ses côtés un rectangle dont la diagonale qui aboutit au sommet de l'angle mobile est la normale à la courbe décrite par ce sommet; cette normale passe par le milieu de la seconde diagonale; donc :

Quand un angle droit se meut de manière que ses côtés touchent respectivement deux courbes données, la normale à la courbe décrite par son sommet passe par le milieu de la droite qui joint les points où ses côtés touchent les deux courbes.

24. Les deux courbes peuvent se confondre; alors on considère un angle dont les côtés glissent sur une même courbe.

Soit, par exemple, un angle droit mobile dont les côtés sont constamment tangents à une ellipse, ou à une hyperbole; la normale à la courbe décrite par le sommet de cet angle passera par le milieu de la corde qui joint les points où ses deux côtés touchent la conique; cette normale passe donc par le centre de la conique; ce qui prouve que la courbe décrite par le sommet de l'angle est un cercle; donc :

Tous les angles droits circonscrits à une ellipse, ou à une hyperbole, ont leurs sommets sur un cercle concentrique à cette courbe.

25. Si la conique est une parabole, la droite qui joindra les sommets de l'angle au milieu de la corde de contact de ses côtés sera parallèle à l'axe de la parabole; ainsi la ligne engendrée par le sommet de l'angle a toutes ses normales parallèles à l'axe de la parabole; donc :

Tous les angles droits circonscrits à une parabole ont leurs sommets sur une droite perpendiculaire à son axe.

Ces théorèmes si connus deviennent, comme on voit, d'une évidence remarquable, en vertu des principes dont nous faisons usage. On peut les étendre particulièrement à deux coniques homofocales. Nous en donnerons quelques exemples (Chapitre VIII, 64).



de l'ellipse, on mènera par son foyer F la perpendiculaire à la droite CA , et, par le point m où l'ellipse touche la droite CB , la perpendiculaire à cette droite; ces deux perpendiculaires se couperont en un point N , par où passera la normale à la courbe décrite par un point quelconque du plan de l'ellipse.

Prenons pour ce point décrivant le centre C de l'ellipse; NC sera la normale à la courbe décrite par ce point. Il est facile de voir que cette normale passe constamment par le point de concours des deux axes fixes DA , DB . Car la droite $F'm$, menée du second foyer de la courbe, rencontre DA en E , et l'on a $DE = DF$; mais on a $CF' = CF$; par conséquent la droite CD est parallèle à $F'm$, et passe par le milieu de la droite Fm ; ce qui prouve que cette droite CD est la diagonale du rectangle $FDmN$, et, conséquemment, passe par le point N ; elle est donc la normale à la courbe décrite par le point C ; on conclut de là que ce point C décrit un cercle dont le centre est en D . En plaçant l'ellipse de manière que les deux foyers soient sur la droite CA , on voit que le rayon du cercle est égal à son demi-grand axe; donc :

Si une ellipse se meut, en touchant constamment un côté d'un angle droit, et de manière qu'un de ses foyers parcoure l'autre côté de cet angle, son centre décrira un cercle, qui aura pour centre le sommet de l'angle et pour rayon le demi-grand axe de l'ellipse.

On parviendra au même résultat en prenant une hyperbole, au lieu d'une ellipse.

28. Les questions précédentes conduisent à la solution de plusieurs autres du genre de celle-ci :

Si un angle de grandeur constante se meut de manière que les segments interceptés sur ses côtés par deux courbes fixes, respectivement, soient de grandeur constante, on demande de déterminer la normale à la courbe décrite par le sommet de l'angle.

Par les deux extrémités du segment intercepté sur le premier côté de l'angle par la première courbe, on mènera les normales à cette courbe; elles se couperont en un point d'où l'on abaissera une perpendiculaire sur le premier côté de l'angle.

On fera de même à l'égard du second côté, c'est-à-dire que, par les extrémités de sa partie comprise dans la seconde courbe, on mènera les deux normales à cette courbe, et de leur point de concours on abaissera une perpendiculaire sur ce second côté de l'angle.

Les deux perpendiculaires abaissées sur les côtés de l'angle se couperont en un point qu'on joindra au sommet de l'angle par une droite : ce sera la normale à la courbe décrite par ce sommet.

En effet, les deux perpendiculaires aux côtés de l'angle sont les normales aux deux courbes que ces côtés enveloppent (20) ; la droite qui joint leur point de concours au sommet de l'angle est donc la normale à la courbe décrite par ce sommet (22).

Les segments interceptés par les deux côtés de l'angle pourraient être infiniment petits ; alors ces côtés seraient tangents aux deux courbes fixes. Ainsi la question du n° 22 n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons de résoudre.

IV.

29. Concevons une figure se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre passe toujours par un point fixe ; ce point pourra être regardé comme une branche infiniment petite de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par ce périmètre ; le théorème (16) nous donne donc ce troisième principe :

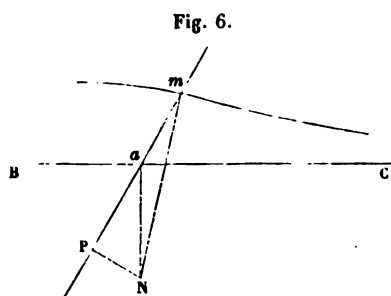
TROISIÈME PRINCIPE. — Quand une figure de forme constante se meut dans son plan, de manière que son périmètre passe constamment par un point fixe, les normales aux trajectoires des différents points de la figure, et les normales aux points où son périmètre touche sa courbe enveloppe passent toutes par un même point situé sur la normale au périmètre, en son point coïncidant avec le point fixe.

Ce principe est susceptible de nombreuses applications, soit pour mener les normales, soit pour déterminer les points où une figure en mouvement touche sa courbe enveloppe.

30. Soit d'abord la *conchoïde* de Nicomède, qui est engendrée

par un point m (*fig. 6*) d'une droite indéfinie qui glisse sur un point fixe P pendant qu'un de ses points a parcourt une droite fixe BC .

D'après le principe énoncé, il faut, pour déterminer la normale au point m de cette courbe, mener par le point a la perpendiculaire



à la droite BC que parcourt ce point, et par le point P la perpendiculaire à la droite mobile Pm ; ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point N , qu'on joint par une droite au point m ; cette droite est la normale à la conchoïde ⁽¹⁾.

31. La construction serait la même si la base BC de la conchoïde était une courbe de forme quelconque, au lieu d'être une ligne droite.

Dans ce cas, la droite aN serait la normale à cette courbe.

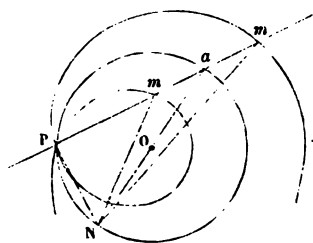
Par exemple, si l'on prend la conchoïde à base circulaire appelée le *limaçon* de Pascal (*fig. 7*), qui a pour pôle un point P de la circonférence du cercle qui lui sert de base, il faudra, pour avoir la normale au point m , mener la perpendiculaire PN à la droite mobile Pm , et le rayon Oa jusqu'à la rencontre de cette perpendiculaire en N ; la normale à la conchoïde sera Nm .

Cette conchoïde a, comme on sait, fixé l'attention de Pascal, Roberval, de la Hire, Carré, Maclaurin, et dernièrement M. Quetelet a résolu plusieurs problèmes intéressants au sujet de cette courbe

⁽¹⁾ Les constructions de la normale à la conchoïde données par Descartes comme application de ses méthodes analytiques, et par Roberval comme application de sa méthode des mouvements composés, différent de celle-ci; mais il est très-facile de voir comment elles se peuvent déduire l'une de l'autre.

(*Mémoire sur les caustiques*, inséré dans le tome III des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, année 1826).

Fig. 7.



32. De la Hire, dans son *Traité des conchoïdes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1708), a généralisé leur définition. Il suppose qu'un angle de grandeur donnée se meuve dans son plan (*fig. 8*), de manière qu'un de ses côtés tourne en glissant sur un point fixe, pendant que son sommet parcourt une ligne quelconque; chaque point du second côté de l'angle décrit alors une *conchoïde*.

Il suit du principe (29) que, pour construire la normale à cette courbe, il faut mener par le point fixe la perpendiculaire au côté de l'angle qui glisse sur ce point, et, par le sommet de l'angle, la normale à la courbe qu'il parcourt; ces deux droites se coupent en un point N, et la droite menée de ce point au point décrivant est la normale à la conchoïde.

Cette construction est aussi celle que de la Hire a trouvée par des considérations géométriques ⁽¹⁾, et que de la Condamine a démontrée par l'analyse (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1734).

33. Mais cette manière plus générale d'envisager les conchoïdes

(¹) De la Hire donne, dans son *Mémoire sur les conchoïdes* :

- 1° La construction des normales;
- 2° La quadrature de l'espace compris entre la conchoïde et sa base;
- 3° La rectification des conchoïdes;
- 4° La construction de leurs points de rebroussement.

Ce *Mémoire* offre une des belles applications des infiniment petits dans la Géométrie pure.

(*Arithmétique universelle*, problème 34 des *Questions géométriques*).

Pour déterminer la normale à cette courbe, on mènera par le point fixe P la perpendiculaire au côté PD, par le point *a* la perpendiculaire à la droite BC; ces deux droites se rencontreront en N; la droite Nm sera la normale à la cissoïde, ce qui résulte du principe (29).

Ajoutons que, si l'on veut la normale à la courbe décrite par le sommet D de l'angle mobile, cette normale sera ND. En outre, si l'on veut déterminer le point où le côté Da de l'angle touche sa courbe enveloppe, ce point sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point N sur ce côté.

35. Il est un genre de courbes dont la description est plus générale que celle des conchoïdes de de la Hire, et dont s'est occupé de la Condamine dans ses Mémoires sur le tour (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1734), mais auxquelles il n'a point mené les normales.

Il suppose qu'une droite, à laquelle est fixée invariablement une courbe plane, glisse sur un point fixe, pendant qu'un point de la courbe parcourt une ligne donnée, ou bien pendant que cette courbe est constamment tangente à cette ligne, et il cherche analytiquement les propriétés de la courbe décrite par un point de cette figure en mouvement.

Ces questions rentrent dans les deux suivantes, qui sont plus générales :

36. *Une figure de forme quelconque se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre passe toujours par un point fixe, et qu'un de ses points parcourt une ligne donnée, déterminer les normales à la courbe décrite par un point quelconque de cette figure.*

On mènera par le point fixe la normale au périmètre de la figure en mouvement, et par le point dont le mouvement est connu la normale à la courbe que parcourt ce point; ces deux droites se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au point décrivant; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

37. *Une figure se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre glisse sur un point fixe et sur une courbe donnée, mener la normale à la courbe décrite par un point de cette figure.*

On mènera les deux normales au périmètre de la figure par le point fixe et par le point où il touche la courbe sur laquelle il roule, ces deux normales se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au point décrivant; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point, ce qui résulte évidemment du principe (29).

38. *D'un point fixe on abaisse sur les tangentes d'une courbe quelconque des obliques sous un angle de grandeur constante (dans un même sens de rotation) : les pieds de ces obliques forment une courbe à laquelle on demande de mener une normale.*

Par le point où une tangente touche la courbe proposée, on mènera la normale à cette courbe, et par le point fixe on mènera la perpendiculaire à l'oblique correspondant à cette tangente; ces deux droites se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au pied de l'oblique : cette droite sera la normale en ce point à la courbe qui sera le lieu des pieds des obliques.

En effet, cette courbe peut être considérée comme engendrée par le sommet d'un angle de grandeur constante dont un côté glisse sur un point fixe pendant que l'autre côté est constamment tangent à la courbe proposée.

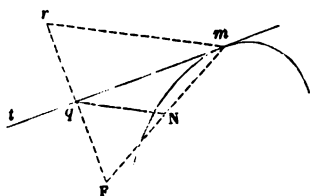
D'après cela, la construction que nous venons de donner résulte sans difficulté du principe (29).

39. Si l'angle mobile est droit, la normale passe évidemment, d'après cette construction, par le milieu de la droite menée du point fixe au point de contact du second côté de l'angle avec la courbe donnée; ce qui résulte aussi du n° 23, le point fixe étant regardé comme une courbe infiniment petite; donc :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe quelconque forment une seconde courbe dont les normales passent respectivement par les milieux des droites menées du point fixe au point de contact des tangentes avec la courbe proposée.

Ainsi : si d'un point F (fig. 10) on abaisse une perpendiculaire Fq sur chaque tangente mt d'une courbe donnée, la normale au point q de la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires passera par le milieu N de la droite Fm .

Fig. 10.



40. Si l'on prolonge Fq en r d'une longueur $qr = Fq$, et qu'on mène rm , le point r aura pour lieu géométrique une courbe semblable à la courbe formée par les points q , et semblablement placée par rapport à leur centre de similitude F ; les normales à ces courbes aux deux points homologues q, r seront donc parallèles; de sorte que la normale à la seconde courbe est la droite rm ; car, les points q et N étant les milieux des deux droites Fr, Fm , les deux droites qN, rm sont parallèles. Les angles rmq, qmF sont égaux; mr est donc le prolongement du rayon de lumière qui, émané du point F , se serait réfléchi en m sur la courbe proposée. La ligne mr est évidemment égale à Fm ; on en conclut donc que :

Si des rayons émanés d'un point lumineux se réfléchissent sur une courbe, et qu'on prenne sur les prolongements des rayons réfléchis, à partir des points d'incidence, des lignes égales aux rayons incidents, leurs extrémités formeront une courbe qui sera une trajectoire orthogonale des rayons réfléchis.

Cela est un cas particulier des théorèmes de M. Quetelet sur les *caustiques secondaires*.

41. Quand la courbe, sur les tangentes de laquelle on abaisse, d'un point fixe, des perpendiculaires, est une ellipse ou une hyperbole, le lieu géométrique de leurs pieds est, ainsi que l'a fait voir Maclaurin (*Géométrie organique*), une courbe du quatrième degré; pour une parabole, c'est une courbe du troisième degré; et

cette courbe est précisément la cissoïde de Dioclès quand le point d'où l'on abaisse les perpendiculaires est le sommet de la parabole. Pour un cercle, la courbe en question, toujours du quatrième degré, est une ovale de Descartes, dans laquelle deux foyers se confondent (1); et si le point d'où l'on abaisse les perpendiculaires est sur la circonférence du cercle, cette courbe devient le limaçon de Pascal. Ces courbes des troisième et quatrième degrés, produites dans les sections coniques, jouissent de plusieurs propriétés remarquables, que M. Dandelin a déduites de la théorie des projections stéréographiques, dans un Mémoire inséré dans le tome IV des *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles*, 1827.

42. Ajoutons que ces courbes, et généralement la courbe formée par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un même point sur les tangentes d'une courbe quelconque, sont des *épicycloïdes* dont chacune est engendrée par un point du plan d'une courbe qui roule sur une courbe fixe qui lui est égale, de manière que les deux courbes se touchent toujours dans leurs points correspondants : ce qui a été démontré par le marquis de L'Hôpital, Maclaurin et Clairaut.

Il suit de là, et de la remarque que nous avons faite au sujet des caustiques secondaires (40), que *toute caustique secondaire par réflexion est une épicycloïde*; ce qui a déjà été démontré par M. Quetelet, dans sa *Nouvelle théorie des caustiques*.

43. Nous avons vu que, si une courbe plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ce mouvement n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'un certain point fixe (5), et que, pour avoir les points où le périmètre de cette figure, considérée dans sa nouvelle position, coupe sa trace primitive, il faut abaisser de ce point des normales sur ce périmètre (16). On conclut de là et de ce que nous venons de dire (42) que :

Si une courbe plane à laquelle sont menées toutes ses tangentes

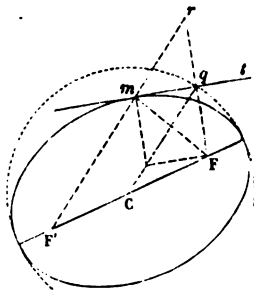
(1) Nous démontrerons ailleurs que les fameuses ovales de Descartes, dans lesquelles on n'a jamais considéré que deux foyers, jouissent de la propriété singulière d'en avoir trois, qui sont conjugués deux à deux.

éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ces tangentes, dans leurs nouvelles positions, couperont respectivement leurs positions respectives en des points dont le lieu géométrique sera une épicycloïde.

Si, au lieu des tangentes à une courbe, on conçoit une infinité de droites passant toutes par un même point, l'épicycloïde se réduira à un cercle, qui sera le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur ces droites du point autour duquel la figure aura tourné pendant son mouvement infiniment petit.

44. Soit une conique, du foyer de laquelle on abaisse des perpendiculaires Fq sur ses tangentes mt (fig. 11); la normale en q à

Fig. 11.



la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires passera par le milieu du rayon vecteur Fm (39); si donc on prolonge la perpendiculaire Fq jusqu'à r , de sorte que $qr = Fq$, cette normale se trouvera parallèle à la ligne mr ; mais cette droite mr passe par le second foyer de la conique, ce qui prouve que la normale passe par le point milieu des deux foyers, c'est-à-dire par le centre de la courbe; d'où l'on conclut que le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires est un cercle décrit du centre de la courbe; donc :

Les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une conique sur ses tangentes sont sur un cercle concentrique à la conique (1).

(1) La normale du point m et la perpendiculaire en F à la droite Fq se coupent sur la droite Cq , puisque cette droite passe par le milieu de la droite Fm .

Si la conique est une parabole, on voit facilement, par ce mode de démonstration, que ce cercle devient une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole, parce que toutes ces normales sont parallèles à cet axe.

45. Il suit de ces théorèmes que :

Si un cercle éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, les tangentes aux trajectoires de ses différents points envelopperont une ellipse ou une hyperbole.

Si une droite éprouve un mouvement infiniment petit dans un plan, les tangentes aux trajectoires de ses points envelopperont une parabole.

V.

46. Nous avons déjà supposé (29) que, dans le théorème (16), l'une des deux courbes sur lesquelles glisse le périmètre de la figure en mouvement se réduit à un point. Supposons maintenant que la seconde courbe se réduise aussi à un point; nous aurons ce quatrième principe :

QUATRIÈME PRINCIPE. — *Quand une courbe de forme constante se meut dans son plan en passant toujours par deux points fixes, chaque point de la courbe décrit une trajectoire dont la normale passe par le point d'intersection des normales menées par les deux points fixes à la courbe en mouvement.*

Les pieds des autres normales abaissées de ce point d'intersection sur la courbe sont les points où elle touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.

47. Soit, par exemple, un triangle qui se meut dans son plan, de manière que deux de ses côtés passent toujours par deux points fixes : un point du troisième côté engendrera une courbe, dont la normale passera par le point d'intersection des perpendiculaires aux deux premiers côtés menés respectivement par les deux points fixes; et le point où le troisième côté touchera sa courbe enveloppe sera le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point d'intersection sur ce troisième côté.

VI.

48. Nous avons vu que, si deux points a, b d'une courbe en mouvement dans son plan glissent sur une courbe fixe, la normale à la trajectoire d'un point quelconque de la première courbe passe par le point de rencontre des normales à la courbe fixe, menées par les deux points a, b (7); et les normales abaissées de ce point de concours sur la courbe mobile y déterminent par leurs pieds les points où elle touche sa courbe enveloppe (16).

Si les deux points a, b sont infiniment voisins, auquel cas la courbe mobile touchera constamment la courbe fixe en l'un de ces points, les deux normales à cette courbe fixe se couperont au centre de son cercle osculateur en ce point; on a donc ce cinquième principe :

CINQUIÈME PRINCIPE. — *Si une courbe de forme quelconque glisse sur une autre courbe fixe, de manière que leur contact ait toujours lieu en un même point de la ligne mobile, la normale à la courbe décrite par un point quelconque de cette courbe mobile passe par le centre de courbure de la courbe fixe au point de contact des deux courbes; et les pieds des normales abaissées de ce centre de courbure sur la courbe mobile sont les points où elle touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.*

49. Donc, si l'on connaît le mouvement d'un point de la courbe mobile, il servira à déterminer les centres de courbure de la courbe sur laquelle elle glisse.

Et réciproquement, si le centre de courbure de cette courbe est connu, il servira à déterminer les normales aux courbes décrites par les points de la courbe mobile, et à déterminer les points où cette courbe mobile touche sa courbe enveloppe.

50. Soit la *tractoire*, dont la propriété caractéristique est que toutes ses tangentes, comprises entre leurs points de contact et un axe fixe, sont égales.

Il suffit, pour avoir le centre de courbure de cette courbe, d'élever une perpendiculaire à cet axe par le point où une tangente le

rencontre; cette perpendiculaire rencontre la normale à la tractoire, menée par le point de contact de cette tangente, en un point qui est le centre de courbure en ce point de contact.

51. Soit la *spirale logarithmique*, dont toutes les tangentes sont également inclinées sur les rayons vecteurs : on peut la considérer comme l'enveloppe d'un côté d'un angle mobile dont l'autre côté passe constamment par un point fixe, et qui se meut de manière que le premier côté touche toujours sa courbe enveloppe au sommet de l'angle. Il faut donc, pour avoir le centre de courbure, en un point m de cette spirale, mener par le point fixe la perpendiculaire au rayon vecteur qui passe par un point m : cette perpendiculaire rencontrera la normale à la courbe, en un point qui sera le centre de courbure.

52. On peut concevoir le mouvement d'un angle tel, que, l'un de ses côtés passant toujours par un point fixe, son second côté touche son enveloppe constamment au même point de ce côté, autre que son sommet. Cette enveloppe sera une courbe dont la spirale logarithmique n'est qu'un cas particulier. Pour avoir le centre de courbure de cette courbe, il faut mener par le point fixe la perpendiculaire au premier côté de l'angle, et par le point décrivant la perpendiculaire au second côté; l'intersection de ces deux droites sera le centre de courbure cherché.

53. On peut encore concevoir le mouvement de l'angle, de manière que son premier côté soit toujours tangent à une courbe donnée, au lieu de passer par un point fixe, et que son second côté touche toujours sa courbe enveloppe au sommet de l'angle : pour avoir le centre de courbure de cette courbe enveloppe, il faudra mener par le point de contact du premier côté de l'angle et de la courbe proposée la normale; elle rencontrera la normale à la courbe décrite par le sommet de l'angle en un point qui sera le centre de courbure de cette courbe.

54. Supposons que, par les différents points d'une courbe, on mène des droites faisant toutes des angles égaux avec les tangentes à la courbe en ces points respectivement; ces droites envelopperont

une courbe qu'elles toucheront en des points faciles à construire; car il suffit de considérer chaque droite et la tangente correspondante comme les côtés d'un angle de grandeur constante, qui se meut, de manière que son premier côté touche constamment la courbe proposée en son sommet; il faut donc, pour avoir le point où son second côté touche sa courbe enveloppe, abaisser du centre de courbure de la courbe proposée une perpendiculaire sur ce second côté; son pied est le point de la courbe enveloppe de ce côté.

Cette courbe est, comme l'on sait, une des *développoïdes* de Réaumur (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1709).

55. Remarquons que, si sur toutes les droites menées par les points de la courbe proposée, on porte, à partir de ces points, des lignes égales entre elles, leurs extrémités formeront une courbe dont les normales passeront, comme les normales de la développée, par les centres de courbure de la courbe proposée, ce qui résulte du cinquième principe (48).

On peut donc former une infinité de courbes dont les normales passent par les centres de courbure d'une courbe proposée, ce qui offre une solution graphique, susceptible d'une grande précision, de la question suivante :

Trouver les centres de courbure d'une courbe quelconque dont on connaît les tangentes.

VII.

56. Nous avons dit (6) que le mouvement d'une figure quelconque dans son plan n'est autre que le mouvement produit par le roulement d'une courbe sur une autre courbe fixe.

En effet, la figure en mouvement tourne à chaque instant autour d'un point qui est fixe pendant cet instant infiniment petit (5). Soient N , N' , N'' , ... les points autour desquels tourne successivement la figure; ces points, étant considérés comme appartenant au plan fixe sur lequel se meut la figure, forment une courbe immobile.

Soit N celui de ces points autour duquel tourne la figure à l'instant où on la considère; prenons sur le plan de cette figure ses différents points v' , v'' , ..., qui, pendant le mouvement, viendront

successivement se confondre avec les points $N', N'', \dots$ supposés fixes, comme appartenant au plan fixe sur lequel se meut la figure. Les points $v', v'', v''', \dots$ forment une courbe qui fait partie de la figure et qui est mobile avec elle. Cette courbe passe par le point N autour duquel tourne la figure au moment où on la considère.

Après un mouvement infiniment petit autour du point N , le point v' s'appliquera sur le point N' ; après un mouvement infiniment petit autour de ce point N' , le point v'' s'appliquera sur le point N'' , et ainsi de suite. Les éléments $Nv', v'v'', v''v''', \dots$ de la courbe mobile $Nv'v'' \dots$ viennent donc successivement s'appliquer sur les éléments $NN', N'N'', N''N''', \dots$ de la courbe fixe $NN'N'' \dots$, ce qui prouve que la courbe $v'v'v'' \dots$ roule sur la courbe $NN'N'' \dots$.
Donc :

De quelque nature et de quelque durée que soit le mouvement d'une figure dans son plan, ce mouvement n'est autre que celui que produirait le roulement d'une certaine courbe mobile sur une autre courbe fixe.

57. Il suit de là que :

Toute courbe décrite par un point d'une figure plane en mouvement dans son plan est une épicycloïde ⁽¹⁾.

58. Pour faire une application de ces principes, considérons la mouvement d'une droite ab (fig. 12) de longueur donnée, dont les extrémités a, b glissent sur deux axes fixes CA, CB . Cette droite tourne pendant un instant infiniment petit autour du point d'intersection N des perpendiculaires à ces deux axes, menées par les points a, b . Ce point N se trouve évidemment sur la circonférence

(1) Nous avons vu (5, note) que, quand un corps solide retenu par un point fixe est en mouvement, il tourne à chaque instant autour d'un axe fixe; on en conclut, comme nous venons de faire pour le mouvement d'une figure plane, que :

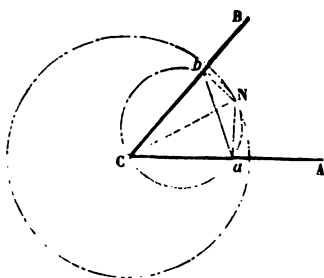
Quel que soit le mouvement d'un corps solide retenu par un point fixe, il n'est autre que celui que produirait le roulement d'une certaine surface conique, ayant ce point pour sommet, sur une autre surface conique fixe ayant même sommet.

Donc :

Quel que soit le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, chacun de ses points décrit une épicycloïde sphérique.

de cercle menée par les trois points C , a , b , et CN est le diamètre de ce cercle. La corde ab de ce cercle sous-tend un segment capable de l'angle aCb ; cette corde est de grandeur constante quelle

Fig. 12.



que soit sa position; le diamètre CN du cercle est donc aussi de grandeur constante, ce qui prouve que le point N appartient à un autre cercle décrit du point C comme centre.

Ainsi les points $N, N', N'', \dots$, autour desquels tournera successivement la droite ab pendant son mouvement, forment un cercle ayant son centre en C .

Cherchons maintenant quelle est la courbe $vv'v'' \dots$ qui, pendant le mouvement de la droite ab , roulera sur ce cercle.

On voit facilement que cette courbe sera précisément la circonférence du cercle $CaNb$, qui est d'un rayon sous-double de celui du cercle $NN'N'' \dots$; car on sait que, si l'on fait rouler le cercle $CaNb$ sur le cercle du rayon CN , chacun des points de sa circonférence décrira un rayon de celui-ci (*Correspondance* de M. Hachette, t. II, p. 23); mais nous avons vu que, pendant le mouvement de la droite ab , chaque point de la circonférence de ce même cercle décrit aussi une droite passant par le point C (13); cela prouve que le mouvement de la droite ab est le même que le mouvement produit par le roulement du cercle $CaNb$ sur le cercle de rayon CN .

59. Il suit de là que :

Quand un cercle roule sur la concavité d'un autre cercle fixe, d'un rayon double du sien, chaque point de sa circonférence décrit une droite, et chaque autre point de son plan décrit une ellipse (14).

60. Nous avons démontré que toute courbe décrite par un point d'une figure en mouvement est une épicycloïde (57); on en peut conclure que :

Toute courbe quelconque peut être considérée, d'une infinité de manières, comme une épicycloïde.

En effet, il suffit de prouver que toute courbe peut être regardée, d'une infinité de manières, comme décrite d'un mouvement continu par un point d'une figure de forme constante.

Or, que d'un point fixe P on mène des rayons aux points de la courbe, et qu'on les prolonge tous d'une même quantité, les extrémités de ces rayons prolongés formeront une nouvelle courbe, par rapport à laquelle, prise pour *base*, la courbe proposée sera une conchoïde, c'est-à-dire que cette courbe sera engendrée d'un mouvement continu par un point d'une droite qui glissera sur le point fixe P, et dont l'extrémité parcourra la nouvelle courbe.

D'après cette description mécanique, la courbe proposée sera une épicycloïde engendrée par un point du plan d'une courbe mobile qui roulera sur une autre courbe fixe (57), ce qui démontre la proposition énoncée.

61. Ces deux courbes, qui servent à décrire l'épicycloïde par le roulement de l'une sur l'autre, sont faciles à construire.

La courbe fixe est le lieu des points autour desquels tourne successivement la droite mobile; il faut donc mener par le point fixe P une perpendiculaire à cette droite, et par le point décrivant, c'est-à-dire par le point où cette droite mobile rencontre la courbe proposée, il faut mener la normale à cette courbe; le point de concours N de cette normale et de la perpendiculaire à la droite mobile appartiendra à la courbe fixe.

Quant à la courbe mobile, elle est également facile à construire; car il suffit de considérer la droite mobile dans une de ses positions et de prendre tous les points qui seront placés par rapport à elle comme les points N, N', N'', ... sont placés par rapport aux positions correspondantes de la droite mobile; les points ainsi déterminés formeront la courbe mobile.

Ainsi nous avons déterminé la courbe fixe qui sert de base à

l'épicycloïde et la courbe mobile qui doit rouler sur cette première.

La construction de ces deux courbes serait évidemment la même si, au lieu d'une droite pour figure mobile, on prenait une courbe.

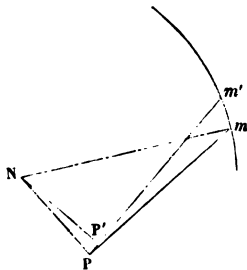
62. Quand une courbe est déterminée par une équation en coordonnées polaires, on peut regarder cette équation comme exprimant le mouvement d'une droite dont un point décrit la courbe.

Cette droite est le rayon vecteur mené du pôle des coordonnées à un point de la courbe ; car on peut considérer ce rayon vecteur comme glissant sur le pôle, de manière que son extrémité parcoure la courbe. Son mouvement sera déterminé par l'équation de la courbe, qui est une relation entre la longueur du rayon vecteur et l'angle qu'il fait avec un axe fixe.

Cette manière d'envisager la description d'une courbe conduit sur-le-champ à la construction de ses normales.

Soient Pm , $P'm'$ deux rayons vecteurs (*fig. 13*) infiniment voi-

Fig. 13.



sins ; le premier, pour prendre la position du second, aura tourné autour d'un certain point N par lequel passe la normale à la courbe en m (4). Ce point N est sur la perpendiculaire au rayon Pm menée par le point P (29). Pendant le mouvement infiniment petit autour du point N , le point P , considéré comme appartenant au rayon vecteur mobile Pm , vient en P' sur la nouvelle position Pm' de ce rayon vecteur, et l'on a

$$P'm' = Pm,$$

de sorte que PP' égale la différence des deux rayons vecteurs Pm ,

Pm' ; or PP' est un arc infiniment petit décrit du point N comme centre, avec le rayon NP ; on a donc

$$PP' = NP \text{ angle } PNP';$$

l'angle PNP' est égal à l'angle des deux rayons vecteurs : donc

$$PP' = NP \text{ angle } mPm', \text{ d'où } NP = \frac{Pm' - Pm}{\text{angle } mPm'};$$

NP s'appelle la *sous-normale de la courbe* : donc la sous-normale d'une courbe exprimée en coordonnées polaires est égale au rapport des variations du rayon vecteur et de l'angle qu'il décrit.

63. On pourrait supposer dans l'équation d'une courbe que les rayons vecteurs, au lieu de passer par un point fixe, fussent tangents à une autre courbe, et prendre pour longueur de chaque rayon la distance comprise entre son point de contact avec cette courbe et son extrémité située sur l'autre courbe; la seconde variable de l'équation de cette courbe serait l'angle que le rayon vecteur fait avec un axe fixe.

La normale à la courbe proposée se déterminerait par la même formule que nous venons de trouver, c'est-à-dire qu'on élèverait une perpendiculaire au rayon vecteur par son point de contact avec la courbe auxiliaire, et l'on prendrait cette perpendiculaire égale au rapport des variations du rayon vecteur et de l'angle qu'il fait avec l'axe fixe, et son extrémité appartiendrait à la normale à la courbe.

VIII.

64. Nous avons dit (25) que nos démonstrations pouvaient s'étendre à des questions concernant deux coniques homofocales.

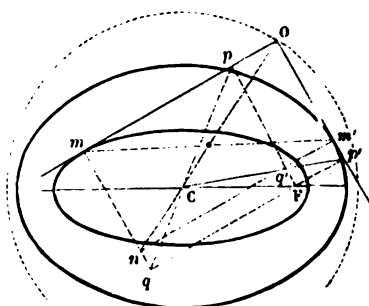
Quand deux coniques ont mêmes foyers, si les côtés d'un angle droit touchent respectivement ces deux courbes, la droite menée du sommet de l'angle au milieu de la corde qui joint les deux points de contact passe par le centre commun des deux courbes.

En effet, soit O (fig. 14) le sommet de l'angle; soient m et m'

les points de contact de ses côtés avec les deux coniques respectivement, et F l'un des deux foyers des deux courbes; il s'agit de prouver que la droite menée par le point O et par le milieu de la droite mm' passe par le centre C des deux courbes; ou bien que la diagonale On du rectangle construit sur Om et Om' passe par le point C.

Du point F abaissons les perpendiculaires Fp , Fq sur les côtés

Fig. 14.



mO , mn de ce rectangle, et joignons leurs pieds p , q ; la droite pq passera par le centre C de la première conique; ce que nous avons démontré (44, note).

Du point F abaissons les perpendiculaires Fp' , Fq' sur les deux côtés $m'O$, $m'n$, et joignons leurs pieds p' , q' par la droite $p'q'$; cette droite passera pareillement par le centre C de la seconde conique.

Or il est facile de voir que les deux droites pq , $p'q'$ doivent se couper sur la diagonale On du rectangle $Omm'n'$; car, en appelant ρ , ρ' les points où cette diagonale On rencontre ces deux droites pq , $p'q'$, on aura :

1° Dans le triangle mnO , coupé par la transversale pqp ,

$$\frac{\rho n}{\rho O} = \frac{mp \cdot nq}{mq \cdot pO};$$

2° Dans le triangle $m'nO$, coupé par la transversale $\rho'p'q'$,

$$\frac{\rho' n}{\rho' O} = \frac{m'p' \cdot nq'}{m'q' \cdot p'O}.$$

Or on a

$$mp = nq', \quad nq = m'p', \quad mq = Op', \quad Op = m'q';$$

il en résulte que

$$\frac{\rho n}{\rho O} = \frac{\rho' n}{\rho' O},$$

ce qui prouve que ρ et ρ' se confondent; par conséquent la droite On passe par le point de concours des deux droites pq , $p'q'$, lequel est le centre de la courbe. Le théorème est donc démontré.

Il résulte de ce théorème, en vertu de celui du n° 23, que :

Quand un angle droit se meut de manière que ses deux côtés touchent respectivement deux coniques qui ont mêmes foyers, son sommet engendre un cercle qui a même centre que les deux courbes.

Si les deux coniques étaient des paraboles, on verrait, par le même mode de démonstration, que le sommet de l'angle droit mobile engendre une droite perpendiculaire à leur axe commun.

Quand les deux coniques se confondent, on retrouve les deux théorèmes (24, 25). Et si l'une des coniques a son petit axe nul, de manière qu'elle se réduise à une droite limitée aux deux foyers de l'autre conique, on en conclut le théorème (44).

IX.

EXTENSION AUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ DE DIVERSES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES.

65. Les deux théorèmes (24, 25) relatifs à une seule conique sont dus à de la Hire (*Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1704); leurs analogues dans les surfaces du second degré ont été énoncés par Monge, et démontrés en premier lieu par M. Poisson (*Correspondance* de M. Hachette, t. I, p. 237), puis en plusieurs circonstances. Mais toutes les démonstrations qu'on en a données sont, je crois, analytiques. Nous allons les démontrer d'une manière purement géométrique, qui s'appliquera aussi à quelques théorèmes plus généraux.

Soit d'abord une surface ayant un centre. Il s'agit de prouver que :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à un ellipsoïde ou à un hyperboloïde a pour lieu géométrique une sphère concentrique à cette surface.

Soit m le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à la surface, que je suppose un ellipsoïde. Circonscrivons à la surface un cylindre ayant ses arêtes parallèles à l'intersection de deux de ces plans. Faisons rouler sur ce cylindre les deux premiers plans rectangulaires; leur intersection engendrera un second cylindre, et les sections de ces deux cylindres par le troisième plan tangent à la surface, lequel est perpendiculaire à leurs arêtes, seront dans le premier une ellipse, et dans le second un cercle, concentrique à cette ellipse (d'après le théorème 24); ce cercle appartiendra à la surface lieu géométrique du point d'intersection des trois plans rectangulaires tangents à l'ellipsoïde. Ce cercle étant concentrique à la section du premier cylindre, son centre se trouve sur l'axe de ce cylindre, lequel passe par le centre de l'ellipsoïde; or, tout plan normal au cercle passe par l'axe de ce cylindre, puisque cet axe est perpendiculaire au plan du cercle; donc tout plan normal au cercle passe par le centre de l'ellipsoïde.

En faisant mouvoir le premier et le troisième plan tangent, de manière qu'ils touchent toujours la surface et que leur droite d'intersection soit toujours perpendiculaire au second plan tangent, cette droite engendrera un cylindre dont la trace sur ce second plan tangent sera encore un cercle, qui passera par le point m , et qui sera sur la surface cherchée; tout plan normal à ce second cercle passera par le centre de l'ellipsoïde.

La normale au point m de la surface cherchée est l'intersection des plans normaux en ce point aux deux cercles; elle passe donc par le centre de l'ellipsoïde : ce qui prouve que cette surface cherchée est une sphère concentrique à l'ellipsoïde. C. Q. F. D.

66. Soit un paraboloides, elliptique ou hyperbolique, et soit m le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à cette surface.

Concevons que les deux premiers plans se meuvent en restant

toujours rectangulaires entre eux et avec le troisième plan, et tangents au parabolôide; ils rouleront sur un cylindre circonscrit au parabolôide et dont la section droite faite par le troisième plan tangent sera une parabole ayant son axe parallèle à la projection orthogonale sur ce troisième plan tangent de l'axe du parabolôide. L'intersection des deux plans rectangulaires mobiles engendrera donc un plan dont la trace sur le troisième plan tangent sera une droite perpendiculaire à l'axe du parabolôide.

Cette droite appartiendra à la surface qui sera le lieu du point d'intersection des trois plans rectangulaires tangents au parabolôide.

En faisant mouvoir le premier et le troisième plan tangent, on obtiendra senblablement une seconde droite passant par le point m , qui appartiendra à cette surface; cette droite sera encore perpendiculaire à l'axe du parabolôide. Le plan de ces deux droites est donc perpendiculaire à cet axe; mais ce plan est tangent à la surface cherchée; tout plan tangent à cette surface est donc perpendiculaire à l'axe du parabolôide, ce qui prouve que cette surface est un plan perpendiculaire à cet axe. Donc :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à un parabolôide a pour lieu géométrique un plan perpendiculaire à l'axe du parabolôide.

67. Les démonstrations des deux théorèmes précédents s'appliquent au cas où, au lieu d'une surface du second degré, on a une conique à laquelle on mène trois plans tangents rectangulaires; et l'on obtient ces deux théorèmes :

I. *Quand on mène trois plans rectangulaires tangents à une ellipse, ou à une hyperbole, leur point d'intersection a pour lieu géométrique une sphère qui a même centre que la conique.*

II. *Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à une parabole a pour lieu géométrique un plan perpendiculaire à l'axe de la parabole.*

X.

THÉORÈMES RELATIFS AUX DEUX CONIQUES
DONT CHACUNE EST LE LIEU DES SOMMETS DES CÔNES DE RÉVOLUTION
QUI PASSENT PAR L'AUTRE.

68. Soient, dans deux plans rectangulaires, deux coniques, dont l'une soit le lieu géométrique des *foyers* de la seconde; c'est-à-dire que chacune de ces courbes sera le lieu des sommets de tous les cônes de révolution qu'on peut faire passer par l'autre courbe.

Nous avons dit (*Mémoire sur les surfaces du second degré*, inséré dans le tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, 1829, p. 68) que ces deux coniques jouissent, entre autres propriétés, de celle-ci : *De quelque point qu'on regarde ces deux courbes, elles paraissent se couper à angles droits*. En supposant que ce point soit à l'infini, on conclut de là que : *les projections orthogonales des deux courbes sur un plan quelconque sont deux coniques décrites des mêmes foyers*.

L'occasion se présente de démontrer quelques autres propriétés de ces courbes.

69. Concevons deux plans rectangulaires tangents à ces deux courbes respectivement; joignons par une droite leurs deux points de contact avec les courbes, et menons un plan par l'intersection de ces deux plans et le milieu de cette droite. Ce plan passera par le centre commun des deux courbes. En effet, projetons orthogonalement les deux courbes sur un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans tangents; nous aurons deux coniques ayant les mêmes foyers; les traces des deux plans tangents sur le plan de projection seront les côtés d'un angle droit, tangents respectivement à ces deux coniques; la droite menée du sommet de cet angle au milieu de la droite qui joindra les deux points de contact passera par le centre des deux coniques; mais cette droite sera la trace du plan mené par l'intersection des deux plans tangents et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact;

ce plan passe donc par le centre des deux courbes en projection, et dès lors par le centre des deux coniques proposées; donc :

Quand on a deux coniques dont chacune est le lieu des foyers de l'autre, si l'on mène deux plans rectangulaires tangents à ces courbes respectivement, le plan mené par leur droite d'intersection et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact passe par le centre commun des deux coniques.

70. Faisons tourner les deux plans rectangulaires, de manière qu'ils soient toujours tangents aux deux coniques et que leur intersection reste parallèle à un axe fixe; *cette droite engendrera un cylindre droit circulaire.*

Car les projections orthogonales des deux coniques, sur un plan perpendiculaire aux arêtes du cylindre, seront deux coniques décrites des mêmes foyers; et la base du cylindre sur ce plan sera le lieu des sommets d'un angle droit mobile dont les côtés toucheront respectivement ces deux coniques : ce qui prouve que cette base sera un cercle.

71. Soient toujours les deux coniques dont l'une est le lieu des foyers de l'autre. Concevons trois plans rectangulaires dont les deux premiers soient tangents à la première conique, et le troisième soit tangent à la seconde conique : nous allons démontrer que le lieu géométrique du point d'intersection de ces trois plans est une sphère ayant même centre que les deux coniques.

En effet, soit m le point d'intersection des trois plans tangents dans une de leurs positions; faisons mouvoir le premier et le troisième, de manière qu'ils soient toujours rectangulaires, qu'ils touchent respectivement les deux coniques, et que leur intersection soit toujours perpendiculaire au deuxième plan; cette droite engendrera un cylindre dont la base sur ce second plan sera un cercle (70), qui passera par le point m et qui appartiendra à la surface cherchée; tout plan normal à ce cercle passera par l'axe du cylindre, et par conséquent par le centre commun des deux coniques.

Si l'on fait mouvoir semblablement le deuxième et le troisième plan, de manière qu'ils touchent respectivement les deux coniques et qu'ils soient perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au

premier plan, leur intersection engendrera un cylindre dont la base sur ce premier plan sera un cercle qui passera par le point m , et qui sera sur la surface cherchée ; tout plan normal à ce cercle passera par le centre commun des deux coniques. Il suit de là que la normale à la surface cherchée au point m passera par le centre des deux coniques : ce qui prouve que cette surface est une sphère ; donc :

Quand on a deux coniques, dont chacune est le lieu des foyers de l'autre, si l'on fait mouvoir trois plans rectangulaires de manière que deux d'entre eux soient toujours tangents à l'une des deux coniques et que le troisième soit tangent à l'autre, le point d'intersection de ces trois plans engendrera une sphère concentrique aux deux coniques.

72. On sait que les deux coniques peuvent être deux paraboles.

Il est facile de voir ce que deviennent dans ce cas les théorèmes précédents. Il suffit de supposer que le centre des deux coniques soit situé à l'infini sur leur axe commun. La sphère du théorème précédent devient un plan perpendiculaire à cet axe, et le cylindre droit circulaire du théorème (70) devient aussi un plan.

Tout cela est, d'ailleurs, facile à démontrer directement par la même voie que nous avons suivie.

73. Nous démontrerons ailleurs que :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections principales dans les mêmes plans et décrites des mêmes foyers, deux cylindres circonscrits à ces surfaces respectivement, et ayant leurs arêtes parallèles entre elles, ont pour sections, sur un même plan perpendiculaire à ces arêtes, deux coniques décrites des mêmes foyers (').

De là on conclut aisément, en continuant de suivre la même marche, les deux théorèmes suivants :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections prin-

(') Les deux surfaces jouissent de cette propriété plus générale : *De quelque point de l'espace qu'on les considère, leurs contours apparents paraissent se couper à angles droits.*

cipales décrites des mêmes foyers, si l'on mène deux plans rectangulaires qui les touchent respectivement, le plan mené par l'intersection de ces deux plans et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact passe par le centre commun des deux surfaces.

74. *Quand trois surfaces du second degré ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si l'on mène trois plans rectangulaires tangents à ces surfaces respectivement, leur point d'intersection a pour lieu géométrique une sphère concentrique aux trois surfaces.* (1^{er} août 1829.)

XI (1).

75. J'aurai occasion de donner deux démonstrations purement géométriques du théorème énoncé ci-dessus (note du n° 73), parmi d'autres plus généraux; mais, comme il est facile aussi de le démontrer par l'Analyse, je vais employer cette voie, qui a pour le moment l'avantage de n'exiger aucune proposition préliminaire. On peut même, sans plus de frais, poser la question d'une manière plus générale, et démontrer le théorème suivant :

Quand deux surfaces du second degré sont concentriques et ont un même système de trois droites diamétrales conjuguées, si on leur mène une tangente commune quelconque qui les touche en deux points, les plans tangents en ces points aux deux surfaces respectivement seront toujours parallèles à deux plans diamétraux conjugués d'une troisième surface du second degré.

En effet, les trois droites diamétrales conjuguées communes étant prises pour les trois axes des coordonnées, les équations des deux surfaces seront de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1.$$

Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les deux points où la tangente

(1) Invité par M. Hachette à donner la démonstration du théorème énoncé dans la Note relative à l'article (73), j'ai ajouté (2 avril 1830) ce Chapitre XI.

commune touche ces deux surfaces respectivement; les équations des plans tangents en ces points seront

$$\begin{aligned} Ax'x + By'y + Cz'z &= 1, \\ A'x''x + B'y''y + C'z''z &= 1. \end{aligned}$$

Pour que la droite qui joint les deux points de contact soit tangente aux deux surfaces, il faut que chacun de ces plans passe par le point de contact de l'autre plan; on aura donc les deux équations de condition

$$\begin{aligned} Ax'x'' + By'y'' + Cz'z'' &= 1, \\ A'x'x'' + B'y'y'' + C'z'z'' &= 1. \end{aligned}$$

Retranchant l'une de l'autre, on a

$$(A - A')x'x'' + (B - B')y'y'' + (C - C')z'z'' = 0$$

ou

$$AA' \left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{A} \right) x'x'' + BB' \left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{B} \right) y'y'' + CC' \left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C} \right) z'z'' = 0.$$

Sous cette forme, cette équation prouve que les deux plans tangents sont parallèles à deux plans diamétraux, *conjugués* par rapport à la surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\frac{1}{A'} - \frac{1}{A}} + \frac{y^2}{\frac{1}{B'} - \frac{1}{B}} + \frac{z^2}{\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}} = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

76. Si les trois axes coordonnés sont rectangulaires, et si l'on a

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{A'} = \frac{1}{B} - \frac{1}{B'} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C'};$$

la troisième surface sera une sphère : les plans tangents aux deux proposées seront donc rectangulaires; mais alors ces deux surfaces ont leurs sections principales dans les trois plans coordonnés, et ces courbes, deux à deux, ont les mêmes foyers; il s'ensuit donc que :

Quand deux surfaces du second degré ont les mêmes plans principaux, et que leurs sections par ces plans ont les mêmes

foyers, si on leur mène une tangente commune quelconque, leurs plans tangents aux points où cette tangente les touche seront toujours à angle droit.

Si la tangente touche les deux surfaces en un même point pris sur leur courbe d'intersection, on en conclut ce théorème déjà démontré par MM. Binet et Ch. Dupin : *Les deux surfaces se coupent partout à angle droit.*

77. Si l'on circonscrit aux deux surfaces deux cônes qui aient pour sommet commun un point quelconque de l'espace, chacune de leurs quatre arêtes d'intersection sera une tangente commune aux deux surfaces; donc les plans tangents aux deux cônes suivant une de ces arêtes seront à angle droit, comme étant aussi tangente aux deux surfaces respectivement; nous pouvons donc dire que :

De quelque point de l'espace qu'on considère les deux surfaces, leurs contours apparents sembleront se couper à angles droits.

C. Q. F. D.

Si, au lieu de deux cônes, on circonscrit aux deux surfaces deux cylindres qui aient le même axe, ils se couperont aussi à angles droits; donc leurs sections, par un plan perpendiculaire à leurs arêtes, seront deux coniques concentriques qui se couperont à angles droits, ce qui prouve qu'elles ont les mêmes foyers. C'est la proposition que nous avons admise (73).

78. On peut regarder les deux coniques dont nous avons parlé (68) comme faisant partie de la série des surfaces du second degré dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers; par conséquent, les propriétés de ces surfaces appartiennent aux deux coniques; d'où il suit, par exemple, que, *de quelque point qu'on les considère, elles semblent se couper à angles droits*; et que, dans le théorème (74), on peut prendre une de ces coniques, ou toutes les deux, à la place d'une ou de deux des trois surfaces.

TABLE DES MATIÈRES.

- I. INTRODUCTION. Théorème unique, sur le déplacement d'une figure plane, lequel fait la base du Mémoire (1-6).
Conditions principales du déplacement d'une figure, qui fait le sujet des cinq paragraphes suivants :
 - II. 1^o Deux points de la figure glissent sur deux courbes (7-14).
 - III. 2^o Une courbe roule sur deux courbes fixes (16-28).
 - IV. 3^o Une courbe glisse sur un point fixe, et un point de la figure sur une courbe fixe (29-45).
 - V. 4^o Une courbe glisse sur deux points (46-47).
 - VI. 5^o Un point d'une courbe glisse sur une courbe fixe, et la courbe tourne autour de ce point, de manière à être toujours tangente en ce point, à la courbe fixe : la normale à la courbe décrite par un point quelconque de cette courbe mobile et les normales aux points où elle touche sa courbe enveloppe passent par le centre de courbure de la courbe fixe au point de contact des deux courbes (48-55).
 - VII. Conséquences diverses des principes précédents (56-63).
 - VIII. Exemples de l'application du mode de démonstration aux coniques homofocales (64).
 - IX. Extension aux surfaces du second degré de diverses propriétés des sections coniques (65-67).
 - X. Théorèmes relatifs aux deux coniques dont chacune est le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'autre (68-74).
 - XI. Démonstration analytique du théorème relatif aux contours apparents de deux surfaces du second ordre énoncé dans une Note (73-78).
-

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 24 AVRIL 1878,

PRÉSIDENTE DE M. DARBOUX.

M. le comte L. Hugo adresse une Note intitulée : *De constructiva planetarum systematis curva.*

Communications :

M. Delègue : *Sur la résolution de l'équation du troisième degré au moyen d'une formule approchée.*

M. Darboux : *De l'usage des intégrales particulières algébriques pour l'intégration complète des systèmes d'équations différentielles.*

M. Welsch : *Recherches sur les nombres premiers, déduites de la série de Lamé.*

M. Halphen : 1° *Sur une formule relative au nombre des diviseurs impairs d'un nombre donné, inférieurs à une limite donnée;* 2° *Sur les théorèmes de Poncelet relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques.*

SÉANCE DU 8 MAI 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la construction des centres de courbure principaux dans les surfaces du second ordre.*

M. Édouard Lucas : *Sur la décomposition des grands nombres en facteurs premiers.*

M. Halphen : *Sur les théorèmes de Poncelet.*

SÉANCE DU 22 MAI 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Mannheim : *Sur la détermination des centres de courbure principaux dans les surfaces du second ordre, au moyen d'une formule qui donne la variation de longueur d'une droite mobile dans l'espace.*

M. Darboux : *Sur la limite d'une série de polygones plans ou gauches dont chacun s'obtient en joignant les milieux des côtés du précédent.*

M. Fouret : *Sur un théorème concernant un système de deux polygones semi-réguliers inscrits dans deux ellipses distinctes.*

M. Kronecker : *Sur les fonctions de Sturm.*

M. Halphen : *Sur les coordonnées des courbes planes dans l'espace.*

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur l'emploi des figures géométriques, dites cristalloïdes, dans les constructions de l'Exposition universelle.*

SÉANCE DU 5 JUIN 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Darboux : *Sur la réciproque du théorème de Jacobi concernant les équations de la Dynamique.*

M. Édouard Lucas : *Sur la résolution en nombres entiers de l'équation $x^3 + y^3 = uz^3$.*

SÉANCE DU 19 JUIN 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Présentation d'un nouveau Membre : M. Worms de Romilly est présenté par M. Vicaire et par M. C. Jordan,

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur un pentagone étoilé ornant une monnaie primitive de l'Italie centrale.*

Communication :

M. L. Rodet : *Sur la Géométrie des brahmanes.*

SÉANCE DU 3 JUILLET 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Élection : M. Worms de Romilly est élu Membre de la Société.

M. le comte L. Hugo adresse une Note *Sur un icosaèdre en cristal de l'Exposition rétrospective.*

Communications :

M. Fabre : 1^o *Sur la construction du cercle tangent à trois*

cercles donnés; 2° Sur une propriété générale des courbes algébriques.

SÉANCE DU 17 JUILLET 1878,

PRÉSIDENCE DE M. LE PRINCE C. DE POLIGNAC.

Le secrétaire donne lecture d'une Lettre de M. le Président du Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, invitant la Société à désigner un de ses Membres pour la représenter aux séances du Congrès qui doit avoir lieu au mois d'août.

M. de Polignac est désigné pour représenter la Société.

Communications :

M. Jordan : *Sur les covariants des formes binaires.*

M. Andréiewski, professeur à l'Université de Varsovie : *Sur la réduction des intégrales indéfinies.*

SÉANCE DU 31 JUILLET 1878,

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Laisant : *Deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.*

M. Darboux ajoute *Diverses applications de ces deux théorèmes.*

M. Sylvester : *Sur le système des covariants fondamentaux pour un système composé d'une forme cubique et d'une forme biquadratique.*

M. Halphen : *Sur le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions séparées.*

M. Édouard Lucas : *Démonstration de deux théorèmes de M. Adams sur les nombres de Bernoulli.*

M. Catalan : *Énoncé d'un théorème d'Arithmétique, dû à M. Césaroë.*

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS D'OCTOBRE 1878 (¹).

(Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.)

Président honoraire.....	M. CHASLES.
Président.....	M. DARBOUX.
Vice-Présidents	{ M. LEMONNIER. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. ROUCHÉ.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. HALPHEN.
Archiviste	M. FABRE.
Trésorier	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. ANDRÉ (Désiré). M. BIENAYMÉ. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. BRISSE. M. COLLIGNON. M. DE LA GOURNERIE. M. LAGUERRE. M. LUCAS. M. MANNHEIM. M. PUISEUX. M. RESAL.

ACHARD, actuaire de la Compagnie d'assurances le *Soleil*, à Paris.
ANDRÉ (Désiré), Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.
ANTOINE (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.
Aoust (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- BACH**, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy, place Stanislas, 2.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, rue de Grenelle, 71, à Paris.
BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.
BERDELLÉ, ancien garde général, à Rioz (Haute-Saône).
BERTRAND (Joseph), membre de l'Institut, rue des Saints-Pères, 9, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, rue de Grammont, 27, à Paris, S. P.
BIENAYMÉ (Alexis), major au 2^e régiment du Génie, à Montpellier (Hérault).
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Toulon.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut, rue de Fleurus, n° 1, à Paris, S. P.
BLEYNIÉ, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Lacuée, 28, à Paris.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à l'École Polytechnique, à Paris.
BOUCHER, directeur de l'École préparatoire d'Angers, rue des Bas-Chemins, 3.
BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne (Aude).
BOULANGER, professeur de Mathématiques, rue de Calais, à Paris.
BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix.
BREMAR, architecte, rue Saint-Lazare, 103, à Paris.
BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
BRISSE (A.), ingénieur du dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).
BRISE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue d'Enfer, 22, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Grenoble, S. P.
BRUNET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, rue Sainte-Placide, 60, à Paris.
CABART (Mauricé), boulevard Saint-Michel, 183, à Paris.
CABEN, capitaine du Génie, à Besançon.
CARON, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
CATALAN, professeur à l'Université de Liège (Belgique).
CHARLON, directeur de *la Confiance*, rue de Grammont, 21, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, rue du Bac, 62 (passage Sainte-Marie, Paris), S. P.
CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
CLAYEUX, sous-intendant de 1^{re} classe, à Oran (Algérie).
CLAUDE-LAFONTAINE, 32, rue de Trévise, à Paris, S. P.
COCHIN (Denis), rue de Grenelle-Saint-Germain, 86, à Paris.
COLLET, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.
COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, boul. Saint-Germain, 70, à Paris.
COMBEROUSSE (de), professeur à l'École Centrale, 63, rue Blanche, à Paris.
COMBETTE, professeur de Mathématiques, rue Bonaparte, 138, à Paris.
CORNU, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 38, à Paris.
COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
DARBOUX, maître de Conférences à l'École Normale, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
DESQ, capitaine d'Artillerie, à Besançon.
DEWULF, commandant du Génie, à Toulon.
DOSTOR, docteur ès sciences, 105, rue de Rennes, Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Saint-Martin, 4, à Paris.
FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
FONTES, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Villefranche.
FOURET, actuaire de la Compagnie d'assurances *le Phénix*, rue Billault, 16, à Paris.
GABRIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue des Martyrs, 41, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Sidi-bel-Abbès (Oran).
GERONO, rue Hallé, 40, à Paris.

GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à la Havane (Cuba).
 GOFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
 GONZALÈS (Jozé), rue Monge, 63, à Paris.
 GOURNERIE (de la), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
 GRAINDORGE, professeur à l'Université de Liège.
 GUELOT, major au 122^e régiment d'Infanterie, à Montpellier (Hérault).
 HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, 15, avenue Villars, à Paris.
 HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
 HATON DE LA GOUPILLIÈRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
 HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
 HENRY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
 HÉRAUD, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
 HERMARY, capitaine d'Artillerie, Dépôt central, place Saint-Thomas-d'Aquin, 1, à Paris.
 HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
 HILAIRE, rue des Carmes, 21, à Douai (Nord).
 HIRST, directeur des études à l'École Navale de Greenwich, S. P.
 HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
 HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue de la Victoire, 91, à Paris.
 HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
 JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue Saint-Genès, 57, à Bordeaux.
 JANIN, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
 JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, 28, rue du Cardinal-Lemoine, à Paris.
 JORDAN, professeur à l'École Polytechnique, rue de Rennes, 64, à Paris, S. P.
 JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau.
 JULY, chef d'institution, cité Malesherbes, 8, à Paris.
 JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan.
 KENLER, répétiteur à l'École Polytechnique, quai Montebello, 12, à Paris.
 LAFON, professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
 LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
 LAISANT, député, 16, avenue de Villiers, à Paris.
 LAQUIÈRE, capitaine d'Artillerie, à Blidah (Algérie).
 LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
 LAX, ingénieur des Ponts et Chaussées, 17, rue Joubert, à Paris.
 LEFÈBRE DE FOURCY, rue de Tournon, 21, à Paris.
 LEFFLER, professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
 LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
 LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille, boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.
 LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
 LÉVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
 LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
 LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa.
 LINDEMANN, professeur à l'Université de Fribourg-en-Brisgau.
 LUCAS, professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 56, à Paris.
 MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue d'Enfer, 77, à Paris.
 MALLOIZEL, rue de la Vieille-Estrapade, 11, à Paris.
 MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
 MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Hussein-Dey, près d'Alger.
 MARGERIE, professeur à l'école Monge, rue Blanche, 71, à Paris.
 MARSILLY (le général de), à Auxerre.
 MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.
 MIGNON, capitaine au 6^e régiment d'Artillerie, à Grenoble.

- MONTIGNY** (de), capitaine du génie, à Villeneuve-Saint-Georges (Seine).
MOREL, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris.
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 4, à Fontenay-aux-Roses (Seine).
NICOLAÏDES, professeur à l'Université d'Athènes.
OVIDIO (Enrico d'), via San Turnaso, à Turin.
PARENTIER (le général), directeur supérieur du Génie des 9^e et 12^e corps, à Tours.
PARRAN, ingénieur des Mines, rue de la Victoire, 59, à Paris.
PERCIN, capitaine d'Artillerie, à la Rochelle.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de Verneuil, 22, à Paris.
PHILIPPON, secrétaire à la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (de), capitaine d'Artillerie, à Nancy.
PLOCQ, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Paris.
POLIGNAC (prince C. de), rue Kepler, 7, à Paris, S. P.
POUSSET, professeur au lycée de Poitiers.
POUILLOT, agrégé de l'Université, à l'École normale de Cluny (Saône-et-Loire).
PRESLES (de), sous-intendant militaire, à Evreux.
PUISEUX, membre de l'Institut, 81, boulevard Saint-Michel, à Paris.
PUTZ, colonel d'Artillerie, commandant le parc des équipages militaires, à Vernon (Eure).
RADAU, rue Bonaparte, 58, à Paris.
RANCY (de), sous-directeur de la Compagnie d'assurances *l'Aigle*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron de), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
RESAL, professeur à l'École Polytechnique, rue Saint-André-des-Arts, 58, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire d'Arras.
REBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, au Ministère des finances, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, rue Oberkampf, 151, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 62, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, 5, rue de la Ferme-des-Mathurins.
ROUX, architecte, rue de Penthièvre, 13, à Paris.
SAINT-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, rue Taranne, 7, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), professeur à la Faculté des Sciences de Caen.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
SALTEL (Louis), professeur au Lycée de la Rochelle.
SANCERY, rue de l'Odéon, 3, à Paris.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 48, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHUBERT, professeur, à Hambourg.
SÉGUY, 11, rue de Médecis, Paris.
SIVERING (Jos.), ingénieur en chef des Travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
STEPHAN, directeur de l'Observatoire de Marseille.
STUDNICKA, à l'Université de Prague (Bohème).
TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre.
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, 45, rue d'Ulm, à Paris.
TARBOURIECH, professeur à Sainte-Barbe, à Paris.
TERRIER, directeur de l'École préparatoire de l'École Monge, 145, b^d Malesherbes, à Paris.
THERY, professeur au lycée de Douai.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, 1, boulevard de Bonne, à Grenoble.

TISSERAND, membre de l'Institut, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.
TURQUAN, docteur ès sciences, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, 12, boulevard Saint-Michel, à Paris.
VAZILLE, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, rue Gay-Lussac, 8, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, 76, rue d'Assas, à Paris.
VINTEJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée d'Alger.
WELSCH, capitaine d'Artillerie, à l'École militaire de Saint-Cyr.
WEYR (D^r Edouard), professeur à l'Université de Prague (Bohème).
WEYR (D^r Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague (Bohème).
WICKERSHEIM, ingénieur des Mines, à Paris.
WORMS DE ROHILLY, ingénieur des Mines, à Paris.

FIN DU TOME SIXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

	Pages.
Séance du 7 novembre 1877.....	79
Séance du 21 novembre 1877.....	79
Séance du 5 décembre 1877	80
Séance du 19 décembre 1877... ..	80
Séance du 9 janvier 1878.....	81
Séance du 16 janvier 1878.....	81
Séance du 30 janvier 1878.....	136
Séance du 13 février 1878.....	137
Séance du 27 février 1878.....	137
Séance du 13 mars 1878.....	137
Séance du 27 mars 1878.....	138
Séance du 10 avril 1878.....	138
Séance du 24 avril 1878.....	251
Séance du 8 mai 1878.....	252
Séance du 23 mai 1878.....	252
Séance du 5 juin 1878.....	253
Séance du 19 juin 1878.....	253
Séance du 3 juillet 1878.....	253
Séance du 17 juillet 1878.....	254
Séance du 31 juillet 1878.....	254

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème; par M. A. MANNHEIM....	5
Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées; par M. A. MANNHEIM	7

Théorème sur la Géométrie des Quinconces; par M. ÉDOUARD LUCAS	
Sur les singularités des courbes gauches algébriques; par M. HALPHEN.....	
Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface; par M. G. FOURET.....	
→ Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier; par M. ÉDOUARD LUCAS.....	
Sur les courbes unicursales de troisième classe; par M. LAGUERRE.....	
Sur les développements en séries; par M. ÉDOUARD LUCAS.....	
Sur la multiplication des fonctions elliptiques; par M. LAGUERRE.....	
Sur la transformation des fonctions elliptiques; par M. LAGUERRE.....	
Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont une horizontale. Construction des axes de ces courbes; par M. PICQUET.....	
Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes; par M. PERRIN.....	
→ Sur les suites de Farey; par M. ÉDOUARD LUCAS.....	1
Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés; par M. HALPHEN.....	1
Note sur le développement des puissances de certaines fonctions; par M. Désiré André.....	1
Sur l'intégration de l'équation $y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 6f(x)$, f étant un polynôme du second degré; par M. LAGUERRE.....	1
Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre; par M. LAGUERRE.....	2
Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes; par M. LAGUERRE.....	1
Sur un manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien; par M. L. RODET.....	1
Sur des fonctions analogues à celles de Sturm; par M. LEMONNIER.....	1
Note sur la Géométrie des Quinconces; par M. LAISANT.....	1
Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. C. DE POLIGNAC.....	
→ Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module; par M. Désiré André.....	
Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes; par M. Désiré André.....	
Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan; par M. H. LÉAUTÉ.....	
Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers; par M. HALPHEN.....	
Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point; par M. TCHEBICHEF.....	

	Page.
Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. LAISANT.....	193
Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (deuxième Note); par M. LINDEMANN.....	195
Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mé- caniques; par M. CHASLES.....	208
État de la Société au mois d'octobre 1878.....	255

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME VI.



.

.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMITÉ DE RÉDACTION.

MM. COLLIGNON.

FOURET.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

JORDAN.

MANNHEIM.

PICQUET.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1878-79.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1879



SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ANNÉE 1879.

Président honoraire.....	M. CHASLES.
Président.....	M. OSSIAN BONNET.
Vice-Présidents	{ M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. DE POLIGNAC. M. ROUCHÉ.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. PICQUET.
Vice-Secrétaires.....	{ M. MOREL. M. PERRIN.
Archiviste	M. FABRE.
Trésorier	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. BRISSE. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. DE LA GOURNERIE. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LA'SANT. M. LEMONNIER. M. LUCAS. M. MANNHEIM. M. PUISEUX. M. RESAL.



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

*Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre
de gravité; par M. G. DARBOUX.*

(Séance du 31 juillet 1878.)

L'intéressante Communication de M. Laisant (*voir le volume précédent*, p. 193) a trait à deux remarquables théorèmes qui, depuis Lagrange, ont été étudiés par différents géomètres. Poinso les a donnés dans sa *Statique*, et Jacobi, après les avoir établis dans sa *Mécanique analytique* (p. 22), en fait un usage important dans les considérations qu'il développe sur la stabilité du système du monde.

J'indiquerai ici comment je démontre, dans mon enseignement, les propositions ou plutôt la proposition de Lagrange (car le premier théorème de Lagrange n'est qu'un cas particulier du second). En développant une remarque de Leibnitz, on est conduit, en même temps qu'au théorème de Lagrange, à un nouveau mode d'exposition de la théorie du centre des forces parallèles.

On sait que, étant données trois forces concourantes qui se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité du triangle formé par leurs extrémités. Leibnitz a remarqué plus généralement que, si n forces concourantes se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité de n points de masses égales placés à leurs extrémités. C'est cette remarque,

un peu généralisé, qui nous servira de point de départ. Nous allons d'abord indiquer quelques définitions qui serviront à abréger les raisonnements.

Étant donnée une force, nous la désignerons toujours en commençant par son point d'application. Ainsi, la force OA aura son point d'application en O et son extrémité en A . Comme nous n'examinerons que des forces concourantes, il n'y a aucun inconvénient à dire qu'une force OA est la résultante de deux forces PB , QC . Cela signifiera que, si les trois forces étaient déplacées parallèlement à elles-mêmes et ramenées à avoir le même point d'application, la première deviendrait la résultante des deux autres. Ainsi, en tenant compte des deux conventions précédentes, nous pourrions dire, étant donné un triangle ABC , que AB est la résultante de AC et de CB .

Étant donnée une force OA , nous dirons que nous la multiplions par un nombre positif ou négatif m , quand nous lui substituons une force OB de même direction et de même point d'application, égale à la première multipliée par la valeur absolue de m , de même sens si m est positif, de sens contraire si m est négatif. Il est clair que la force $(m_1 + m_2)OA$ est la résultante de $m_1 \overline{OA}$ et de $m_2 \overline{OA}$, et, d'autre part, que, si une force F est la résultante de deux autres F' , F'' , mF sera de même la résultante de mF' , mF'' .

Ces définitions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Considérons p points $A_1, A_2, \dots, A_p$ affectés de coefficients positifs ou négatifs $m_1, m_2, \dots, m_p$ dont la somme n'est pas nulle; O désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces $m_1 \overline{OA_1}, m_2 \overline{OA_2}, \dots, m_p \overline{OA_p}$ ira passer par un point fixe C et sera égale à $M \cdot \overline{OC}$, M désignant la somme $m_1 + m_2 + \dots + m_p$.*

Dans le cas exceptionnel où la somme M est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariables quand le point O se déplacera; en particulier, si elle est nulle pour une position du point O , elle sera nulle pour toutes les autres.

Soit, en effet, OR la résultante des forces $m_i \overline{OA_i}$. Cherchons

la résultante $O'S$ quand le point O est remplacé par le point O' et les forces $m_i \overline{OA_i}$ par $m_i \overline{O'A_i}$. La force $O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $O'O$ et de OA_i . De même, $m_i O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $m_i \overline{O'O}$ et de $m_i \overline{OA_i}$. On obtiendra donc la résultante $O'S$: 1° en composant toutes les forces $m_i OA_i$, ce qui donnera OR ; 2° en composant toutes les forces $m_i O'O$, ce qui donnera $M \cdot \overline{O'O}$; 3° en composant les deux résultantes partielles

$$(1) \quad OR \text{ et } M \cdot \overline{O'O}.$$

Supposons d'abord que M ne soit pas nul, et déterminons sur OR un point C par la condition

$$OR = M \cdot OC.$$

Alors $O'S$, étant la résultante de $M \cdot \overline{OC}$ et de $M \cdot \overline{O'O}$, sera évidemment égale à $M \cdot \overline{O'C}$. Elle passera donc toujours par le point C , et sera égale à $M \cdot \overline{O'C}$, ce qui démontre la première partie du théorème, relative au cas où M n'est pas nul.

Supposons maintenant que M soit nul. Alors les deux résultantes partielles (1) se réduiront à une seule. $O'S$ sera égale et parallèle à OR , ce qui achève de démontrer la proposition.

Il est évident que le point C , par lequel va passer la résultante quand M n'est pas nul, ne dépend que des rapports mutuels des coefficients m_i . En mettant à profit cette remarque, considérons les forces $m_1 \frac{\overline{OA_1}}{k}$, $m_2 \frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $m_p \frac{\overline{OA_p}}{k}$; elles auront pour résultante $\frac{M}{k} OC$.

Prenons $k = OA_1$, et supposons que le point O s'éloigne indéfiniment. Alors $\frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $\frac{\overline{OA_p}}{k}$ auront pour limite l'unité. Les différentes forces $\frac{m_i OA_i}{k}$, que l'on peut supposer transportées parallèlement à elles-mêmes de manière que leurs points d'application coïncident avec les points A_i , finiront par devenir parallèles et auront pour grandeurs les valeurs absolues de $m_1, m_2, \dots, m_p$, deux forces correspondantes à des coefficients de signes contraires

ayant des sens opposés. Quant à la résultante qui passe par C et a pour valeur $\frac{M \cdot \overline{OC}}{k}$, on peut transporter son point d'application en C, et elle aura pour valeur limite M. Ainsi la résultante des forces parallèles passera par un point fixe et sera égale à leur somme algébrique. On reconnaît la proposition fondamentale de la théorie des forces parallèles; le point C est le centre des forces parallèles considérées, ou, si l'on veut, le centre de gravité des masses m_i appliquées aux points A_i , et l'on voit que la notion et les propriétés de ce centre se déduisent comme cas particuliers du théorème I.

Ces remarques préliminaires étant faites, nous obtiendrons sans peine le théorème de Lagrange et une proposition nouvelle. Nous avons appelé OR la résultante des forces $m_i \overline{OA_i}$. En employant la formule connue qui donne la résultante en fonction des composantes, nous aurons

$$(2) \quad \overline{OR}^2 = \sum m_i^2 \overline{OA_i}^2 - 2 \sum m_i m_k \overline{OA_i} \overline{OA_k} \cos \widehat{A_i OA_k}.$$

Or, dans le triangle $A_i OA_k$, on a

$$2 \overline{OA_i} \overline{OA_k} \cos \widehat{A_i OA_k} = \overline{OA_i}^2 + \overline{OA_k}^2 - \overline{A_i A_k}^2.$$

En se servant de cette relation pour éliminer les cosinus, la formule (2) deviendra

$$(3) \quad \overline{OR}^2 = M \sum m_i \overline{OA_i}^2 - \sum \sum m_i m_k \overline{A_i A_k}^2.$$

Si l'on remplace OR par $M \cdot \overline{OC}$, on aura précisément la proposition de Lagrange. Sans insister sur ce cas bien connu, je vais examiner spécialement le cas où l'on a $M = 0$. Alors nous savons que la résultante OR est constante en grandeur et en direction, et, en effet, la formule (3) nous donne pour cette résultante la valeur

$$(4) \quad \overline{OR}^2 = - \sum \sum m_i m_k \overline{A_i A_k}^2,$$

indépendante de la position du point O.

Supposons maintenant que, considérant un certain nombre des points A_i , on les supprime et on les remplace par un seul point,

leur centre de gravité, affecté d'une masse égale à la somme de leurs masses, je dis que la résultante ne sera pas changée. En effet, cela revient à supprimer, par exemple, deux forces $m_1 \overline{OA_1}$, $m_2 \overline{OA_2}$, et à ajouter la force $(m_1 + m_2) \overline{OA'}$ dirigée vers le centre de gravité A' des points A_1, A_2 . Or, d'après le théorème I, cette dernière force est la résultante des deux premières. L'opération indiquée a donc pour effet de substituer à deux ou à plusieurs composantes leur résultante partielle, ce qui ne changera pas évidemment la résultante totale.

Donc, dans l'équation (4), le second membre conservera sa valeur quand on substituera aux points A_i les nouveaux points, en nombre moindre, que l'on aura déduits des premiers par des compositions partielles. Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

THÉOREME II. — *Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points ainsi obtenus, la somme*

$$\sum \sum m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur constante, négative ou nulle.

Il serait facile de prouver que ce théorème peut donner celui de Lagrange; je me contenterai de faire remarquer que l'on peut toujours réduire à deux le nombre total des points du système, par exemple, en prenant le centre de gravité de tous les points à masse positive d'une part, et, d'autre part, celui des points à masse négative. Soient B, B' les deux points ainsi obtenus de masses $\mu, -\mu$. La somme précédente sera réduite à un seul terme

$$-\mu^2 \overline{BB'}^2,$$

ce qui permettra de la construire géométriquement. Du reste, les points B, B' donnent aussi la direction de la résultante OR; car, si le point O vient en B', cette résultante se réduit à la seule composante $\mu \overline{B'B}$, et, comme elle est constante en grandeur et en direction, elle sera toujours parallèle à $\overline{BB'}$ et égale à $\mu \cdot \overline{B'B}$.

Le théorème II peut conduire à de nombreuses propositions de polygonométrie. J'en indiquerai une seule application.

Soit ABCD un quadrilatère, et soient placées les masses 1, — 1, 1, — 1 aux sommets A, B, C, D. Si nous appelons I, K les milieux des diagonales BD, AC, on aura

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{DA}^2 = -4\overline{IK}^2.$$

Sur l'intégrale $\int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 novembre 1878.)

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que n soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$(1) \quad \int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{x^2}{2} + xx} \Theta_n + U_n \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x et en z , U_n et V_n deux polynômes entiers en x . Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant $\Theta_n(z, x)$ au lieu de Θ_n , on a d'ailleurs

$$V_n = \Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n = -\frac{d\Theta_n}{dz} + \Theta_n(z - x) + U_n,$$

et de cette relation, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants :

$$U_0 = 1, \quad \Theta_0 = 0; \quad U_1 = x, \quad \Theta_1 = 1; \quad U_2 = x^2 + 1, \quad \Theta_2 = z + x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n+1} = -nz^{n-1} + z^n(z - x) + z^n x + nz^{n-1},$$

on déduit

$$(2) \quad U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}$$

et

$$(3) \quad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de U_0 et de U_1 , montre immédiatement que les polynômes U_n sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de $e^{\frac{a \cdot x^2}{2} - \frac{a}{2}(x-h)^2}$ en série (1), dans le cas particulier où l'on a $a = -1$ et $h = -z$.

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$(4) \quad e^{\frac{z^2}{2} + zx} = U_0 + U_1 z + \frac{U_2}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{U_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} z^n + \dots$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x ,

$$\begin{aligned} & -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_{n+1} + U_{n+1} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_{n+1} \\ & = -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & = -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \left(xU_n + \frac{dU_n}{dx}\right) \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} + U_n; \end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(4) \quad \Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n,$$

$$(5) \quad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx},$$

$$(6) \quad V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

(1) Sur un nouveau développement en série des fonctions (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$nU_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$(7) \quad \frac{d^2U_n}{dx^2} + x \frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0,$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abréger,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2} - zx} H_n;$$

on aura les relations suivantes :

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} z^n + x H_n + n H_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = x H_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2} + zx}.$$

d'où

$$n H_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2} + zx} (U_n - z^n)$$

et

$$(8) \quad \frac{d^2H_n}{dx^2} + x \frac{dH_n}{dx} - n H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right).$$

Il est remarquable que, le polynôme U_n étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions Θ peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions U .

On a, en effet,

$$(9) \quad \Theta_{n+1} = \Sigma \Lambda_{m,n} U_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

où, en posant, pour abréger, $n - m = \mu$,

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,n} = z^\mu + \frac{m+1}{1} (\mu-1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} (\mu-2)(\mu-3) z^{\mu-4} \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\mu-3)(\mu-4)(\mu-5) z^{\mu-6} \dots \end{aligned}$$

Le terme constant de cette expression est nul si μ est impair, et, si μ est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots\left(m+\frac{\mu}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{\mu}{2}}.$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

$$(10) \quad V_{n+1} = U_n + (n-1)U_{n-2} + (n-2)(n-3)U_{n-4} + \dots$$

6. En faisant $z = \infty$ dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $z - x = t$, il viendra

$$(11) \quad \int_{-\infty}^x (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = U_n \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} + V_n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes U_n qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction $e^{\frac{x^2}{2}}$.

Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z ;
par M. LEMONNIER.

(Séance du 22 novembre 1878.)

Étant données les trois équations du second degré

$$(1) \quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \\ A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy \\ \quad + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 = 0, \\ A_2x^2 + A'_2y^2 + A''_2z^2 + 2B_2yz + 2B'_2zx + 2B''_2xy \\ \quad + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

elles peuvent ou non se résoudre par rapport aux carrés de deux variables et de leur produit, suivant que l'un au moins des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ou qu'ils sont nuls à la fois.

I.

Supposons qu'on ait

$$(2) \quad \delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} > 0.$$

En résolvant les trois équations (1) par rapport à y^2, z^2, yz ,

on les mettra sous la forme

$$(3) \quad \begin{cases} y^2 = ay + bz + c, \\ z^2 = a'y + b'z + c', \\ yz = py + qz + r, \end{cases}$$

a, b, a', b', p, q désignant des fonctions entières de x du premier degré, c, c', c'' des fonctions du second degré.

Déduisons de là deux expressions du produit $y^2 z = y y z$, en les ramenant à être du premier degré en y et z . On a

$$\begin{aligned} y^2 z &= (ay + bz + c)z = ayz + bz^2 + cz \\ &= a(py + qz + r) + b(a'y + b'z + c') + cz \\ &= (ap + ba')y + (aq + bb' + c)z + ar + bc' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y y z &= y(py + qz + r) = py^2 + qyz + ry \\ &= p(ay + bz + c) + q(py + qz + r) + ry \\ &= (ap + pq + r)y + (bp + q^2)z + pc + qr. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(pq + r - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb' - c)z + pc + qr - ar - bc' = 0.$$

On trouve d'une façon semblable

$$\begin{aligned} z^2 y &= (a'y + b'z + c')y = a'y^2 + b'zy + c'y \\ &= a'(ay + bz + c) + b'(py + qz + r) + c'y \\ &= (aa' + b'p + c')y + (ba' + qb')z + a'c + b'r, \\ zzy &= z(py + qz + r) = pyz + qz^2 + rz \\ &= q(a'y + b'z + c') + p(py + qz + r) + rz \\ &= (p^2 + qa')y + (pq + b'q + r)z + qc' + pr, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (p^2 + qa' - b'p - aa' - c')y + (pq + r - ba')z \\ + pr + qc' - b'r - ca' = 0; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y^2 z^2 &= (py + qz + r)^2 = p^2 y^2 + q^2 z^2 + 2pqyz + 2pry + 2qzr + r^2 \\ &= p^2(ay + bz + c) + q^2(a'y + b'z + c') \\ &\quad + 2pq(py + qz + r) + 2pzy + 2qzr + r^2 \\ &= (ap^2 + a'q^2 + 2p^2q + 2pr)y \\ &\quad + (bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr)z + p^2c + q^2c' + 2pqr + r^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 y^2 z^2 &= (ay + bz + c)(a'y + b'z + c') \\
 &= aa'y^2 + bb'z^2 + (ab' + ba')yz + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
 &= aa'(ay + bz + c) + bb'(a'y + b'z + c') \\
 &\quad + (ab' + ba')(py + qz + r) + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
 &= [a^2 a' + ba'b' + (ab' + ba')p + (ac' + ca')]y \\
 &\quad + [aba' + bb'^2 + (ab' + ba')q + bc' + cb']z \\
 &\quad + aa'c + bb'c' + (ab' + ba')r + cc',
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 &[ap^2 + a'q^2 + 2p^2 q + 2pr - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca')]y \\
 &+ [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb')]z \\
 &\quad + cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc' = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trois équations du premier degré en y et z ,

$$(4) \quad \begin{cases} Ly + Mz + N = 0, \\ L_1 y + M_1 z + N_1 = 0, \\ L_2 y + M_2 z + N_2 = 0, \end{cases}$$

qui donnent, à l'égard de x , l'équation

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est, en général, l'équation résultante en x , du huitième degré.

Les éléments ont pour valeurs

$$\begin{aligned}
 L &= pq + r - ba', \\
 M &= q^2 + bp - aq - bb' - c, \\
 N &= cp + qr - ar - bc', \\
 L_1 &= p^2 + a'q - b'p - aa' - c', \\
 M_1 &= pq + r - ba', \\
 N_1 &= pr + c'q - b'r - ca', \\
 L_2 &= ap^2 + a'q^2 + 2p^2 q + 2pr \\
 &\quad - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca'), \\
 M_2 &= bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr \\
 &\quad - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb'), \\
 N_2 &= cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc'.
 \end{aligned}$$

On voit que l'on a $M_1 = L$, et il est aisé de reconnaître que :

$$(7) \quad \begin{cases} L_2 = L_1 a + M a' + 2pL, & N = (q - a)L + pM - bL_1, \\ M_2 = L_1 b + Mb' + 2qL, & N_1 = (p - b')L - qL_1 + a'M, \end{cases}$$

et

$$N_2 = cL_1 + c'M + rL + p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + r(pq - ab') + cc'.$$

Comme exemple, soit

$$y^2 = bz + c, \quad z^2 = b'z + c', \quad yz = qz + r.$$

L'équation (5) donne là

$$\begin{aligned} [r^2 + c'(q^2 - bb' - c)] - [b'q^2 + 2qr - bb'^2 - bc' - cb'] \\ \times [r(qc' - b'r) + c'(qr - bc')] = 0, \end{aligned}$$

résultat qui s'obtient aisément d'autre façon.

Par l'élimination de y , on obtient

$$z^2(bz + c) = (qz + r)^2,$$

par suite,

$$(bz + c)(b'z + c') = (qz + r)^2;$$

de sorte que

$$(q^2 - bb')z^2 + (2qr - bc' - cb')z + r^2 - cc' = 0,$$

avec

$$z^2 - b'z - c' = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{-c'(2qr - bc' - cb') + b'(r^2 - cc')} &= \frac{z}{r^2 - cc' + c'(q^2 - bb')} \\ &= \frac{1}{-b'(q^2 - bb') - 2qr + bc' + cb'}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} [r + c'(q^2 - bb' - c)]^2 - [b'(q^2 - bb') + 2qr - bc' - cb'] \\ \times [c'(2qr - bc' - cb') - b'(r^2 - cc')] = 0, \end{aligned}$$

comme plus haut.

Les équations ainsi obtenues se prêtent à une discussion qui n'est pas sans intérêt.

Deux circonstances principales sont à examiner : celle où le déterminant Δ n'est pas nul identiquement, et celle où il se trouve nul pour toute valeur de x .

Soit Δ une fonction de x ou une constante autre que zéro.

Si Δ ne dépend pas de x sans être nul, les équations (4) sont incompatibles pour toute valeur finie de x . Les équations (1) n'ont pas de solution finie.

Si Δ dépend de x , l'équation (5), du huitième degré au plus, aura des racines. Attribuons à x une valeur qui annule Δ . Pour cette valeur, les équations (4) se réduiront à deux, ou se trouveront incompatibles, ou se réduiront à une seule, ou encore se trouveront identiquement vérifiées, en ce que la valeur de x annulera à la fois les coefficients de y , de z , et les termes indépendants de y et de z .

Dans le premier de ces cas, deux équations étant distinctes, les coefficients de y et de z ne donneront pas un déterminant nul ; on en pourra déduire des valeurs de y et de z . De là une solution des équations (1) : c'est le cas général.

Si, dans les trois équations (4), les coefficients de y et de z se trouvent proportionnels sans que les autres termes soient dans les mêmes rapports, le système de ces équations n'aura pas de solution ; il en sera de même des équations (1).

Si les équations se réduisent à une seule par la proportionnalité des coefficients et des termes connus, il y aura lieu d'y joindre l'une des équations (3). Comme il ne peut en être autrement lorsque les équations (1) présentent deux solutions composées d'une même valeur de x avec des valeurs de y et de z qui ne sont pas les mêmes, l'équation résultante (5) doit alors présenter, comme racine double, au moins la valeur de x dont il s'agit.

Nous allons reconnaître par une analyse directe que cela a bien lieu.

Dans les conditions dont il s'agit, on a, pour la valeur de x considérée,

$$\frac{L_1}{L} = \frac{M_1}{M} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{L_2}{L} = \frac{M_2}{M} = \frac{N_2}{N}, \quad \frac{L_3}{L} = \frac{M_3}{M} = \frac{N_3}{N}.$$

Eu égard aux relations (7), on a

$$\Delta = N_1(L^2 - ML_1) + N_2[-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1] \\ + N[-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1].$$

Cherchons ce que devient la dérivée de Δ par rapport à x pour la racine dont il s'agit.

Il est à observer que, cette racine annulant les coefficients de N , N_1 , N_2 dans Δ , nous pouvons omettre les dérivées de ces éléments. Nous aurons donc, en faisant l'omission, et tenant compte des valeurs de N_2 et de N_1 ,

$$\begin{aligned}
 ND_x \Delta &= \frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L} (L^2 - ML_1)' \\
 &+ \frac{L_1}{L} \{-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1\}' \\
 &+ (-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1)' \\
 &= 2L'(aL_1 + a'M + 2pL) - L'_1 \frac{L}{L_1} (aL_1 + a'M + 2pL) \\
 &- M' \frac{L_1}{L} (aL_1 + a'M + 2pL) \\
 &+ \frac{L_1}{L} \{-4qLL' - 2L^2q' + 2a'MM' \\
 &\quad + M^2(a')' + L'M(2p - b') + LM'(2p - b') \\
 &\quad + LM[2p' - (b')'] - L'L_1b - LL'_1b - LL_1(b)' + L'_1Ma \\
 &\quad + L_1M'a + L_1M(a)'\} \\
 &- 4LL'p - 2L^2p' - 2bL_1L'_1 + L_1^2(b)' \\
 &+ L'L_1(2q - a) + LL'_1(2q - a) \\
 &+ LL_1[2q' - (a)'] - L'Ma' - LM'a' - LM(a')' \\
 &+ L'_1Mb' + L_1M'b' + L_1M(b')' \\
 &= aL_1L' + a'ML' - aLL'_1 - a' \frac{LM}{L_1} L'_1 \\
 &- 2pML'_1 - 2qL_1L' + (2p - b')LL' \\
 &- b \frac{L_1^2}{L} L' + aLL'_1 + bL_1L'_1 + (2q - a)LL'_1 + b'ML'_1.
 \end{aligned}$$

Mais la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{M},$$

à cause de $\frac{L}{L_1} = \frac{M}{L}$, donne

$$\frac{bLL_1}{M} = \frac{bL_1^2}{L} = aL_1 + a'M + 2pL - b'L - 2qL_1,$$

et la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L_1} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{L}$$

donne de même

$$a' \frac{LM}{L_1} = bL_1 + b'M + 2qL - aL - 2pM.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$ND_x \Delta = 0;$$

la racine considérée est donc racine double au moins.

Lorsqu'une racine de $\Delta = 0$ annule à la fois L , M , L_1 , N , N_1 , N_2 , les équations (4) disparaissent. C'est alors une racine triple de Δ , car elle annule les deux premières dérivées de Δ , puisque les termes de ce déterminant sont du troisième degré à l'égard de ces éléments.

Comme on a, pour lors,

$$c = q^2 + bp - aq - bb',$$

$$c' = p^2 + a'q - aa' - b'p,$$

$$r = pq - ba',$$

les équations (3) deviennent

$$y^2 = ay + bz + q^2 + bp - aq - bb',$$

$$z^2 = a'y + b'z + p^2 - a'q - aa' - b'p,$$

$$yz = py + qz + ba' - pq,$$

c'est-à-dire

$$(y - q)(y + q) = a(y - q) + b(z + p - b'),$$

$$(z - p)(z + p) = b'(z - p) + a'(y + q - a),$$

$$(z - p)(y - q) = ba'$$

ou

$$(y - q)(y + q - a) = b(z + p - b'),$$

$$(z - p)(z + p - b') = a'(y + q - a),$$

$$(z - p)(y - q) = ba'.$$

De là

$$z - p = \frac{ba'}{y - q},$$

$$z + p - b' = \frac{ba'}{y - q} + 2p - b' = \frac{y - q(2p - b') + ba'}{y - q};$$

puis

$$(y - q)^2(y + q - a) = b(y - q)(2p - b') + b^2a'.$$

Ainsi, y est donné par une équation du troisième degré; trois couples des valeurs de y et de z correspondent à la valeur de x .

Là, si b devient nul, on a

$$(y - q)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y + q - a = 0.$$

Pour $(y - q)^2 = 0$, on a

$$(z - p)(z + p - b') = a'(2q - a),$$

et, pour $y + q - a = 0$, on a

$$z - p = 0.$$

Les équations (3) ne comportent pas qu'il y ait pour une valeur de $x = x_1$ quatre couples de valeurs correspondantes de y et de z , que par suite l'équation résultante ait une racine quadruple.

Car, si les équations (1)

$$P = Ax^2 + \dots + D = 0,$$

$$Q = A_1x^2 + \dots + D_1 = 0,$$

$$R = A_2x^2 + \dots + D_2 = 0$$

présentaient quatre solutions pour $x = x_1$, on aurait, pour cette valeur de x ,

$$R = \lambda P + \mu Q;$$

par suite,

$$A'_2 = \lambda A' + \mu A'_1,$$

$$A''_2 = \lambda A'' + \mu A''_1,$$

$$B_2 = \lambda B + \mu B_1,$$

et, en conséquence,

$$\delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons à voir, en second lieu, ce qui concerne les équations (3) et (4), quand le déterminant Δ est nul pour toute valeur de x .

Si deux des équations (4) présentent alors pour y et z des coefficients qui ne soient pas proportionnels pour toute valeur de x , les équations (4), x restant arbitraire, reviennent à ces deux équations. Celles-ci détermineront alors y et z pour toute valeur attribuée à x arbitrairement. Il y aura une ligne commune sur les surfaces représentées par les équations (3), mais cette ligne ne présentera qu'un point, en général, dans un plan quelconque parallèle au plan yz . Comme, d'ailleurs, pour toute valeur de x d'un module fini, les équations (3) ne peuvent admettre que des valeurs finies de y et de z , la ligne sera une ligne droite.

Cette droite pourra analytiquement se fixer par deux points particuliers. Mais les trois surfaces n'auront-elles pas d'autres points communs que ceux de la droite? Pour étudier la question, considérons le cas où l'axe des x est une droite commune.

Les équations (3) sont alors

$$y^2 = ay + bz, \quad z^2 = a'y + b'z, \quad yz = py + qz,$$

et les équations (4) deviennent

$$\begin{aligned} (pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z &= 0, \\ (p^2 + a'q - b'p - aa')y + (pq - ba')z &= 0, \\ [ap^2 + a'q^2 + 2p^2q - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p]y \\ + [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q]z &= 0, \end{aligned}$$

Les deux premières de ces dernières équations se réduisent à une seule pour toute valeur de x satisfaisant à la condition

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0.$$

C'est, en général, une équation du quatrième degré qui donnera quatre valeurs de x . Pour avoir les valeurs de y et de z correspondantes à une racine, on prendra

$$\begin{aligned} (pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z &= 0, \\ yz &= py + qz. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned} \frac{y}{q^2 + bp - aq - bb'} &= \frac{z}{ba' - pq}, \\ y(ba' - pq) &= p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq), \\ z(q^2 + bp - aq - bb') &= p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq). \end{aligned}$$

Pour que l'équation $y^2 = ay + bz$ soit vérifiée par les valeurs de y et de z ainsi obtenues, il faut avoir

$$y(q^2 + bp - aq - bb') = a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq),$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{q^2 + bp - aq - bb'}{ba' - pq} &= \frac{a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq)}{p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq)} \\ &= \frac{b(ba' - pq)}{-aba' + bp^2 - bb'p + a'bq} = \frac{ba' - pq}{p^2 + a'q - b'p - aa'}, \end{aligned}$$

ce qui est la relation supposée.

L'équation $z^2 = a'y + b'z$ est également vérifiée.

Ainsi, outre la droite commune, il y a quatre points communs sur lesquels, bien entendu, il peut s'en trouver de coïncidents ou passant à l'infini.

Observons toutefois que, si l'on avait pour toutes valeurs de x

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0$$

ou

$$\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'} = \frac{q^2 + bp - aq - bb'}{pq - ba'},$$

on satisferait aux équations proposées, sans détermination de x , par des valeurs de y et de z déduites de

$$yz = py + qz \quad \text{et} \quad (qp - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z = 0.$$

Ces valeurs, étant

$$\begin{aligned} y &= q + \frac{p(q^2 + bp - aq - bb')}{ba' - pq}, \\ z &= p + \frac{q(ba' - pq)}{q^2 + bp - aq - bb'}, \end{aligned}$$

seraient du premier degré en x , si le rapport $\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'}$ était constant. Il y aurait donc alors une seconde droite commune.

Mais on peut voir aisément que

$$\begin{aligned} (ax^2 + bx + c)^2 &= \left[ax^2 + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \\ &\times \left[ax^2 + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]; \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ = \frac{ax^2 + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{ax^2 + bx + c},$$

identité où les membres varient avec x .

Si le rapport $\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'}$ était donc dans ces conditions, les expressions précédentes de y et de z ne seraient plus du premier degré en x . Avec la droite ox commune, les trois surfaces auraient une ligne du troisième degré commune, une cubique commune, c'est-à-dire que l'intersection complète des deux premières appartiendrait à la troisième. Comme la forme des trois équations ne comporte pas ce fait, puisque la troisième ne saurait être une combinaison linéaire des autres, il y a lieu de conclure que pareille circonstance ne peut se présenter.

D'après ce qui vient d'être vu, pour en revenir aux équations (3), lorsque le déterminant Δ est nul identiquement et que celui des coefficients de y et de z dans deux des équations (4) ne l'est pas, on trouvera la droite commune et les points qui sont en outre communs, en posant

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = u,$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = v,$$

ou plutôt

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma x + \delta,$$

$$z = \alpha' u + \beta' v + \gamma' x + \delta',$$

substituant ces expressions de y et de z dans les deux équations (4) à considérer, puis égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x . Les constantes pourront se déterminer de façon que l'on ait ainsi deux équations homogènes en u et v . La droite commune sera donnée par $u = 0$, $v = 0$, par suite, $y = \gamma x + \delta$, $z = \gamma' x + \delta'$; et l'équation relative aux valeurs particulières de x s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant des coefficients de u et de v dans les résultats de la substitution ou celui des coefficients de y et de z dans les premières équations.

Prenons pour exemple les trois équations

$$\begin{aligned} y^2 &= xz, \\ z^2 &= (a' + b' + 2x)\gamma + (b' + x)z + a'x + 2x^2, \\ yz &= -xy - xz - x^2. \end{aligned}$$

Les deux premières équations (4) sont alors

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)xy + (b' + x)xz + a'x^2 + x^3 &= 0, \\ 2(a' + x)xy + (a' + b' + 2x)xz + (a' - b')x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} y &= \alpha u + \beta v + \gamma x + \delta, \\ z &= \alpha' u + \beta' v + \gamma' x + \delta', \end{aligned}$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)x(\gamma x + \delta) + (b' + x)x(\gamma' x + \delta') + a'x^2 + x^3 &= 0, \\ 2(a' + x)x(\gamma x + \delta) + (a' + b' + 2x)x(\gamma' x + \delta') + (a' - b')x^2 &= 0, \end{aligned}$$

identiquement, d'où

$$\begin{aligned} 2\gamma + \gamma' + 1 &= 0, \\ (a' + b')\gamma + 2\delta + b'\gamma' + \delta' + a' &= 0, \\ (a' + b')\delta + b'\delta' &= 0, \\ 2\gamma + 2\gamma' &= 0, \\ 2\delta + 2a'\gamma + (a' + b')\gamma' + 2\delta' + a' - b' &= 0, \\ 2a'\delta + (a' + b')\delta' &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit, supposé $a' \geq b'$, qu'on aura

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \text{puis} \quad \gamma = -1, \quad \gamma' = 1,$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)x(\alpha u + \beta v) + (b' + x)x(\alpha' u + \beta' v) &= 0, \\ 2(a' + x)x(\alpha u + \beta v) + (a' + b' + 2x)x(\alpha' u + \beta' v) &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [(a' + b' + 2x)x + (b' + x)\alpha']xu + [(a' + b' + 2x)\beta + (b' + x)\beta']xv &= 0, \\ [2(a' + x)\alpha + (a' + b' + 2x)\alpha']\alpha u \\ + [2(a' + x)\beta + (a' + b' + 2x)\beta']xv &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$[(a' + b' + 2x)\alpha + (b' + x)\alpha'] [2(a' + x)\beta + (a' + b' + 2x)\beta'] x^2 \\ - [(a' + b' + 2x)\beta + (b' + x)\beta'] [2(a' + x)\alpha + (a' + b' + 2x)\alpha'] x^2 = 0,$$

ce qui fait

$$[(a' + x)^2 + (b' + x)^2] x^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

C'est bien

$$(a' + b' + 2x)^2 - 2(a' + x)(b' + x);$$

de là

$$x^2 = 0 \quad \text{et} \quad a' + x = \pm (b' + x)i, \\ x(1 \mp i) = -a' \pm b'i, \\ x = -\frac{a' + b'}{2} \pm \frac{b' - a'}{2}i.$$

La droite commune a d'ailleurs pour équations

$$y = -x \quad \text{et} \quad z = x.$$

Les équations (4) pourront être incompatibles, en ce que les coefficients de y et de z y soient dans des rapports constants autres que ceux des autres termes. Alors les équations (3) n'auront pas de solution.

Soient les équations (4) se réduisant à une seule par la proportionnalité des termes.

On tirera de cette équation la valeur de y ou de z et on la portera dans l'une des équations (3) : de là, une équation en x du second degré, par suite, pour toute valeur de x , deux couples de valeurs de y et de z , ou, pour les trois surfaces, deux points communs dans tout plan parallèle au plan yz . C'est ce qui peut avoir lieu quand les surfaces ont deux droites communes, et encore quand elles ont une conique commune.

Or, quand deux surfaces du second degré P et Q ont deux droites communes D et D' du même système sur chacune, leur intersection se complète par deux autres droites analogues D_1 et D'_1 d'autre système qui peuvent se confondre. Qu'une troisième surface R contienne D et D' , elle coupera P suivant deux autres droites D_2, D'_2 du système de D_1 et D'_1 , et Q suivant les droites analogues D_3, D'_3 . Les trois surfaces n'auront donc de points communs que sur D et D' , ou bien elles auront avec ces droites une

troisième droite commune les rencontrant, ou bien elles auront avec elles deux autres droites communes. Dans la circonstance qui nous occupe, le premier de ces cas sera le seul possible.

Si les trois surfaces ont une conique commune, les trois équations étant susceptibles d'être

$$P = 0, \quad Q = kP + uv = 0, \quad R = k'P + uw = 0,$$

il y aura, outre la conique commune, deux points communs donnés par $P = 0, v = 0, w = 0$. Les équations (1) et (3) seront telles que, deux à deux, elles donneront, par une combinaison linéaire convenable, le système de deux plans, et, dans les combinaisons, il y aura un plan commun. Par cette voie, ce cas se distinguera immédiatement du précédent. Il est d'ailleurs à observer que, pour chacune des valeurs de x relatives aux points communs en dehors de la conique commune, l'équation du premier degré en y et z deviendra identique, en sorte que ces valeurs résulteront d'un facteur en x commun aux termes de l'équation.

C'est ainsi que, pour

$$\begin{aligned} P &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D = 0, \\ Q &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(y + g)(z + k) = 0, \\ R &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(z + h)(z + k) = 0, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} yz &= -ky - gz - gk, \\ z^2 &= -(h + k)z - hk, \\ y^2 &= A'(h + k)z - Ax^2 - D + A''hk. \end{aligned}$$

Les trois équations du premier degré sont

$$\begin{aligned} 0y + (g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z + k(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2) &= 0, \\ 0y + 0z + 0 &= 0, \\ 0y - (h + k)(g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z - k(h + k)(Ax^2 + D + A''h^2 + g^2) &= 0. \end{aligned}$$

Il n'y a bien là qu'une seule équation

$$(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2)(z + k) = 0,$$

d'où le plan de la conique commune par $z + k = 0$, et, pour les deux points communs par ailleurs,

$$Ax^2 + D + g^2 + A''h^2 = 0.$$

Une dernière circonstance est celle où les équations (4) deviennent identiques pour toute valeur de x . Cela arrive quand on a, quelque valeur qui s'attribue à x ,

$$L = 0, L_1 = 0, M = 0, p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + v(pq - ab') = 0.$$

Les équations (3) peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} (y - q)(y + q - a) &= b(z + p - b'), \\ (z - p)(z + p - b') &= a'(y + q - a), \\ (z - p)(y - q) &= ba'. \end{aligned}$$

Les surfaces représentées par les deux premières équations ont une droite commune que déterminent

$$\begin{aligned} y + q - a &= 0, \\ z + p - b' &= 0, \end{aligned}$$

et tout point appartenant à ces mêmes surfaces en dehors de la droite appartient à la troisième surface. Il y a donc là une cubique commune ayant pour équations

$$\begin{aligned} (y - q)^2 (y + q - a) &= b[(2p - b')(y - q) + ba'], \\ z - p &= \frac{ba'}{y - q}. \end{aligned}$$

II.

Nous avons encore à traiter les équations (1) lorsque les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls à la fois, de sorte que ces équations ne peuvent alors se résoudre par rapport aux carrés et aux produits de deux des inconnues x, y, z .

Nous écarterons d'abord le cas où, les termes du second degré ayant leurs coefficients proportionnels, à prendre les équations deux à deux, on pourra immédiatement, par l'élimination de ces

termes, obtenir deux équations du premier degré en x, y, z ; cela a lieu en particulier pour trois sphères. Il en est ainsi quand les déterminants mineurs relatifs aux déterminants δ sont tous nuls.

Si, dans le déterminant δ , les éléments sont tous nuls, les équations, étant

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D &= 0, \\ A_1x^2 + 2B'_1xz + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x^2 + 2B'_2xz + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

sont du premier degré en y et z ; il s'ensuit alors

$$\begin{vmatrix} B''x + C' & B'x + C'' & Ax^2 + 2Cx + D \\ B''_1x + C'_1 & B'_1x + C''_1 & A_1x^2 + 2C_1x + D_1 \\ B''_2x + C'_2 & B'_2x + C''_2 & A_2x^2 + 2C_2x + D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait une équation analogue pour y si les éléments de δ' étaient nuls, une équation en z si ceux de δ'' l'étaient.

Au cas où les trois coefficients de y^2 , ceux de z^2 , mais non ceux de yz , ne sont pas nuls à la fois, les équations étant

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D &= 0, \\ A_1x^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x^2 + 2B_2yz + 2B'_2zx + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

on pourra, par deux éliminations de yz , obtenir deux équations du premier degré en y et z ; en y joignant l'une des premières équations contenant yz , on aura un système équivalent, et une équation résultante en x s'ensuivra immédiatement. Pour l'obtenir sous forme d'un déterminant, observons que, en désignant les trois équations par

$$\begin{aligned} ayz + by + cz + p &= 0, \\ \alpha y + \beta z + q &= 0, \\ \alpha'y + \beta'z + r &= 0, \end{aligned}$$

et y joignant

$$\begin{aligned} \alpha y^2 + \beta yz + qy &= 0, \\ \alpha'y^2 + \beta'yz + ry &= 0, \\ \alpha yz + \beta z^2 + qz &= 0, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & 0 & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & 0 & \beta' & r & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$- \begin{vmatrix} a & b & c & p \\ 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & \alpha' & \beta' & r \\ -\alpha'\beta + \alpha\beta' & -\alpha'q + \alpha r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & q \\ \alpha' & \beta' & r \\ \alpha(-\alpha'q + \alpha r) - b(-\alpha'\beta + \alpha\beta') & -(\alpha\beta' - \alpha'\beta)c & -p(-\alpha'\beta + \alpha\beta') \end{vmatrix} = 0.$$

équation du sixième degré en x .

Si les coefficients de yz sont nuls, ainsi que ceux de y^2 ou de z^2 , ceux de z^2 par exemple, les équations étant

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$A_1x^2 + \dots + D_1 = 0,$$

$$A_2x^2 + \dots + D_2 = 0,$$

on pourra en déduire deux équations ne contenant pas y^2 , et l'on aura ainsi

$$A'y^2 + ay + bz + p = 0,$$

$$\alpha y + \beta z + q = 0,$$

$$\alpha'y + \beta'z + r = 0,$$

d'où

$$\alpha y^2 + \beta yz + qy = 0,$$

$$\alpha'y^2 + \beta'yz + ry = 0.$$

De là

$$\begin{vmatrix} A' & 0 & a & b & p \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A' & a & b & p \\ 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \beta\alpha' - \alpha\beta' & \beta r - \beta'q & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & q \\ \alpha' & \beta' & r \\ A'(\beta r - \beta'q) - a(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -b(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -p(\beta\alpha' - \alpha\beta') \end{vmatrix} = 0.$$

Ces premiers cas particuliers ainsi traités, soient les équations (1) au cas où les trois déterminants δ sont nuls, sans que deux colonnes y aient leurs éléments nuls; par exemple, δ étant

$$\text{nul, } \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \text{ nous supposerons que dans deux co-}$$

lonnes au moins les éléments ne sont pas nuls. Si cela est pour les deux dernières colonnes, les trois déterminants $A'_1B_2 - A''_2B_1$, $A''B_2 - A'_2B$, $A''B_1 - A'_1B$ pourront ne pas être nuls à la fois. Si l'on multiplie les équations (1) respectivement par ces mineurs, et qu'on ajoute, les termes en y^2, yz, z^2 disparaîtront, et l'on aura une équation telle, que

$$ax^2 + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Il en sera de même si l'on multiplie par $A'_1B_2 - A'_2B_1$, $A'B_2 - A'_2B$, $A'B_1 - A'_1B$, au cas où ces mineurs ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) supposées distinctes.

Si ces deux suites de déterminants mineurs sont nulles à la fois

avec $B \geq 0$, on aura

$$A'_1 = A'' \frac{B_1}{B}, \quad A'_2 = A'' \frac{B_2}{B}, \quad A'_3 = A' \frac{B_3}{B}, \quad A'_4 = A'' \frac{B_4}{B}.$$

Qu'on multiplie alors la première équation par $\frac{B_1}{B}$ et qu'on soustraye la seconde, les termes en y^2 , z^2 , yz disparaîtront, et l'on aura une équation de la forme indiquée ci-dessus.

Dans les conditions supposées, on obtiendra de même les équations

$$\begin{aligned} a'_1 y^2 + 2b_1 yz + 2b'_1 xy + 2c_1 x + 2c'_1 y + 2c'_1 z + d_1 &= 0, \\ a'_2 z^2 + 2b_2 yz + 2b'_2 xz + 2c_2 x + 2c'_2 y + 2c'_2 z + d_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si les trois équations sont distinctes, qu'aucune d'elles ne puisse se déduire des autres, elles pourront remplacer les premières. C'est ce qui a lieu lorsque les coefficients en a'_1 , a'_2 sont chacun différents de zéro, même lorsqu'un seul d'entre eux est nul.

Les trois équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha y + \alpha' z + p &= 0, \\ a'_1 y^2 + 2b_1 yz + \beta y + \beta' z + q &= 0, \\ a'_2 z^2 + 2b_2 yz + \gamma y + \gamma' z + r &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on avait

$$a'_1 = 0 \quad \text{et} \quad a'_2 = 0,$$

les deux dernières équations pourraient devenir équivalentes; il y aurait alors à prendre à la place de l'une d'elles l'une des équations (1).

C'est pourquoi il convient de considérer d'abord les trois équations

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D &= 0, \\ 2(b''x + c''')y + 2(b'x + c''')z + ax^2 + 2cx + d &= 0, \\ 2b_1 yz + 2c'_1 y + 2c'_1 z + 2c_1 x + d_1 &= 0, \end{aligned}$$

b_1 supposé différent de zéro, et le terme yz pouvant, par suite, avoir été éliminé de la première équation. Sous une désignation plus simple, les équations sont

$$\begin{aligned} A'y^2 + A''z^2 + 2y + \alpha'z + p &= 0, \\ \beta y + \beta'z + q &= 0, \\ 2b_1 yz + \gamma y + \gamma'z + r &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la seconde par $b_1 y$ et $b_1 z$, nous aurons

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 + \beta' b_1 yz + q b_1 y &= 0, \\ \beta b_1 yz + \beta' b_1 z^2 + b_1 qz &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne, eu égard à la troisième,

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 - \beta'(\gamma y + \gamma'z + r) + q b_1 y &= 0, \\ -\beta(\gamma y + \gamma'z + r) + \beta' b_1 z^2 + b_1 qz &= 0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 + (q b_1 - \beta' \gamma) y - \beta' \gamma' z - \beta' r &= 0, \\ \beta' b_1 z^2 - \beta \gamma y + (b_1 q - \beta \gamma') z - \beta r &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant la première équation par βy , on a

$$A' \beta y^3 + A'' \beta y z^2 + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta y z + p \beta y = 0,$$

ce qui se change en

$$-A' y^2 (\beta' z + q) - A'' \frac{\beta z}{b_1} (\gamma y + \gamma' z + r) + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta y z + p \beta y = 0,$$

puis

$$\begin{aligned}A' \beta' y \frac{1}{b_1} (\gamma y + \gamma' z + r) - A' q y^2 - \frac{A'' \beta \gamma}{b_1} y z - A'' \frac{\beta \gamma'}{b_1} z^2 - \frac{A'' \beta r}{b_1} z \\ + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta y z + p \beta y = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\left(\frac{A' \beta' \gamma}{b_1} - A' q + \alpha \beta \right) y^2 - \frac{A'' \beta \gamma'}{b_1} z^2 + \left(\frac{A' \beta' \gamma'}{b_1} - A'' \frac{\beta \gamma}{b_1} + \alpha' \beta \right) y z \\ + \left(\frac{A' \beta' \gamma'}{b_1} + p \beta \right) y - \frac{A'' \beta r}{b_1} z = 0,\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}(A' \beta' \gamma - A' q b_1 + \alpha \beta b_1) y^2 - A'' \beta \gamma' z^2 \\ + \left(A' \beta' r + p b_1 \beta - A' \beta' \gamma' \gamma \frac{1}{b_1} + A'' \beta \gamma^2 \frac{1}{b_1} - \alpha' \beta \gamma \right) y \\ - \left[A'' \beta r + \frac{\gamma'}{b_1} (A' \beta' \gamma' - A'' \beta \gamma + \alpha' \beta b_1) \right] z \\ - \frac{r}{b_1} (A' \beta' \gamma' - A'' \beta \gamma + \alpha' \beta b_1) = 0.\end{aligned}$$

Les cinq équations que nous venons d'obtenir en y^2 , z^2 , y et z

donnent finalement

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{A}'' & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \beta b_1 & 0 & qb_1 - \beta'\gamma & -\beta'\gamma' & -\beta'r \\ 0 & \beta'b & -\beta\gamma & b_1q - \beta\gamma' & -\beta r \\ u & -\mathbf{A}''\beta\gamma' & u' & u'' & u''' \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$u = \mathbf{A}'(\beta'\gamma - b_1q) + \alpha\beta b_1,$$

$$u' = \mathbf{A}'\beta' \left(r - \frac{\gamma'\gamma}{b_1} \right) + \mathbf{A}''\beta\gamma^2 \frac{1}{b_1} + \beta(b_1p - \alpha'\gamma),$$

$$u'' = -\mathbf{A}''\beta r - \frac{\gamma'}{b_1} (\mathbf{A}'\beta'\gamma' - \mathbf{A}''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1),$$

$$u''' = -\frac{r}{b_1} (\mathbf{A}'\beta'\gamma' - \mathbf{A}''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1).$$

équation du huitième degré, en général, où le coefficient de x^8 est

$$\begin{aligned} b_1^2 \{ & -\mathbf{A}'\mathbf{A}''\alpha^2 + 4(\mathbf{A}''\mathbf{B}''b'' + \mathbf{A}'\mathbf{B}'b')\alpha^2 \\ & - 4[\mathbf{A}(\mathbf{A}'b'^2 + \mathbf{A}''b''^2) + 4b'b''\mathbf{B}'\mathbf{B}'']\alpha^2 \\ & + 16b'b''(b'\mathbf{B}'' + b''\mathbf{B}')\alpha\mathbf{A} - 16b'^2b''^2\mathbf{A}^2 \}. \end{aligned}$$

On peut obtenir l'équation avec des éléments simples sous la forme d'un déterminant du neuvième ordre.

Le cas particulier de $\alpha'_1 = 0$ mérite encore d'être traité à part. Les équations étant

$$2(b''x + c')y + 2(b'x + c'')z + ax^2 + 2cx + d = 0,$$

$$2b_1yz + 2(b''_1x + c'_1)y + 2c''_1z + 2c_1x + d_1 = 0,$$

$$\alpha''_1 z^2 + 2b_2yz + 2(b''_2x + c''_2)z + 2c'_2y + 2c_2x + d_2 = 0,$$

désignons-les par

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$

$$2b_1yz + \beta y + \beta' z + q = 0,$$

$$\alpha''_1 z^2 + 2b_2yz + \gamma y + \gamma' z + r = 0.$$

On en déduit

$$\alpha y^2 + \alpha' yz + py = 0,$$

$$\alpha yz + \alpha' z^2 + pz = 0,$$

$$\alpha y^2 z + \alpha' yz^2 + pyz = 0,$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} 2b_1 y z^2 + \beta y z + \beta' z^2 + q z &= 0, \\ a_2'' z^2 y + 2b_2 y^2 z + \gamma y^2 + \gamma' y z + r y &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -2b_1 2b_2 y^2 z - 2b_1 \gamma y^2 + a_2'' \beta' z^2 + (a_2'' \beta - 2b_1 \gamma') y z - 2b_1 r y + a_2'' q z &= 0, \\ -2b_1 2b_2 y z^2 - 2b_2 \beta y z - 2b_2 \beta' z^2 - 2b_2 q z &= 0, \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} 2b_1 2b_2 p y z - 2b_1 \alpha \gamma y^2 + (a_2'' \alpha \beta' - 2b_2 \alpha' \beta') z^2 \\ + (a_2'' \beta \alpha - 2b_1 \gamma' \alpha - 2b_2 \beta \alpha') y z - 2b_1 r \alpha y + (a_2'' q \alpha - 2b_2 q \alpha') z &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -2b_1 \alpha \gamma y^2 + (a_2'' \alpha - 2b_2 \alpha') \beta' z^2 \\ + (a_2'' \alpha \beta - 2b_1 \alpha \gamma' - 2b_2 \alpha' \beta + 2b_1 2b_2 p) y z \\ - 2b_1 r \alpha y + (a_2'' \alpha - 2b_2 \alpha') q z &= 0. \end{aligned}$$

Il y a là six équations d'où résulte

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. = 0,$$

$$-2b_1 x \gamma \quad (a_2'' x - 2b_2 x') \beta' \quad (a_2'' \beta - 2b_1 \gamma') x - 2b_2 x' \beta + 2b_1 2b_2 p \quad -2b_1 r x \quad (a_2'' x - 2b_2 x') q \quad 0$$

ce qui peut se réduire, suppression faite du facteur α , à

$$= \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a_2'' x - 2b_2 x' \beta' & a_2'' x \beta - 2b_1 x \gamma' + 2b_1 x' \gamma - 2b_2 x' \beta + 2b_1 2b_2 p & 2b_1 p \gamma - 2b_1 r x & (a_2'' x - 2b_2 x') q & 0 \end{array} \right|.$$

Les termes du degré le plus élevé sont là du septième et proviennent de

$$(a_2'' \alpha \beta - 2b_1 \alpha \gamma' - 2b_2 \alpha' \beta + 2b_1 2b_2 p) \alpha' \beta' \gamma' p,$$

ce qui donne

$$x^7 (a_2'' b'' b_1'' - 2b_1 b'' b_2' - 2b_2 b' b_1'' + 2b_1 2b_2 a) b' b_1'' b_2' a.$$

En cas de $a'_2 = 0$, cette équation peut se réduire, suppression faite de α' , à

0	α	α'	p
$2b_1$	β	β'	q
$2b_2$	γ	γ'	r
$2b_2\alpha\beta' - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_1\alpha'\gamma - 2b_2\alpha'\beta + 2b_12b_2p$	$2b_1p\gamma - 2b_1r\alpha$	$2b_2\beta'p - 2b_2\alpha'q$	0

ou à

0	α	α'	p
$2b_1$	β	β'	q
$2b_2$	γ	γ'	r
$2b_1(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + 2b_2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 2b_12b_2p$	$2b_1(p\gamma - r\alpha)$	$2b_2(\beta'p - \alpha'q)$	0

le terme du plus haut degré γ est

$$ab_1'b_1'(-2b_1b''b_2' - 2b_2b'b_1'' + 2b_12b_2a)x^4.$$

Remarque. — Quand on fait $b_1 = 0$ dans l'équation due, plus haut, à l'élimination de y^2z et yz^2 , on obtient

$$(a_2'\alpha - 2b_2\alpha')(\beta\gamma z + \beta'z^2 + qz) = 0;$$

or, l'équation résultante pour les équations

$$\alpha y + \alpha'z + p = 0,$$

$$\beta y + \beta'z + q = 0,$$

$$\alpha_2'z^2 + 2b_2\gamma z + \gamma\gamma + \gamma'z + r = 0$$

peut s'obtenir en y joignant

$$\alpha y^2 + \alpha'\gamma z + p\gamma = 0,$$

$$\alpha\gamma z + \alpha'z^2 + pz = 0$$

et

$$\beta\gamma z + \beta'z^2 + qz = 0.$$

L'équation précédente, sauf à en dégager le facteur $a_2'\alpha - 2b_2\alpha'$, peut donc, quand on y fait $b_1 = 0$, s'appliquer à cette circonstance.

Mais, plus simplement, l'équation résultante est alors

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ 0 & \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est, en écartant le facteur α ,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En prenant l'équation

$$\beta y^2 + \beta' yz + qy = 0$$

au lieu de

$$\beta yz + \beta' z^2 + qz = 0,$$

on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta & 0 & \beta' & q & 0 & 0 \\ 0 & a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha'q - \beta p & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha q - \beta p & 0 & 0 \\ -a''_2\alpha + 2b_2\alpha' & \alpha'\gamma & -a''_2p + \alpha'\gamma' & \alpha'r \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ (\alpha q - \beta p)(\alpha_2' \alpha - 2b_2 \alpha') + \alpha' \gamma (\alpha \beta' - \alpha' \beta) & (-\alpha_2' p + \alpha' \gamma')(\alpha \beta' - \alpha' \beta) & \alpha' r (\alpha \beta' - \alpha' \beta) \end{vmatrix}$$

déterminant qui s'annule pour $\alpha' = 0$, de sorte que $\alpha' \gamma$ est en un facteur à supprimer.

Le résultat qui s'ensuit s'obtient plus simplement en résolvant par rapport à γ et à z , les deux premières équations de la question et substituant leurs valeurs dans la troisième. De même, au cas $b_2 = 0$, l'équation résultante devient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ \alpha_2' & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \alpha_2' \alpha \beta & \alpha_2' \alpha \beta - 2b_1 \alpha \gamma' + 2b_1 \alpha' \gamma & 2b_1 p \gamma - 2b_1 r \alpha & \alpha_2' \alpha q & 0 \end{vmatrix} =$$

équation où le terme du septième degré est

$$x^7 (\alpha_2' b' b_1' - 2b_1 b' b_2') b' b_1' b_2' a.$$

Si b_1 et b_2 sont nuls, suppression opérée de $\alpha_2' \alpha$, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha_2' & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut se réduire à

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ -\gamma \alpha \beta' - \beta \alpha' & -\gamma \alpha \beta' - \alpha' \beta + \alpha_2' & -p \beta + q \alpha & -r \alpha \beta' - \beta \alpha' \end{vmatrix}$$

Soient enfin les trois équations

$$x^2 + x'z + p = 0,$$

$$\alpha_1' x^2 + 2b_1 xz + \beta x - \beta' z + q = 0,$$

$$\alpha_2' x^2 + 2b_2 xz - \gamma x - \gamma' z + r = 0,$$

au cas de $\alpha', \alpha_2' \neq 0$.

Multiplions la première par $a'_1 \gamma$, et dans le produit remplaçons $a'_1 \gamma^2$ par sa valeur tirée de la seconde; nous aurons

$$(-2b_1\alpha + a'_1\alpha')\gamma z + (-\alpha\beta + pa'_1)\gamma - \alpha\beta'z - \alpha q = 0.$$

En multipliant la même équation par $a''_2 z$, et tenant compte de la valeur de $a''_2 z^2$, on a

$$(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)\gamma z - \alpha'\gamma\gamma + (-\alpha'\gamma' + a''_2 p)z - \alpha'r = 0.$$

En prenant γz pour facteur, on obtient d'abord

$$\alpha\gamma^2 z + \alpha'\gamma z^2 + p\gamma z = 0.$$

Mais on a, par les deux autres équations,

$$a'_1 \gamma^2 z + 2b_1 \gamma z^2 + \beta \gamma z + \beta' z^2 + qz = 0,$$

$$2b_2 \gamma^2 z + a''_2 \gamma z^2 + \gamma \gamma^2 + \gamma' \gamma z + r\gamma = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} (a'_1 a''_2 - 2b_1 2b_2) \gamma^2 z + (\beta a''_2 - 2b_1 \gamma') \gamma z - 2b_1 \gamma \gamma^2 \\ + a''_2 \beta' z^2 - 2b_1 r\gamma + a''_2 qz = 0, \\ (a'_1 a''_2 - 2b_1 2b_2) \gamma z^2 + (a'_1 \gamma' - 2b_2 \beta) \gamma z + a'_1 \gamma \gamma^2 \\ - 2b_2 \beta' z^2 + a'_1 r\gamma - 2b_2 qz = 0. \end{aligned}$$

L'élimination de $\gamma^2 z$ et γz^2 conduit à

$$\begin{aligned} \left[\alpha(a''_2 \beta - 2b_1 \gamma') + \alpha'(a'_1 \gamma' - 2b_2 \beta') - (a'_1 a''_2 - 2b_1 2b_2) p \right. \\ \left. - \frac{2b_1}{a'_1} \gamma(-2b_1 \alpha + a'_1 \alpha') - \frac{2b_2}{a''_2} \beta'(-2b_2 \alpha' + a''_2 \alpha) \right] \gamma z \\ + \left[(-2b_1 \alpha + a'_1 \alpha') r - \frac{\beta}{a'_1} \gamma(-2b_1 \alpha + a'_1 \alpha') \right. \\ \left. - \frac{\beta'}{a''_2} \gamma(-2b_2 \alpha' + a''_2 \alpha) \right] \gamma \\ + \left[(-2b_2 \alpha' + a''_2 \alpha) q - \frac{\beta'}{a'_1} \gamma(-2b_1 \alpha + a'_1 \alpha') \right. \\ \left. - \frac{\beta'}{a''_2} \gamma'(-2b_2 \alpha' + a''_2 \alpha) \right] z \\ - \frac{\gamma}{a'_1} q(-2b_1 \alpha + a'_1 \alpha') - \frac{\beta'}{a''_2} r(-2b_2 \alpha' + a''_2 \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Par les quatre équations en γz , γ et z ainsi obtenues, on a pour

équation résultante

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ u_1 & u_2 & u'_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_1 & v_2 & v'_2 \\ w_2 & w'_2 & w''_2 & w'''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} u_1 &= -2b_1\alpha + a'_1\alpha', & u_2 &= -\alpha\beta + a'_1p, & u'_1 &= -\alpha\beta', & u'_2 &= -\alpha q, \\ v_1 &= -2b_2\alpha' + a''_2\alpha, & v'_1 &= -\alpha'\gamma, & v_2 &= -\alpha'\gamma' + a''_2p, & v'_2 &= -\alpha'r, \\ w_2 &= -(a'_1a''_2 - 2b_12b_2)p + (a''_2\beta - 2b_1\gamma')\alpha \\ &\quad + (a'_1\gamma' - 2b_2\beta')\alpha' - \frac{2b_1}{a'_1}\gamma u_1 - \frac{2b_2}{a''_2}\beta' v_1, \\ w'_2 &= u_1r - \gamma\left(\frac{u_1}{a'_1}\beta + \frac{v_1}{a''_2}\beta'\right), \\ w''_2 &= v_1q - \beta'\left(\frac{u_1}{a'_1}\gamma + \frac{v_1}{a''_2}\gamma'\right), \\ w'''_2 &= -\frac{u_1}{a'_1}\gamma q - \frac{v_1}{a''_2}\beta' r. \end{aligned}$$

Les termes en x^3 dans l'équation ne proviennent que de $pu_2v_2w_2$; leur ensemble est

$$\begin{aligned} &x^3 a(-4b''b'_1 + aa'_1)(-4b'b'_2 + aa''_2) \\ &\quad \times \left[-a(a'_1a''_2 - 2b_12b_2) \right. \\ &\quad \quad + 2b'(\alpha'_12b'_2 - 2b_22b'_1) + 2b''(\alpha''_22b'_1 - 2b_12b'_2) \\ &\quad \quad \left. - \frac{2b_1}{a'_1}2c'_2(-2b_12b'' + \alpha'_12b') - \frac{2b_2}{a''_2}2c'_1(-2b_22b' + \alpha''_22b') \right]. \end{aligned}$$

On aura y et z , en général du moins, par

$$\begin{aligned} &\alpha y + \alpha' z + p = 0, \\ &[(-\alpha\beta + pa'_1)v_1 + \alpha'\gamma u_1]y + [-\alpha\beta'v_1 - (-\alpha'\gamma' + pa''_2)u_1]z \\ &\quad - \alpha qv_1 + \alpha'ru_1 = 0. \end{aligned}$$

Les circonstances de discussion seraient analogues à celles que nous avons présentées dans la première Partie, mais avec plus de complication.

Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par
M. DESIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 13 décembre 1878.)

I. — Introduction.

1. Les arrangements complets de m objets n à n sont, comme on le sait, les groupes qu'on obtient en plaçant sur une même ligne, les uns à la suite des autres et de toutes les manières possibles, n des m objets donnés, un même objet pouvant entrer plusieurs fois dans un même groupe, et deux groupes différant entre eux soit par les objets qu'ils contiennent, soit par l'ordre où ces objets s'y succèdent.

Les objets dont nous parlons constituent les *éléments* des groupes et sont de nature quelconque. Ils peuvent être, par exemple, des lettres de l'alphabet. Quels qu'ils soient, le nombre des arrangements complets de m lettres n à n est égal à m^n .

Nous ne rappellerons point ici le procédé très-simple et très-connu qui conduit à ce résultat, le présent Mémoire ayant uniquement pour but la résolution des problèmes particuliers contenus dans l'énoncé général suivant :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n , combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

2. Ces problèmes particuliers sont en nombre infini, car les conditions données peuvent présenter une variété inépuisable. Ils sont difficiles, ou, du moins, réputés tels. Nous exposons d'abord une méthode générale qui permet de les résoudre tous, quelque compliqués qu'en soient les énoncés, d'une manière uniforme et simple.

A cause même de sa pleine généralité, cette méthode, pour être bien comprise, demande à être appliquée à de nombreux exemples.

Le premier problème auquel nous l'appliquions est celui-ci :

Avec un alphabet contenant v voyelles et c consonnes, combien peut-on former de mots de n lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes?

Ce problème rentre évidemment dans notre énoncé général. Il en est de même du suivant :

Avec v notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre?

Le troisième problème considéré par nous ne rentre point aussi visiblement dans notre énoncé général [1]. Au fond, toutefois, il s'y ramène, et notre méthode lui est parfaitement applicable. C'est le problème que voici :

Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

On connaît la difficulté proverbiale des problèmes sur le cavalier du jeu d'échecs. Notre méthode néanmoins s'applique très-bien à celui-ci :

Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

Ces quatre problèmes, résolus facilement par notre méthode générale, suffisent, croyons-nous, à en montrer la commodité et l'importance. Nous nous bornons donc à ces quatre applications, et nous terminons par quelques réflexions sur la méthode en analyse combinatoire.

II. — Méthode générale de résolution des problèmes considérés.

3. Rappelons d'abord notre énoncé général [1] :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n , combien γ en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

Puis, supposons formés tous ces arrangements dont on demande le nombre, et désignons ce nombre lui-même par X_n .

4. Évidemment, les conditions données nous fournissent le moyen de classer en différentes espèces les parties terminales de nos X_n arrangements, et, par conséquent, ces X_n arrangements eux-mêmes. Cette classification est le premier fondement de notre méthode.

Supposons qu'elle soit effectuée, c'est-à-dire que nos X_n arrangements soient ainsi distribués en différentes espèces, et désignons par A_n le nombre des arrangements de la première espèce, par B_n le nombre de ceux de la deuxième, par C_n le nombre de ceux de la troisième, et ainsi de suite. Nous aurons

$$X_n = A_n + B_n + C_n + \dots,$$

et le calcul du nombre X_n sera ramené à celui des nombres A_n , B_n , C_n , ...

5. Pour déterminer ceux-ci, revenons aux conditions données. Quelles qu'elles soient, elles fournissent, pour les nombres A_n , B_n , C_n , ..., des équations liant chacun d'eux aux nombres A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} , ..., A_{n-2} , B_{n-2} , C_{n-2} , ..., A_{n-3} , B_{n-3} , C_{n-3} , ..., etc. Dans la presque totalité des cas, ces équations ne contiennent, outre A_n , B_n , C_n , ..., que les nombres A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} , ... Dans des cas exceptionnels, comme le problème [2] sur le cavalier du jeu d'échecs, on est obligé de prendre aussi A_{n-2} , B_{n-2} , C_{n-2} , ...; mais il n'arrive pour ainsi dire jamais qu'il faille aller jusqu'aux nombres A_{n-3} , B_{n-3} , C_{n-3} , ..., ni, *a fortiori*, aux nombres antérieurs.

Quoi qu'il en soit, si nous appelons λ le nombre des espèces de

nos arrangements, les conditions données entre les **éléments consécutifs** nous fournissent λ équations reliant les **nombre cherchés** $A_n, B_n, C_n, \dots$ aux nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de n .

6. Entre ces λ équations et celles qu'on en peut déduire en faisant varier n , séparons les nombres $A, B, C, \dots$, c'est-à-dire effectuons les éliminations nécessaires pour obtenir, à la place de ces équations, des équations nouvelles, telles que chacune d'elles ne renferme que des nombres A , ou des nombres B , ou des nombres C , etc.

L'équation ne contenant que des nombres A exprime la loi d'une suite récurrente dont A_n constitue le terme général. De même pour celles qui ne renferment que des nombres B , que des nombres C , et ainsi de suite.

7. Ainsi A_n est le terme général d'une certaine suite récurrente dont on connaît la loi. Comme on peut toujours calculer directement les premiers termes de cette suite, on peut, en se fondant sur la théorie des suites récurrentes, parvenir à l'expression générale de A_n . Par des procédés identiques, on arrivera à celle de B_n , à celle de C_n , etc.

Il va sans dire que, dans le cours de ces calculs, on profitera de toutes les simplifications qui se pourront présenter, et que, les expressions de $A_n, B_n, C_n, \dots$ une fois obtenues, il suffira de les ajouter pour avoir X_n , c'est-à-dire pour obtenir la solution même du problème considéré.

8. En résumé, notre méthode se réduit aux quatre opérations suivantes, dont les deux premières sont purement combinatoires et les deux dernières purement algébriques :

Tirer des conditions relatives aux éléments consécutifs un mode de classification des arrangements dont on cherche le nombre;

Déduire de ces mêmes conditions les équations qui donnent $A_n, B_n, C_n, \dots$ en fonction des nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de n ;

Entre ces équations et celles qu'on en déduit en faisant varier

n, séparer, par une suite d'éliminations, les nombres inconnus A, B, C, ...;

Enfin, déterminer les expressions respectives de A_n , B_n , C_n , ... et les ajouter.

9. Nous allons appliquer, et d'une façon absolument littérale, cette méthode générale à la résolution des quatre problèmes que nous avons déjà énoncés [2].

III. — Problème sur l'alphabet.

10. Avec un alphabet contenant *v* voyelles et *c* consonnes, combien peut-on former de mots de *n* lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes?

Tel est le premier problème énoncé par nous. Il rentre évidemment dans notre énoncé général [1], et, par suite, notre méthode générale lui est applicable. Cette application, comme nous l'allons voir, présente une simplification remarquable qui, d'ailleurs, se rencontre très-fréquemment et que l'on peut, pour ainsi dire, faire naître à volonté.

11. Supposons formés tous les mots de *n* lettres dont nous cherchons le nombre, et, par la considération des conditions données, d'une part, des lettres qui terminent ces mots d'autre part, tâchons de les classer.

Nous trouvons que ces mots sont de quatre espèces différentes :

- 1° Ceux qui finissent par une voyelle unique;
- 2° Ceux qui finissent par deux voyelles consécutives;
- 3° Ceux qui finissent par une consonne unique;
- 4° Ceux qui finissent par deux consonnes consécutives.

Appelons V'_n , V''_n , C'_n , C''_n les nombres de mots respectivement compris dans ces quatre espèces; désignons par X_n le nombre total des mots cherchés. Nous avons

$$X_n = V'_n + V''_n + C'_n + C''_n,$$

et nous serions conduits à calculer V'_n , V''_n , C'_n , C''_n . n'était la simplification annoncée.

12. Continuant à appliquer notre méthode générale, cherchons les équations qui lient les nombres V'_n, V''_n, C'_n, C''_n aux nombres $V'_{n-1}, V''_{n-1}, C'_{n-1}, C''_{n-1}$.

Les mots de n lettres finissant par une voyelle unique se déduisent évidemment des mots de $n-1$ lettres finissant soit par une, soit par deux consonnes. Il suffit, pour obtenir ceux-là, d'écrire à la suite de ceux-ci, successivement, une à une, les ν voyelles données. De là cette relation

$$V'_n = (C'_{n-1} + C''_{n-1})\nu.$$

Chaque mot de n lettres finissant par deux voyelles s'obtient évidemment par l'adjonction d'une des ν voyelles données à la suite d'un mot de $n-1$ lettres finissant par une voyelle unique. Donc

$$V''_n = V'_{n-1}\nu.$$

En raisonnant de la même façon sur les mots terminés par une ou par deux consonnes, on trouve les deux nouvelles relations

$$\begin{aligned} C'_n &= (V'_{n-1} + V''_{n-1})c, \\ C''_n &= C'_{n-1}c, \end{aligned}$$

qui, jointes aux précédentes, forment un nombre d'équations égal au nombre des espèces de notre classification.

13. A l'aide d'un calcul fort aisé, nous tirons de ces quatre équations les quatre relations nouvelles

$$\begin{aligned} V'_n &= \nu c V'_{n-2} + \nu c (\nu + c) V'_{n-3} + (\nu c)^2 V'_{n-4}, \\ V''_n &= \nu c V''_{n-2} + \nu c (\nu + c) V''_{n-3} + (\nu c)^2 V''_{n-4}, \\ C'_n &= \nu c C'_{n-2} + \nu c (\nu + c) C'_{n-3} + (\nu c)^2 C'_{n-4}, \\ C''_n &= \nu c C''_{n-2} + \nu c (\nu + c) C''_{n-3} + (\nu c)^2 C''_{n-4}. \end{aligned}$$

Ces relations, où V', V'', C', C'' sont séparés, montrent que ces nombres sont chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il se trouve que ces quatre séries récurrentes ont des lois identiques, et cette particularité, origine de la simplification annoncée [10], nous dispense de calculer isolément V'_n, V''_n, C'_n, C''_n et nous permet d'obtenir immédiatement X_n .

14. En effet, ajoutons membre à membre nos quatre dernières équations, en nous rappelant l'égalité fondamentale

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_n' + \mathbf{C}_n + \mathbf{C}_n';$$

nous trouvons aussitôt

$$\mathbf{X}_n = \nu c \mathbf{X}_{n-1} + \nu c (\nu + c) \mathbf{X}_{n-2} + (\nu c)^2 \mathbf{X}_{n-3}.$$

Le nombre $\mathbf{X}_n$ est donc le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est l'équation du quatrième degré

$$x^4 - \nu c x^3 - \nu c (\nu + c) x^2 - (\nu c)^2 x = 0.$$

Comme nous ne connaissons point les racines de cette équation, nous ne pouvons appliquer, pour écrire l'expression générale de $\mathbf{X}_n$, les règles de Lagrange, lesquelles supposeraient cette équation résolue. Nous recourrons donc aux règles que nous avons précédemment données pour écrire le terme général d'une série récurrente en fonction, non plus des racines, mais, ce qui est infiniment plus commode, des coefficients de l'équation génératrice.

Ces règles pourraient nous conduire à plusieurs expressions de $\mathbf{X}_n$; nous n'en donnerons qu'une.

15. Posons, conformément à ces règles,

$$\mathbf{X}_1 = x_1,$$

$$\mathbf{X}_2 = x_2,$$

$$\mathbf{X}_3 = x_3 + \nu c \mathbf{X}_1,$$

$$\mathbf{X}_4 = x_4 + \nu c \mathbf{X}_2 + \nu c (\nu + c) \mathbf{X}_1.$$

Le nombre cherché $\mathbf{X}_n$ sera donné par la formule

$$\mathbf{X}_n = x_1 \Psi(n, 1) + x_2 \Psi(n, 2) + x_3 \Psi(n, 3) + x_4 \Psi(n, 4),$$

dans laquelle x_1, x_2, x_3, x_4 , qu'on peut aisément calculer, ont pour valeurs respectives $\nu + c$, $(\nu + c)^2$, $2\nu c (\nu + c)$ et $2(\nu c)^2$, et où $\Psi(n, i)$ est fourni, pour chaque valeur de i , par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\beta + \gamma + \delta)!}{\beta! \gamma! \delta!} (\nu + c)^i (\nu c)^{\beta + \gamma + \delta},$$

le signe $\sum$ s'étendant, pour les entiers β, γ, δ , à tous les systèmes

de valeurs positives ou nulles qui satisfont à la condition

$$2\beta + 3\gamma + 4\delta = n - i.$$

Telle est l'expression générale de X_n .

IV. — Problème sur la musique.

16. *Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre ?*

Avant d'aborder la résolution de ce très-intéressant problème, nous ferons remarquer que l'on peut toujours le ramener au cas où les temps ne sont point divisés. Si les temps étaient partagés, par exemple, en moitiés, en tiers ou en quarts, on pourrait prendre une moitié, un tiers ou un quart de temps pour unité de durée. En d'autres termes, nous pouvons toujours supposer la durée totale de la phrase partagée en un certain nombre de petites durées, toutes égales entre elles, et remplir chacune entièrement par un élément musical unique ; rien ne nous empêche d'appeler chacune de ces petites durées *un temps*.

En conséquence, nous pouvons, sans restreindre la généralité de notre présent problème, en mettre l'énoncé sous cette nouvelle forme :

Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes, de n temps non divisés ?

17. A chacun de ces nouveaux temps correspondra, comme nous venons de le dire, un élément unique. Donc chacune de nos phrases sera un groupe de n éléments.

Ces éléments, d'ailleurs, seront évidemment de trois sortes : *note articulée, silence, prolongation*.

La note articulée sera l'une quelconque des ν notes données ; elle pourra se placer après un élément quelconque.

Le silence pourra aussi se mettre après tout élément.

La prolongation pourra suivre une note articulée ou une pro-

longation, mais ne devra jamais suivre un silence, un silence prolongé ne différant point, en effet, d'un silence répété; il y aurait double emploi.

18. Ces explications données, supposons formées toutes les phrases musicales qu'on nous demande et désignons-en le nombre par X_n .

Ces phrases sont de trois sortes, puisque leur dernier élément, qui occupe par hypothèse le $n^{\text{ième}}$ rang, est une note articulée, un silence ou une prolongation.

Nous désignerons par A_n le nombre des phrases de n éléments qui finissent par une note articulée; nous appellerons S_n le nombre de celles qui finissent par un silence, et P_n le nombre de celles qui finissent par une prolongation.

19. Conformément à notre méthode générale, nous venons de classer nos phrases de n éléments. Il nous reste, pour transformer notre problème en une simple question de calcul, à trouver les équations qui relient les nombres A_n, S_n, P_n , dont la somme est X_n , aux nombres précédents $A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}$.

Évidemment, on obtiendra toutes les phrases de n éléments terminées par une note articulée en faisant suivre successivement de chacune des ν notes données toutes les phrases de $n - 1$ éléments. De là cette première équation

$$A_n = (A_{n-1} + S_{n-1} + P_{n-1}) \nu.$$

De même, on obtiendra toutes les phrases de n éléments finissant par un silence en plaçant un silence après toutes les phrases de $n - 1$ éléments. De là cette deuxième équation

$$S_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}.$$

Enfin, pour former toutes les phrases de n éléments terminées par une prolongation, il suffira d'écrire une prolongation à la suite de chacune des phrases de $n - 1$ éléments finissant soit par une note articulée, soit par une prolongation. De là cette troisième équation

$$P_n = A_{n-1} + P_{n-1}.$$

Nous possédons ainsi trois relations entre les nombres A_n , S_n , P_n et les nombres A_{n-1} , S_{n-1} , P_{n-1} .

20. De ces relations et de celles qu'on en déduit en faisant varier n on tire, par un calcul facile, les trois relations nouvelles

$$A_n - (2 + 2) A_{n-1} + A_{n-2} = 0,$$

$$S_n - (2 + 2) S_{n-1} - S_{n-2} = 0,$$

$$P_n - (2 + 2) P_{n-1} - P_{n-2} = 0,$$

qui nous permettraient de déterminer les expressions respectives des nombres A_n , S_n , P_n .

Grâce à l'identité de ces relations, nous sommes dispensés de cette détermination. En les ajoutant membre à membre, nous trouvons immédiatement

$$X_n - (2 + 2) X_{n-1} - X_{n-2} = 0,$$

et nous voyons que X_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est évidemment

$$x^2 - (2 + 2)x - 1 = 0.$$

21. En appliquant à ces derniers résultats le procédé de Lagrange, nous trouvons, pour l'expression générale de X_n ,

$$X_n = \frac{1}{2} R_1^n + \frac{1}{2} R_2^n.$$

R_1 et R_2 étant les racines de l'équation génératrice qui précède (20), et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ les coefficients indépendants de n , satisfaisant aux équations

$$\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2 = X_1, \quad \frac{1}{2} R_1^2 + \frac{1}{2} R_2^2 = X_2,$$

dans lesquelles on a, comme on peut le voir directement,

$$X_1 = 2 + 2, \quad X_2 = 2^2 + 2 + 1.$$

Si l'on effectue ces calculs, on trouve immédiatement

$$X_n = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4}}{2} \right)^n.$$

22. Si, au lieu du procédé de Lagrange, on emploie le premier de ceux que j'ai fait connaître, on trouve

$$X_n = (\nu + 1) \Psi(n, 1) - \Psi(n, 2),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} (\nu + 2)^\alpha (-1)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs possibles des entiers non négatifs α et β qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta = n - i.$$

23. On peut remarquer que, si, négligeant absolument les effets d'intonation, on veut ne tenir compte que des effets de mesure, notre problème se réduit à celui-ci :

Parmi les phrases musicales composées de n temps non divisés, combien s'en trouve-t-il qui diffèrent par la mesure?

Ce problème est évidemment un cas particulier du précédent; il suffit, pour en obtenir la solution, de remplacer, dans les résultats qu'on vient d'écrire, la lettre ν par l'unité.

V. — Problème sur le jeu de dames.

24. *Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Pour abréger les éliminations auxquelles conduit notre méthode, nous supposerons c égal à 6. Cette hypothèse n'aura d'autre effet que d'abrégé les calculs; notre méthode générale n'en sera ni restreinte ni altérée.

25. Nous supposons donc notre damier formé par une suite de rangées de six cases chacune. Nous supposerons de plus que, dans la première rangée, la première case à gauche soit blanche, et que notre pion parte d'une case blanche de cette première rangée.

Nous distinguerons d'ailleurs deux sortes de rangées : celles de rang impair, qui commencent par une case blanche et que nous nommerons *rangées impaires*; celles de rang pair, qui commencent par une case noire et que nous nommerons *rangées paires*.

La case de départ de notre pion appartenant toujours à la première rangée impaire, la case d'arrivée pourra appartenir soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire, soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée paire. De là, dans le problème actuel, deux cas différents que nous traiterons l'un après l'autre.

26. Supposons d'abord que notre pion ait sa case d'arrivée sur la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire.

Tous les chemins par lesquels ce pion peut arriver sur une case de cette $n^{\text{ième}}$ rangée impaire peuvent se classer en trois espèces : ceux qui se terminent sur la première case blanche de cette rangée, ceux qui se terminent sur la deuxième, ceux qui se terminent sur la troisième, les cases étant comptées à partir de la gauche.

Nous appellerons P_n, Q_n, R_n les nombres respectifs de ces trois sortes de chemins.

27. La $n^{\text{ième}}$ rangée impaire est précédée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée paire. Si nous appelons $S_{n-1}, T_{n-1}, U_{n-1}$ les nombres respectifs des chemins qui se terminent, à partir de la gauche, sur la première, la deuxième ou la troisième case blanche de cette rangée paire, nous avons, d'après la marche bien connue du pion du jeu de dames, les six égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= S_{n-1}, & S_{n-1} &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= S_{n-1} + T_{n-1}, & T_{n-1} &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= T_{n-1} + U_{n-1}, & U_{n-1} &= R_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1} + 2Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= Q_{n-1} + 2R_{n-1}. \end{aligned}$$

28. Une suite d'éliminations faciles, effectuées sur ces der-

nières égalités, nous donne les relations suivantes :

$$P_n = 5P_{n-1} - 6P_{n-2} + P_{n-3},$$

$$Q_n = 5Q_{n-1} - 6Q_{n-2} + Q_{n-3},$$

$$R_n = 5R_{n-1} - 6R_{n-2} + R_{n-3},$$

lesquelles nous montrent que chacun des nombres P_n , Q_n , R_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, admettant l'équation génératrice du troisième degré

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

29. Par suite, si nous posons

$$P_1 = p_1,$$

$$P_2 = p_2 + 5P_1,$$

$$P_3 = p_3 + 5P_2 - 6P_1,$$

la valeur de P_n nous est donnée par la formule

$$P_n = p_1 \Psi(n, 1) + p_2 \Psi(n, 2) + p_3 \Psi(n, 3),$$

l'expression $\Psi(n, i)$ étant définie par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \beta! \gamma!} 5^{\alpha} (-6)^{\beta},$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers non négatifs α , β , γ qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n - i.$$

Les expressions de Q_n et R_n sont identiques; il suffirait, pour les obtenir, de remplacer dans tout ce que nous venons d'écrire P et p soit par Q et q , soit par R et r .

30. En raisonnant de même pour le cas où la case d'arrivée appartient à une rangée paire, on trouverait

$$S_n = 5S_{n-1} - 6S_{n-2} + S_{n-3},$$

$$T_n = 5T_{n-1} - 6T_{n-2} + T_{n-3},$$

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + U_{n-3}.$$

Pour obtenir les expressions de S_n , U_n , T_n , il suffirait de prendre

celles de P_n , Q_n , R_n et d'y remplacer les lettres P et p , Q et q , R et r respectivement par les lettres S et s , T et t , U et u .

31. Il est bien clair que, par les résultats qui précèdent, notre problème sur le pion du jeu de dames se trouve complètement résolu. Pour le bien montrer, considérons-en un cas particulier quelconque, celui, par exemple, où, la case de départ étant la seconde case blanche de la première rangée impaire, la case d'arrivée est la troisième de la $n^{\text{ième}}$ rangée paire.

Le nombre cherché est U_n . Nous trouvons, par un calcul direct,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 4,$$

et, par suite,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1.$$

Donc nous avons, pour toutes valeurs de n , et en conservant aux expressions Ψ les significations [29] que nous leur avons assignées,

$$U_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 3).$$

VI. — Problème sur le jeu d'échecs.

32. *Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Tel est le problème que nous nous proposons de résoudre. Pour en abrégé les calculs, nous prendrons c égal à 4. Mais nous ferons observer que cette valeur particulière attribuée à c n'enlève rien à la généralité de la méthode que nous allons suivre; elle n'a d'autre effet que de rendre moins longues les éliminations auxquelles se réduit la troisième partie [6] de notre méthode générale.

33. Dans cette hypothèse, notre échiquier aura une largeur de quatre cases et une profondeur indéfinie. Nous pourrions le regarder comme formé par une suite de rangées de quatre cases chacune. Nous supposons que notre cavalier ait pour point de départ une case de la première rangée et pour point d'arrivée une case de la $n^{\text{ième}}$.

34. Les chemins différents que peut suivre un cavalier partant d'une case de la première rangée et arrivant, sans jamais reculer, à une case de la $n^{\text{ième}}$ peuvent se classer en quatre espèces, suivant qu'ils aboutissent finalement à telle ou telle des quatre cases de cette rangée. Prenons ces cases de gauche à droite, et appelons P_n le nombre des chemins aboutissant à la première case, Q_n celui des chemins aboutissant à la deuxième, R_n et S_n ceux des chemins qui aboutissent respectivement à la troisième et à la quatrième. Si nous donnons un moyen de calculer chacun de ces nombres, notre problème sera résolu.

35. Pour trouver ce moyen, cherchons les relations qui existent entre les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n et les nombres analogues d'indices moindres.

La marche connue du cavalier et la figure formée par les trois rangées correspondant sur notre échiquier aux trois indices $n, n-1, n-2$ nous donnent immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-2} + R_{n-2} + S_{n-1}, \\ R_n &= P_{n-1} + Q_{n-1} + S_{n-2}, \\ S_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \end{aligned}$$

et, amenée à ce point, la solution de la question n'est plus qu'un calcul ordinaire.

36. Par une suite d'éliminations, que des remarques assez simples peuvent rendre faciles, nous déduisons des quatre relations qui précèdent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= 2P_{n-1} + 2P_{n-2} + 4P_{n-3} + 2P_{n-4} - P_{n-5}, \\ Q_n &= 2Q_{n-2} + 2Q_{n-3} + 4Q_{n-4} + 2Q_{n-5} - Q_{n-6}, \\ R_n &= 2R_{n-2} + 2R_{n-3} + 4R_{n-4} + 2R_{n-5} - R_{n-6}, \\ S_n &= 2S_{n-2} + 2S_{n-3} + 4S_{n-4} + 2S_{n-5} - S_{n-6}, \end{aligned}$$

qui nous montrent d'abord que les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite, ensuite que chacune de ces séries admet l'équation génératrice

$$x^6 - 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0,$$

laquelle peut s'écrire aussi

$$(x+1)(x^2-x^2-x-1)(x^2+2x-1)=0.$$

37. Or, les procédés que nous avons fait connaître nous donnent immédiatement l'expression générale de P_n , Q_n , R_n , S_n . Considérons, en effet, P_n ; nous savons que, si l'on pose

$$P_1 = P_1,$$

$$P_2 = P_2,$$

$$P_3 = P_2 - 2P_1,$$

$$P_4 = P_3 - 2P_2,$$

$$P_5 = P_4 - 2P_3 + 2P_2,$$

$$P_6 = P_5 + 2P_4 - 2P_3 - 4P_2,$$

$$P_7 = P_6 - 2P_5 - 2P_4 - 4P_3 - 2P_2,$$

$$P_8 = P_7 - 2P_6 - 2P_5 - 4P_4 - 2P_3,$$

on a identiquement

$$P_n = \sum_{k=0}^n P_k \cdot \dots$$

et, en écrivant comme par l'équation

$$\dots = \frac{1 - x - x^2 - x^3 - \dots}{1 - x - x^2 - x^3 - \dots}$$

dans laquelle le signe $\sum$ étend à tous les systèmes de valeurs des indices non négatifs $0, 1, 2, 3, \dots$ qui satisfont à la condition

$$n = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots$$

Les expressions de P_n , Q_n , R_n , S_n se déterminent à l'aide des mêmes méthodes des valeurs qui précèdent. Il suffit de remplacer, dans toutes ces expressions, P par Q , R par S , S par R , R par Q .

Il nous reste aussi que P , Q , R , S sont des fonctions de x qui peuvent être développées en séries de puissances de x . On peut alors déterminer les coefficients de ces séries en utilisant les relations de récurrence qui existent entre les termes de ces séries. On trouve ainsi que les coefficients de ces séries sont des entiers.

dès que l'on connaîtra la case de départ; donc notre problème est complètement résolu.

39. Pour en bien faire comprendre la solution, prenons un exemple particulier. Supposons que la case de départ soit la seconde de la première rangée et la case d'arrivée la quatrième de la $n^{\text{ième}}$ rangée. Il s'agira de calculer S_n .

Or, dans ce cas particulier, on voit directement que les huit nombres $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ sont respectivement 0, 1, 0, — 1, 1, 1, 0, 0. Donc on a

$$S_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 4) + \Psi(n, 5) + \Psi(n, 6),$$

les quantités Ψ gardant les significations qu'on leur a données [37] plus haut.

VII. — Sur la méthode en analyse combinatoire.

40. Les problèmes de l'analyse combinatoire sont de telle nature, que la résolution s'en réduit presque toujours à la recherche du nombre $X_{m,n}$ des groupes que l'on peut former, suivant certaines lois données, avec m objets pris n à n . La détermination de ce nombre dépend évidemment des lois données; d'ordinaire, elle présente des difficultés réelles d'autant plus grandes, qu'on ne trouve, dans les Livres et Mémoires, pour ainsi dire aucune indication sur la manière de les surmonter.

Évidemment d'ailleurs, ces difficultés sont de deux sortes, les unes de raisonnement, les autres de calcul; car la détermination du nombre $X_{m,n}$, comme la résolution des problèmes de l'analyse ordinaire, comprend deux parties successives : une partie de raisonnement, analogue à la mise en équations des problèmes d'Algèbre; une partie de calcul, analogue à la résolution de ces équations.

41. C'est dans la première partie que se présentent les difficultés les plus sérieuses. On s'y propose, non pas, certes, de trouver l'expression même de $X_{m,n}$ en fonction de m , de n et des paramètres introduits par les lois dont nous avons parlé : une détermination aussi immédiate ne pourrait convenir qu'à des cas tellement simples,

Nous possédons ainsi trois relations entre les nombres A_n, S_n, P_n et les nombres $A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}$.

20. De ces relations et de celles qu'on en déduit en faisant varier n on tire, par un calcul facile, les trois relations nouvelles

$$A_n - (\nu + 2) A_{n-1} + A_{n-2} = 0,$$

$$S_n - (\nu + 2) S_{n-1} + S_{n-2} = 0,$$

$$P_n - (\nu + 2) P_{n-1} + P_{n-2} = 0,$$

qui nous permettraient de déterminer les expressions respectives des nombres A_n, S_n, P_n .

Grâce à l'identité de ces relations, nous sommes dispensés de cette détermination. En les ajoutant membre à membre, nous trouvons immédiatement

$$X_n - (\nu + 2) X_{n-1} + X_{n-2} = 0,$$

et nous voyons que X_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est évidemment

$$x^2 - (\nu + 2)x + 1 = 0.$$

21. En appliquant à ces derniers résultats le procédé de Lagrange, nous trouvons, pour l'expression générale de X_n ,

$$X_n = t_1 R_1^n + t_2 R_2^n,$$

R_1 et R_2 étant les racines de l'équation génératrice qui précède [20], et t_1 et t_2 des coefficients indépendants de n , satisfaisant aux équations

$$t_1 R_1 + t_2 R_2 = X_1, \quad t_1 R_1^2 + t_2 R_2^2 = X_2,$$

dans lesquelles on a, comme on peut le voir directement,

$$X_1 = \nu + 1, \quad X_2 = \nu^2 + 3\nu + 1.$$

Si l'on effectue les calculs, on trouve finalement

$$X_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}} \right) \left(\frac{\nu + 2}{2} + \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}} \right) \left(\frac{\nu + 2}{2} - \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2} \right)^n.$$

22. Si, au lieu du procédé de Lagrange, on emploie le premier de ceux que j'ai fait connaître, on trouve

$$X_n = (\nu + 1) \Psi(n, 1) - \Psi(n, 2),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} (\nu + 2)^\alpha (-1)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs possibles des entiers non négatifs α et β qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta = n - i.$$

23. On peut remarquer que, si, négligeant absolument les effets d'intonation, on veut ne tenir compte que des effets de mesure, notre problème se réduit à celui-ci :

Parmi les phrases musicales composées de n temps non divisés, combien s'en trouve-t-il qui diffèrent par la mesure?

Ce problème est évidemment un cas particulier du précédent : il suffit, pour en obtenir la solution, de remplacer, dans les résultats qu'on vient d'écrire, la lettre ν par l'unité.

V. — Problème sur le jeu de dames.

24. *Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Pour abréger les éliminations auxquelles conduit notre méthode, nous supposerons c égal à 6. Cette hypothèse n'aura d'autre effet que d'abréger les calculs; notre méthode générale n'en sera ni restreinte ni altérée.

25. Nous supposons donc notre damier formé par une suite de rangées de six cases chacune. Nous supposerons de plus que, dans la première rangée, la première case à gauche soit blanche, et que notre pion parte d'une case blanche de cette première rangée.

Nous distinguerons d'ailleurs deux sortes de rangées : celles de rang impair, qui commencent par une case blanche et que nous nommerons *rangées impaires*; celles de rang pair, qui commencent par une case noire et que nous nommerons *rangées paires*.

La case de départ de notre pion appartenant toujours à la première rangée impaire, la case d'arrivée pourra appartenir soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire, soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée paire. De là, dans le problème actuel, deux cas différents que nous traiterons l'un après l'autre.

26. Supposons d'abord que notre pion ait sa case d'arrivée sur la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire.

Tous les chemins par lesquels ce pion peut arriver sur une case de cette $n^{\text{ième}}$ rangée impaire peuvent se classer en trois espèces : ceux qui se terminent sur la première case blanche de cette rangée, ceux qui se terminent sur la deuxième, ceux qui se terminent sur la troisième, les cases étant comptées à partir de la gauche.

Nous appellerons P_n, Q_n, R_n les nombres respectifs de ces trois sortes de chemins.

27. La $n^{\text{ième}}$ rangée impaire est précédée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée paire. Si nous appelons $S_{n-1}, T_{n-1}, U_{n-1}$ les nombres respectifs des chemins qui se terminent, à partir de la gauche, sur la première, la deuxième ou la troisième case blanche de cette rangée paire, nous avons, d'après la marche bien connue du pion du jeu de dames, les six égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= S_{n-1}, & S_{n-1} &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= S_{n-1} + T_{n-1}, & T_{n-1} &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= T_{n-1} + U_{n-1}, & U_{n-1} &= R_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1} + 2Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= Q_{n-1} + 2R_{n-1}. \end{aligned}$$

28. Une suite d'éliminations faciles, effectuées sur ces der-

nières égalités, nous donne les relations suivantes :

$$P_n = 5P_{n-1} - 6P_{n-2} + P_{n-3},$$

$$Q_n = 5Q_{n-1} - 6Q_{n-2} + Q_{n-3},$$

$$R_n = 5R_{n-1} - 6R_{n-2} + R_{n-3},$$

lesquelles nous montrent que chacun des nombres P_n, Q_n, R_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, admettant l'équation génératrice du troisième degré

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

29. Par suite, si nous posons

$$P_1 = p_1,$$

$$P_2 = p_2 + 5P_1,$$

$$P_3 = p_3 + 5P_2 - 6P_1,$$

la valeur de P_n nous est donnée par la formule

$$P_n = p_1 \Psi(n, 1) + p_2 \Psi(n, 2) + p_3 \Psi(n, 3),$$

l'expression $\Psi(n, i)$ étant définie par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \beta! \gamma!} 5^\alpha (-6)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers non négatifs α, β, γ qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n - i.$$

Les expressions de Q_n et R_n sont identiques; il suffirait, pour les obtenir, de remplacer dans tout ce que nous venons d'écrire P et p soit par Q et q , soit par R et r .

30. En raisonnant de même pour le cas où la case d'arrivée appartient à une rangée paire, on trouverait

$$S_n = 5S_{n-1} - 6S_{n-2} + S_{n-3},$$

$$T_n = 5T_{n-1} - 6T_{n-2} + T_{n-3},$$

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + U_{n-3}.$$

Pour obtenir les expressions de S_n, U_n, T_n , il suffirait de prendre

celles de P_n , Q_n , R_n et d'y remplacer les lettres P et p , Q et q , R et r respectivement par les lettres S et s , T et t , U et u .

31. Il est bien clair que, par les résultats qui précèdent, notre problème sur le pion du jeu de dames se trouve complètement résolu. Pour le bien montrer, considérons-en un cas particulier quelconque, celui, par exemple, où, la case de départ étant la seconde case blanche de la première rangée impaire, la case d'arrivée est la troisième de la $n^{\text{ième}}$ rangée paire.

Le nombre cherché est U_n . Nous trouvons, par un calcul direct,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 4,$$

et, par suite,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1.$$

Donc nous avons, pour toutes valeurs de n , et en conservant aux expressions Ψ les significations [29] que nous leur avons assignées,

$$U_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 3).$$

VI. — Problème sur le jeu d'échecs.

32. *Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Tel est le problème que nous nous proposons de résoudre. Pour en abrégé les calculs, nous prendrons c égal à 4. Mais nous ferons observer que cette valeur particulière attribuée à c n'enlève rien à la généralité de la méthode que nous allons suivre; elle n'a d'autre effet que de rendre moins longues les éliminations auxquelles se réduit la troisième partie [6] de notre méthode générale.

33. Dans cette hypothèse, notre échiquier aura une largeur de quatre cases et une profondeur indéfinie. Nous pourrions le regarder comme formé par une suite de rangées de quatre cases chacune. Nous supposerons que notre cavalier ait pour point de départ une case de la première rangée et pour point d'arrivée une case de la $n^{\text{ième}}$.

34. Les chemins différents que peut suivre un cavalier partant d'une case de la première rangée et arrivant, sans jamais reculer, à une case de la $n^{\text{ième}}$ peuvent se classer en quatre espèces, suivant qu'ils aboutissent finalement à telle ou telle des quatre cases de cette rangée. Prenons ces cases de gauche à droite, et appelons P_n le nombre des chemins aboutissant à la première case, Q_n celui des chemins aboutissant à la deuxième, R_n et S_n ceux des chemins qui aboutissent respectivement à la troisième et à la quatrième. Si nous donnons un moyen de calculer chacun de ces nombres, notre problème sera résolu.

35. Pour trouver ce moyen, cherchons les relations qui existent entre les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n et les nombres analogues d'indices moindres.

La marche connue du cavalier et la figure formée par les trois rangées correspondant sur notre échiquier aux trois indices $n, n-1, n-2$ nous donnent immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-2} + R_{n-2} + S_{n-1}, \\ R_n &= P_{n-1} + Q_{n-1} + S_{n-1}, \\ S_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \end{aligned}$$

et, amenée à ce point, la solution de la question n'est plus qu'un calcul ordinaire.

36. Par une suite d'éliminations, que des remarques assez simples peuvent rendre faciles, nous déduisons des quatre relations qui précèdent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= 2P_{n-1} + 2P_{n-2} + 4P_{n-3} + 2P_{n-4} - P_{n-5}, \\ Q_n &= 2Q_{n-1} + 2Q_{n-2} + 4Q_{n-3} + 2Q_{n-4} - Q_{n-5}, \\ R_n &= 2R_{n-1} + 2R_{n-2} + 4R_{n-3} + 2R_{n-4} - R_{n-5}, \\ S_n &= 2S_{n-1} + 2S_{n-2} + 4S_{n-3} + 2S_{n-4} - S_{n-5}, \end{aligned}$$

qui nous montrent d'abord que les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite, ensuite que chacune de ces séries admet l'équation génératrice

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0,$$

laquelle peut s'écrire aussi

$$(x+1)(x^2-x^2-x-1)(x^2+2x-1)=0.$$

37. Or, les procédés que nous avons fait connaître nous donnent immédiatement l'expression générale de P_n , Q_n , R_n , S_n . Considérons, en effet, P_n ; nous savons que, si l'on pose

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1, \\ P_2 &= p_2, \\ P_3 &= p_3 + 2p_1, \\ P_4 &= p_4 + 2p_2, \\ P_5 &= p_5 + 2p_3 + 2p_1, \\ P_6 &= p_6 + 2p_4 + 2p_2 + 4p_1, \\ P_7 &= p_7 + 2p_5 + 2p_3 + 4p_2 + 2p_1, \\ P_8 &= p_8 + 2p_6 + 2p_4 + 4p_3 + 2p_2. \end{aligned}$$

on a identiquement

$$P_n = \sum_{i=1}^n p_i \Psi_{n,i},$$

$\Psi_{n,i}$ étant donné par l'égalité

$$\Psi_{n,i} = \sum -1^i \frac{5-j-k-l-m+n!}{j!i!k!l!m!} x^{j+i+k+l+m},$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs j, i, k, l, m qui satisfont à la condition

$$5j + 4i + 3k + 2l + m = n - i.$$

Les expressions de Q_n , R_n , S_n se déduiraient d'ailleurs instantanément des relations qui précèdent; il suffirait de remplacer, dans toutes celles-ci, P et p par Q et q , ou R et r , ou S et s .

38. Nous voyons ainsi que P_n , Q_n , R_n , S_n seront connus dès que l'on connaîtra l'indice n , ainsi que les valeurs numériques des nombres p, q, r, s , qui sont, dans chaque espèce, au nombre de huit. Or, ces dernières valeurs pourront se calculer directement

dès que l'on connaîtra la case de départ; donc notre problème est complètement résolu.

39. Pour en bien faire comprendre la solution, prenons un exemple particulier. Supposons que la case de départ soit la seconde de la première rangée et la case d'arrivée la quatrième de la $n^{\text{ième}}$ rangée. Il s'agira de calculer S_n .

Or, dans ce cas particulier, on voit directement que les huit nombres $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ sont respectivement 0, 1, 0, — 1, 1, 1, 0, 0. Donc on a

$$S_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 4) + \Psi(n, 5) + \Psi(n, 6),$$

les quantités Ψ gardant les significations qu'on leur a données [37] plus haut.

VII. — Sur la méthode en analyse combinatoire.

40. Les problèmes de l'analyse combinatoire sont de telle nature, que la résolution s'en réduit presque toujours à la recherche du nombre $X_{m,n}$ des groupes que l'on peut former, suivant certaines lois données, avec m objets pris n à n . La détermination de ce nombre dépend évidemment des lois données; d'ordinaire, elle présente des difficultés réelles d'autant plus grandes, qu'on ne trouve, dans les Livres et Mémoires, pour ainsi dire aucune indication sur la manière de les surmonter.

Évidemment d'ailleurs, ces difficultés sont de deux sortes, les unes de raisonnement, les autres de calcul; car la détermination du nombre $X_{m,n}$, comme la résolution des problèmes de l'analyse ordinaire, comprend deux parties successives : une partie de raisonnement, analogue à la mise en équations des problèmes d'Algèbre; une partie de calcul, analogue à la résolution de ces équations.

41. C'est dans la première partie que se présentent les difficultés les plus sérieuses. On s'y propose, non pas, certes, de trouver l'expression même de $X_{m,n}$ en fonction de m , de n et des paramètres introduits par les lois dont nous avons parlé : une détermination aussi immédiate ne pourrait convenir qu'à des cas tellement simples,

que leur extrême simplicité leur enlèverait toute espèce d'intérêt; on s'y propose, disons-nous, de découvrir des relations où entre l'inconnue $X_{m,n}$; la grande difficulté, c'est d'arriver à de pareilles relations.

Si l'on étudie les procédés, si nombreux et en apparence si divers, employés jusqu'à présent dans cette recherche, on voit qu'ils consistent tous à comparer les groupes dont on cherche le nombre $X_{m,n}$ soit à des groupes dont les nombres sont connus, soit à des groupes dont les nombres sont inconnus.

Avec quels groupes doit-on comparer les groupes étudiés? De quelle manière doit s'effectuer cette comparaison? La réponse à cette double question ne peut être donnée pour tous les cas possibles. La formuler pour une série de cas déterminés, c'est-à-dire pour un ensemble déterminé de problèmes, ce serait donner la méthode générale permettant de résoudre tous ces problèmes, ce serait faire pour eux ce que nous venons de faire pour ceux qui rentrent dans l'énoncé général [1] donné au commencement du présent Mémoire.

Nous pouvons dire seulement, d'une façon assez vague, et en nous fondant bien moins sur le raisonnement que sur notre expérience, que le plus difficile n'est pas d'effectuer la comparaison des groupes étudiés avec d'autres groupes, mais de choisir ces autres groupes. Nous serions même tenté d'énoncer cette règle empirique : toutes les fois que la comparaison des groupes étudiés avec les autres groupes ne s'effectue pas très-facilement, toutes les fois, en d'autres termes, qu'elle ne conduit pas, d'une façon presque immédiate, à une ou plusieurs équations, c'est que les autres groupes sont mal choisis; il faut procéder à un choix nouveau.

42. Quoi qu'il en soit, les groupes étudiés, comme ceux avec lesquels on les compare, n'entrent que par leurs nombres dans les relations auxquelles on parvient. Les groupes dont les nombres sont connus n'apportent, dans ces relations, que des quantités connues, dont il est pour ainsi dire inutile de s'occuper. Les groupes dont les nombres sont inconnus y apportent des quantités inconnues, et ces quantités inconnues, qu'il est indispensable de considérer, se partagent en trois classes parfaitement distinctes :

D'abord, le nombre $X_{m,n}$ des groupes étudiés;

Ensuite, les nombres $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., qui correspondent à des groupes formés suivant les mêmes lois que les groupes étudiés, mais différant de ceux-ci par les valeurs numériques des indices m et n , ou de l'un seulement de ces indices;

Enfin, les nombres $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., qui correspondent à des groupes différant de ceux qu'on étudie, non point par des valeurs numériques d'indices, mais par les lois mêmes qui président à leur formation.

L'inconnue $X_{m,n}$ entre forcément dans une ou plusieurs des relations qu'on obtient; les inconnues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., jointes à $X_{m,n}$, donnent lieu à des lois de récurrence simples ou doubles, suivant qu'elles présentent des variations d'un seul ou des deux indices; les inconnues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., peuvent presque toujours être regardées comme des inconnues auxiliaires qu'il faut éliminer.

43. Supposons maintenant qu'on ait achevé la partie de raisonnement, c'est-à-dire qu'on ait réussi à former une ou plusieurs équations entre les inconnues. Il faut passer à la partie de calcul, qui, comme nous l'avons dit, est de beaucoup la moins difficile des deux.

Les difficultés qu'elle présente ne consistent, en effet, que dans des calculs à effectuer, et ceux-ci s'effectuent par les seuls procédés de l'Analyse ordinaire, non pas prise dans toute sa généralité, mais réduite aux trois théories de la résolution des équations, des séries récurrentes et de l'élimination.

Si l'on n'a introduit dans les calculs que la seule inconnue $X_{m,n}$, auquel cas il a suffi de former une seule équation, on n'a qu'à résoudre cette équation.

Si, outre $X_{m,n}$, on a considéré encore les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., correspondant à des groupes de même nature que les groupes étudiés, l'équation ou les équations reliant ces inconnues expriment des lois récurrentes d'où l'on pourra, dans la plupart des cas, déduire l'expression de $X_{m,n}$.

Si enfin l'on considère à la fois l'inconnue $X_{m,n}$, les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ... et les inconnues non analogues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., il faudra d'abord, par des éliminations convenables, séparer les inconnues, c'est-à-dire obtenir des équations

tions ne contenant plus que des quantités X , ou des quantités Y , ou des quantités Z , etc.; il faudra ensuite, cette séparation une fois effectuée, étudier les lois récurrentes données par les équations obtenues. Comme dans le cas précédent, on en pourra généralement conclure l'expression même de $X_{n,p}$.

44. A cet avantage de se traiter par les procédés de l'Analyse ordinaire, la partie de calcul joint celui, non moins appréciable, de se traiter dans tous les cas possibles d'une manière uniforme. La partie de raisonnement ne participe point à cette uniformité : elle varie toutes les fois que l'on passe d'un genre de problèmes à un autre.

45. En résumé, pour calculer $X_{n,p}$, la marche à suivre, tant dans le raisonnement que dans le calcul, dépend surtout de ce que la comparaison des groupes donnés avec d'autres groupes porte sur des groupes dont le nombre est connu, ou sur des groupes dont le nombre est inconnu et qui sont de même nature que les groupes étudiés, ou enfin sur des groupes dont le nombre est encore inconnu, mais qui diffèrent des groupes étudiés par la loi même de formation.

Le cas où la comparaison embrasse à la fois ces trois sortes de groupes comprend évidemment tous les autres. Nous plaçant dans cette hypothèse, nous pouvons esquisser de la manière suivante la marche à suivre pour arriver à $X_{n,p}$:

1° Choisir les groupes auxquels on comparera les groupes à étudier :

2° Comparer les groupes étudiés aux groupes qu'on vient de choisir, pour relier par des équations les nombres qui leur correspondent :

3° Séparer les inconnues, de façon à n'avoir plus que des équations dans chacune desquelles les inconnues correspondent toutes à des groupes d'une même nature :

4° Résoudre, par la méthode des séries récurrentes, celle de ces nouvelles équations qui répond aux groupes étudiés.

46. Si en regard de cette esquisse un peu vague, dans ses deux premières parties surtout, on place la méthode [8] qui fait l'objet

du présent Mémoire, on voit que cette dernière comprend aussi quatre opérations successives, rentrant tout à fait dans celles que nous venons d'indiquer, et il s'ensuit immédiatement que cette dernière méthode [8], qui nous permet de résoudre toute une série de problèmes, peut être regardée comme un type pour les méthodes qui permettraient d'en résoudre d'autres séries.

On voit par là l'importance extrême de cette méthode [8]; mais, niât-on ce rôle de type qu'elle peut, selon nous, remplir, elle n'en serait pas moins très-importante, puisqu'elle permet de résoudre une infinité de problèmes, et que ces problèmes appartiennent à l'Analyse combinatoire, c'est-à-dire à une partie des Mathématiques où les méthodes générales étaient jusqu'à présent fort rares, pour ne pas dire inconnues.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

M. le Président rappelle la perte que la Société a faite dans la personne de M. Bienaymé; la Société s'associe aux regrets exprimés par son Président.

Communications :

M. Darboux : *Sur la description mécanique de la courbe générale d'un degré quelconque.*

M. Halphen : *Sur la réduction de certaines équations différentielles.*

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Lemonnier : *Sur la résolution d'un système de trois équations du second degré à trois inconnues.*

M. Laguerre : *Sur l'intégrale* $\int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + az} dz$.

M. Jordan : *Sur la série de Fourier*.

M. Darboux : *Sur l'extension de la théorie des mouvements plans aux transformations les plus générales, en particulier sur la déformation d'une figure qui demeure semblable à elle-même.*

M. Darboux : *Sur le quadrilatère circonscrit à un cercle.*

M. Halphen : *Sur les polygones de Poncelet.*

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. Laguerre : *Sur les normales aux coniques.*

M. Halphen présente, de la part de M. D. André, un Mémoire intitulé *Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données.*

M. Halphen : *Sur l'absence de points isolés dans les courbes unicursales.*

SÉANCE DU 27 DÉCEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communication :

M. Darboux : *Sur les systèmes articulés.*

SÉANCE DU 10 JANVIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Élections : Le Bureau et le Conseil sont renouvelés, comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

Communication :

M. Laguerre : *Sur les coniques homofocales*

SÉANCE DU 24 JANVIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. O. BONNET.

Communication :

M. Laguerre : *Sur les coniques homofocales.*

SÉANCE DU 14 FÉVRIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. O. BONNET.

Communications :

M. Laguerre : *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

M. Halphen : *Sur la formation de l'équation différentielle des coniques.*

M. Stephanos : *Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables.*

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un corps qui reste homothétique à lui-même.*

Présentation d'un nouveau Membre : M. E. Picard est présenté par MM. Lemonnier et Picquet.

Supplément à l'état de la Société mathématique de France,
pour l'année 1879.

Membres du Conseil non résidents.....	{	M. ANDRÉ (Désiré).
		M. AOUST ^e (l'abbé).
		M. CLAYEUX.
		M. WEYR (Émile).

Sur quelques propriétés des coniques homofocales;
par M. LAGUERRE.

(Séances des 10 et 24 janvier 1879.)

I.

1. Je considère, dans un plan, un système de coniques homofocales; soient Ox et Oy les axes de ces coniques, F et F' leurs foyers réels communs, que je supposerai situés sur l'axe Ox ; les deux foyers imaginaires communs Φ et Φ' seront, par suite, situés sur l'axe Oy . Pour abréger, j'appellerai simplement *conique du système* une conique ayant pour foyers les points F , F' , Φ et Φ' .

Étant donné un point quelconque M du plan, deux coniques du système se croisent en ce point; désignons par N et N' les centres des deux cercles qui osculent respectivement ces deux coniques au point M , et par μ la droite qui joint ces deux points. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F' ; je dirai que c'est l'axe du point M .

2. Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, il existe trois points M , M' et M'' pour lesquels cette droite est un axe.

Si l'on considère la conique du système qui touche la droite μ , et que l'on désigne respectivement par α et β les points où la normale menée au point de contact rencontre les axes Ox et Oy , les trois points M , M' et M'' , qui ont pour axe la droite μ , sont situés sur le cercle A passant par les points α , β et le centre O commun aux coniques du système.

3. On sait que toutes les propriétés des normales et des centres de courbure d'une conique sont triples; les normales à une conique demeurent, en effet, normales à la transformée de cette conique quand on effectue une transformation homographique qui, aux deux ombilics du plan ⁽¹⁾, fait correspondre deux des foyers indépendants de cette conique.

(1) Je désigne ainsi les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles tracés dans le plan.

De la proposition précédente, on déduit donc immédiatement les théorèmes qui suivent :

La conique qui, passant par le point β et les deux foyers F et F' , a pour asymptotes l'axe Oy et la droite $\alpha\beta$ contient les trois points M , M' et M'' .

La conique qui, passant par le point α et les deux foyers Φ et Φ' , a pour asymptotes l'axe Ox et la droite $\alpha\beta$ contient également les trois points M , M' et M'' .

4. Les trois points qui ont pour axe la droite μ sont, comme on le voit, les trois points communs aux deux coniques dont je viens de parler et au cercle A défini précédemment [2].

Mais on peut aussi les déterminer par l'intersection de ce cercle et d'une conique avec une conique ayant pour axes les droites Ox et Oy .

Désignons, en effet, par C la conique du système qui touche la droite μ et par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C ; nous pourrions énoncer la propriété suivante :

Les points M , M' et M'' , qui ont pour axe la droite μ , sont situés sur la conique K ; le quatrième point de rencontre de cette conique et du cercle A est le point O' qui, sur le cercle, est diamétralement opposé au centre O commun aux coniques du système.

5. *Le point O' , diamétralement opposé au point O sur le cercle A , est le conjugué harmonique du point O relativement aux points M , M' et M'' .*

6. *Le triangle $MM'M''$ est circonscrit à la conique C du système qui touche la droite μ .*

7. Considérons l'hyperbole équilatère H , qui a pour centre le point O et dont l'axe transverse, dirigé suivant Oy , a pour longueur FF' ; nous pourrions énoncer la proposition suivante :

Le triangle $MM'M''$ est autopolaire relativement à l'hyperbole H .

8. Soit $M'M''$ un côté quelconque du triangle $MM'M''$; du point O abaissons une perpendiculaire sur ce côté, et désignons par M_0 le point symétrique, par rapport au point O , du pied de cette perpendiculaire.

Le point M_0 est situé sur l'axe μ du point M , et la droite MM_0 est perpendiculaire à cet axe.

9. Étant donnée une conique C du système, on voit que, si la droite μ roule sur cette conique, les points correspondants M , M' et M'' décrivent la conique K , tandis que les côtés du triangle $MM'M''$ roulent tangentiellement à C elle-même.

D'où les propositions suivantes :

Étant donnée une conique quelconque C du système, désignons par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C .

Cela posé, en appelant O' un point quelconque de K et O le centre commun aux courbes du système, si, sur OO' comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle rencontre les axes en deux points; la droite qui joint ces deux points est normale à la conique C .

Ce cercle rencontre de nouveau K en trois autres points; chacun de ces points a pour axe une même droite tangente à C .

Les côtés du triangle formé par ces points sont circonscrits à C .

Ce triangle est autopolaire relativement à l'hyperbole équilatère H .

10. Les coniques C et K , qui figurent dans l'énoncé des propositions qui précèdent, ont entre elles des relations qui méritent d'être étudiées.

Entre autres propositions, je rappellerai la suivante, que j'ai déjà fait connaître, il y a quelques années, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾ :

Si d'un point de la conique K on mène des tangentes à la développée de la conique C , les quatre points de contact sont

⁽¹⁾ *Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1875).

en ligne droite, et la droite qui joint ces points de contact est normale à la courbe C.

II.

11. Soit M un point quelconque du plan; par ce point passent deux coniques du système. En désignant par N et N' les centres des cercles qui osculent ces coniques au point donné, je dirai que N et N' correspondent au point M .

Réciproquement, étant donné un point N du plan, on peut chercher combien de points M lui correspondent, c'est-à-dire combien existent de cercles ayant le point M pour centre et osculateurs d'une conique du système.

12. Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les considérations suivantes.

Étant donné un point N du plan, si de ce point on mène les normales à une conique du système, les tangentes aux points de contact touchent une parabole P tangente aux axes de la conique. Cette parabole est la même quelle que soit la conique du système que l'on considère; elle est l'enveloppe des polaires du point N relativement aux diverses coniques qui ont pour foyers les points F et F' .

13. Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette importante proposition, due à M. Chasles :

Le lieu des pôles d'une droite relativement aux coniques qui forment un système homofocal est une droite qui rencontre la droite donnée au point où elle touche la conique du système qui lui est tangente.

Soient P l'enveloppe des polaires dont je viens de parler (on voit immédiatement que c'est une parabole tangente aux axes), C une conique du système, et T une tangente commune à C et à P . En désignant par M le point où elle touche C , on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite menée par M normalement à C ; en vertu du théorème de M. Chasles

que je viens de rappeler, cette droite passe par le point N; donc NM est normale à la conique C.

Réciproquement, abaissons du point N une normale à la conique C, et soit M le pied de cette normale. En désignant par T la tangente menée en ce point, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite MN. Il y existe donc une conique du système pour laquelle le pôle de T se confond avec le point N; par suite, la droite T est tangente à la parabole P.

La proposition que j'ai énoncée est donc entièrement établie (1).

14. Le foyer de la parabole P peut se déterminer aisément. On peut, en effet, la définir de la façon suivante :

Si autour du point N on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, l'enveloppe de ces perpendiculaires est la parabole P (2).

Pour avoir le foyer de la parabole, il faut chercher les droites isotropes tangentes à cette courbe. On les obtiendra si l'on considère les transversales isotropes passant par le point N. En désignant par I l'un des ombilics du plan, soit NI l'une de ces transversales; menons par les foyers F et F' des parallèles à cette droite. Le foyer ϕ de la parabole se trouve sur la droite isotrope conjuguée harmonique de NI relativement aux deux droites dont je viens de parler; des conséquences analogues se déduiraient de la considération de la transversale isotrope passant par le second ombilic J.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Le foyer de la parabole P est le conjugué harmonique du point N relativement aux deux foyers F et F' communs à toutes les courbes du système.

(1) On démontrerait de même que :

Si d'un point N de l'espace on mène les normales à une surface du second ordre, les pieds des normales sont les points de contact des plans qui touchent la surface et sont osculateurs de la cubique gauche enveloppée par les plans polaires de N, relativement aux diverses surfaces du second ordre qui ont les mêmes focales que la surface donnée.

(2) CHABLES, *Traité des sections coniques*, p. 145.

J'ajouterai que :

La directrice de cette parabole est la droite ON qui joint le point N au centre commun des coniques du système.

15. Du théorème précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si l'on imagine, dans le plan des deux axes Ox et Oy , deux droites quelconques D et D' , le foyer de la parabole qui touche ces quatre droites a pour conjugué harmonique, relativement aux foyers F et F' , le point de rencontre des normales menées aux deux courbes du système qui touchent D et D' .

Et, si l'on suppose que les droites D et D' viennent se confondre :

Si en un point M d'une conique on mène la tangente, et si l'on imagine la parabole qui touche cette tangente au point M et en outre est tangente aux axes de la conique, le conjugué harmonique du foyer de cette parabole, relativement aux deux foyers de la courbe, est le centre du cercle qui oscule cette courbe au point M .

16. Cela posé, pour trouver les points M correspondant à un point donné M , construisons le point M_0 , conjugué harmonique de M relativement aux deux foyers F et F' , et imaginons la parabole P , qui a pour foyer le point M_0 et pour directrice la droite OM .

Il est clair, par ce qui précède, que :

Les points N correspondant au point M sont les pieds des normales abaissées de ce dernier point sur la parabole P .

Ces points sont donc au nombre de trois, et, si l'on désigne par I le milieu du segment $M_0 M$, ils s'obtiendront en cherchant l'intersection de P avec le cercle décrit sur $M_0 I$ comme diamètre.

17. Le triangle formé par ces trois points jouit de diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles je me bornerai à mentionner la suivante :

Le triangle formé par les trois points correspondant à un point donné du plan est circonscrit à une conique du système.

Je me réserve de revenir sur ce sujet et d'étendre aux surfaces homofocales du second ordre les résultats contenus dans cette Note.

Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; par M. LACUTERRE.

(Séances des 14 et 28 février 1879.)

I.

1. L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \dots \pm \frac{1.2.3 \dots n-1}{x^n},$$

la relation suivante :

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = e^{-x} F(x) \mp 1.2 \dots n \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x^{n+1}}.$$

La série que l'on obtient en faisant croître indéfiniment n dans le polynôme $F(x)$ est nécessairement divergente pour toute valeur de x , quelque grande qu'on la suppose. Néanmoins, pour de grandes valeurs de la variable, elle peut, en ne tenant compte que des premiers termes, fournir une valeur très-approchée de l'intégrale considérée (1).

Je me propose, dans la Note qui suit, d'obtenir le développement en fractions continues du polynôme $F(x)$.

2. En posant, pour abréger, $N = \pm 1.2.3 \dots n$, on a

$$F(x) = e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} - N \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x^{n+1}} \right),$$

(1) Relativement à ces séries demi-convergentes, voir la Note de M. Hermite Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{n-1} - z^n}{1-z} dz$, insérée dans les *Actes de l'Académie royale de Turin* 17 novembre 1878.

d'où

$$(2) \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x} - \frac{N}{x^{n+1}}.$$

Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une réduite du polynôme $F(x)$ dont le dénominateur soit d'un degré $m < \frac{n}{2}$. On a

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right) \quad (1),$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right),$$

ou encore, en vertu de la relation (2), et en remarquant que $2m$ est au plus égal à n ,

$$\frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right),$$

ou encore

$$(3) \quad x[\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x) - \varphi(x)f'(x)] + f^2(x) = A,$$

A désignant une quantité constante.

3. Formons maintenant l'équation linéaire du second ordre $My'' - Ny' + Py = 0$, qui a pour solutions

$$y_1 = f(x) \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi(x)e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x};$$

on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \Omega, \quad \text{où} \quad \Omega = y_1' y_2 - y_2' y_1.$$

Or un calcul facile donne, en tenant compte de la relation (3),

$$\Omega = \frac{A e^{-x}}{x};$$

(1) Je désigne généralement, et en faisant abstraction des valeurs des coefficients, par $\left(\frac{1}{x^p} \right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^p}$.

on a donc

$$\frac{N}{M} = - \left(1 + \frac{1}{x} \right),$$

d'où il suit que le polynôme $f(x)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(4) \quad xy'' + (x+1)y' - my = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi(x)e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

Le développement en série donne aisément

$$\begin{aligned} f(x) = x^m + m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1.2} x^{m-2} \\ + \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1.2.3} x^{m-3} + \dots + 1.2.3\dots m. \end{aligned}$$

4. En dérivant m fois de suite l'équation (4), il vient

$$xy^{(m+1)} + (x+m+1)y^{(m+1)} = 0,$$

d'où, en désignant par B une quantité constante,

$$y^{(m+1)} = B \frac{e^{-x}}{x^{m+1}},$$

et, par suite,

$$y = \frac{B}{1.2.3\dots m} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}} dz;$$

c'est une solution particulière de l'équation (4), et, comme elle ne renferme pas de termes entiers en x , sa valeur est précisément la fonction que j'ai désignée précédemment par u .

On a donc, en modifiant un peu les notations déjà employées et en mettant en évidence le degré du polynôme $f(x)$,

$$u_m = \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = \frac{B}{1.2.3\dots m} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}} dz;$$

en y faisant $x = 0$, on en déduit

$$\frac{B}{1.2.3\dots m} = -f_m(0) = -1.2.3\dots m \doteq -m!,$$

Les diverses réduites de cette expression sont

$$e^{-x} \frac{1}{x+1}, \quad e^{-x} \frac{x+3}{x^2+4x+2}, \quad e^{-x} \frac{x^2+8x+11}{x^3+9x^2+18x+6}, \quad \dots,$$

l'expression générale de la $m^{\text{ième}}$ réduite étant $e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$; les formules (7) et (8) permettent d'ailleurs de calculer successivement les valeurs des polynômes $\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$.

7. Comme la fraction continue précédente provient d'une série divergente, il est nécessaire de prouver qu'elle est convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$. A cet effet, je remarque que de l'équation (5) on déduit

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)} + \frac{m!}{f_m(x)} \int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz.$$

Déjà résulte immédiatement que les diverses réduites dont l'expression générale est $e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$ vont toujours en croissant en restant inférieures à la valeur de l'intégrale cherchée. Pour démontrer qu'elles ont cette intégrale pour limite, il suffit de faire voir que la limite de $\frac{m!}{f_m(x)} \int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz$ est nulle quand m croît indéfiniment.

Je ferai observer d'abord que le facteur $\frac{m!}{f_m(x)}$ tend vers zéro puis, en désignant par A une quantité très-grande et arbitrairement choisie, je mettrai l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz$ sous la forme suivante :

$$\int_x^A \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz + \int_A^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz.$$

Relativement à la première intégrale, comme dans l'intervalle considéré $\frac{z-x}{z}$ est toujours plus petit que $1 - \frac{x}{A}$, cette intégrale est plus petite que $\left(1 - \frac{x}{A}\right)^m \int_x^A \frac{e^{-x} dx}{x}$; donc, quelque grand qu

soit A , elle tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. La seconde intégrale est évidemment plus petite que $\int_A^\infty e^{-x} dx$, c'est-à-dire que e^{-A} ; donc, pour une valeur suffisamment grande de A , elle est aussi petite que l'on veut. Ainsi, la fraction continue, quoique provenant d'une série essentiellement divergente, est elle-même convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

8. Comme application, faisons $x = 1$; les réduites suivantes :

$$\frac{4}{7e}, \quad \frac{20}{34e}, \quad \frac{124}{209e}, \quad \frac{920}{1546e}, \quad \frac{7940}{13327e}$$

seront des valeurs approchées de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; en les réduisant en décimales, on obtient les expressions suivantes :

$$0,21; \quad 0,216; \quad 0,218; \quad 0,2189; \quad 0,2192.$$

La véritable valeur est 0,2193839.

En faisant $x = 4$, la deuxième réduite donne pour valeur approchée de l'intégrale $\int_4^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ la valeur $\frac{7}{34e}$, ou, en décimales, 0,00377, dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

9. Dans sa *Mécanique céleste* (t. IV, Livre X), Laplace a donné le développement en fraction continue de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$.

Sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est, comme l'a fait remarquer Jacobi, entièrement inadmissible; ses résultats sont néanmoins exacts et ont été démontrés directement par l'illustre géomètre (1) allemand.

La méthode que j'ai développée ci-dessus, relativement à l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$, s'applique entièrement à l'intégrale considérée

(1) *De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ evolvere licet* (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 346).

par Laplace, et elle montre d'une façon très-nette comment, tout en partant d'une série divergente, on peut néanmoins arriver à une fraction continue donnant la valeur de la fonction qu'il s'agissait de développer.

II.

1. J'ai montré que les diverses réduites $\frac{r_n(x)}{f_n(x)}$ de la série semi-convergente

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \frac{1.2.3.4}{x^5} + \dots$$

avaient pour limite la transcendante $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

On a d'ailleurs, en représentant par $\Pi(n)$ le produit $1.2\dots(n-1)n$,

$$(1) f_n(x) = \Pi(n) \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-3)}{1^2.2^2.3^2} x^3 + \dots \right],$$

$$(2) x f'_n(x) = n f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x)$$

et

$$(3) f_{n+1}(x) = (x + 2n + 1) f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x).$$

La série $F(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^0 e^z dz \frac{1}{x} + \int_{-\infty}^0 e^z z dz + \frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^0 e^z z^2 dz + \dots + \frac{1}{x^{m+1}} \int_{-\infty}^0 e^z z^m dz + \dots$$

Des principes posés par M. Heine, il résulte immédiatement que, $\psi(x)$ désignant un polynôme quelconque d'un degré inférieur à n , on a

$$(4) \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) \psi(x) dx = 0,$$

d'où l'on conclut, puisque e^x est toujours positif, que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales; elles sont d'ailleurs évidemment négatives.

2. En particulier, on déduit de l'équation (4) la relation sui-

vante, où n et n' désignent deux nombres entiers différents :

$$(5) \quad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f_{n'}(x) dx = 0.$$

Pour évaluer $\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx$, je remarque que, en intégrant par parties, on a

$$\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx = [e^x f_n^2(x)]_{-\infty}^0 - 2 \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f_n'(x) dx;$$

l'intégrale qui figure dans le second membre de cette identité est nulle, en vertu de la relation (4); on déduit donc de la relation (1)

$$(6) \quad \int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx = \Pi^2(n).$$

Des formules précédentes résulte, comme on sait, le développement d'une fonction quelconque $\Phi(x)$ au moyen des polynômes $f_n(x)$.

Si l'on pose, en effet,

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \dots + A_n f_n(x) + \dots,$$

on a

$$A_n = \frac{\int_{-\infty}^0 e^x \Phi(x) f_n(x) dx}{\Pi^2(n)}.$$

3. Soit, comme application,

$$\Phi(x) = e^{tx}.$$

On aura

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} f_n(x) dx \\ &= \Pi(n) \int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} x^3 + \dots \right] \\ &= \Pi(n) \left[\frac{1}{1+t} - \frac{n}{(1+t)^2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{(1+t)^3} + \dots \right] = \Pi(n) \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où le développement suivant :

$$e^{tx} = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2} f_1(x) + \frac{t^2}{(1+t)^3} \frac{f_2(x)}{1.2} + \dots \\ + \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \frac{f_n(x)}{\Pi(n)} + \dots$$

ou encore, en posant $t = \frac{z}{1-z}$,

$$(7) \quad \frac{e^{\frac{zx}{1-z}}}{1-z} = 1 + z f_1(x) + \frac{z^2}{1.2} f_2(x) + \dots + \frac{z^n}{\Pi(n)} f_n(x) + \dots,$$

développement qui subsiste évidemment pour toute valeur de z dont le module est plus petit que l'unité.

Les diverses propriétés des polynômes $f_n(x)$ se déduiraient du reste très-facilement de l'équation précédente en employant les méthodes données par Legendre relativement aux fonctions X_n .

On a, par exemple, l'identité

$$e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)} = \frac{e^{x(\frac{z}{1-z} + \frac{t}{1-t} + 1)}}{(1-z)(1-t)} = \frac{e^{\frac{1-tz}{(1-t)(1-z)}}}{(1-t)(1-z)},$$

d'où, en intégrant,

$$\int_{-\infty}^0 e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)} dx = \frac{1}{1-tz} = 1 + tz + t^2 z^2 + \dots,$$

et de là résultent immédiatement les formules (5) et (6).

4. De la formule

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} f_n(x) dx = \Pi(n) \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

on déduit, en dérivant m fois par rapport à t ,

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} x^m f_n(x) dx = \Pi(n) D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^0 e^x x^m f_n(x) dx = \Pi(n) \left[D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right]_{t=0},$$

et, en supposant $m \equiv n$,

$$\int_{-\infty}^0 e^x x^m f_n(x) dx = (-1)^{m-n} \frac{\Pi^2(m)}{\Pi(m-n)},$$

d'où le développement suivant :

$$x^m = (-1)^m \Pi(m) \left[f_0(x) - m f_1(x) + \frac{m(m-1)}{1^2 \cdot 2^2} f_2(x) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} f_3(x) - \dots \right].$$

Cette formule, on le voit, se déduit de la formule (1) (où d'ailleurs se trouve le nombre entier n au lieu du nombre m) en changeant $f_n(x)$ en $(-x)^n$ et x^n en $(-1)^n f_n(x)$.

De là résulte que, si une fonction quelconque $\Phi(x)$, ordonnée suivant les puissances croissantes de x , s'exprime au moyen des polynômes $f_n(x)$ par la formule symbolique suivante :

$$\Phi(x) = \Theta(f),$$

où, dans le second membre, la puissance $n^{\text{ième}}$ de f doit être remplacée par f_n , on a aussi symboliquement

$$\Theta(-x) = \Phi(-f).$$

Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables;

par M. STÉPHANOS.

(Séance du 14 février 1879.)

1. Nous allons faire connaître un mode de développement des nombres en série dont on peut tirer une propriété caractéristique des nombres incommensurables.

2. Pour évaluer un nombre quelconque, on peut employer un système de numération complexe qui se présente très-naturellement et qui admet pour unités successives

$$(1) \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \dots$$

3. Suivant ce système de numération, tout nombre A sera représenté par une expression de la forme

$$(2) \quad A = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ seront des entiers non négatifs déterminés par les conditions

$$(3) \quad A - \frac{a_1}{1} - \frac{a_2}{1.2} - \dots - \frac{a_i}{1.2 \dots i} < \frac{1}{1.2 \dots i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

4. Il est évident que tout nombre A ne peut être représenté de cette façon que d'une seule manière.

On aperçoit de plus, aisément, que :

L'expression (2), qui représente, d'après le système de numération (1), un nombre quelconque A, a un nombre limité ou illimité de termes, suivant que le nombre A est commensurable ou non.

5. Les nombres entiers a_i , qui figurent dans l'expression (2) du nombre A, satisfont, en vertu des inégalités (3), aux conditions

$$(4) \quad a_i < i \quad (i = 2, 3, 4, \dots).$$

Étant donnée maintenant une expression indéfiniment prolongée

$$(5) \quad \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

satisfaisant aux conditions (4), on peut se demander si le nombre A qu'elle représente est incommensurable ou non, question qui revient à savoir si les nombres a_i satisfont ou non aux conditions (3) ou bien aux suivantes :

$$(6) \quad \frac{1}{1.2 \dots (i-1)} > \frac{a_i}{1.2 \dots i} + \frac{a_{i+1}}{1.2 \dots (i+1)} + \dots$$

6. Avant de répondre à cette question, on peut remarquer que le nombre représenté par l'expression particulière

$$\frac{k-1}{1.2 \dots k} + \frac{k}{1.2 \dots (k+1)} + \dots \quad (k > 1),$$

étant le plus grand nombre représentable par une expression de la forme

$$\frac{a_k}{1.2\dots k} + \frac{a_{k+1}}{1.2\dots(k+1)} + \dots \quad (k > 1),$$

où $a_i < i$, est précisément égal à $\frac{1}{1.2\dots(k-1)}$.

7. Cela étant, on peut conclure que :

Une expression indéfiniment prolongée de la forme

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

ou $a_i < i$, représente un nombre commensurable ou non, suivant que les nombres a_i sont, à partir d'un certain rang k , égaux toujours à $i-1$ ou ne le sont pas.

Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 février 1879.)

Dans une Note insérée au Tome IV de ce *Bulletin*, j'ai indiqué un moyen de former immédiatement l'équation différentielle du cinquième ordre des coniques dans le plan. Je m'y fondais sur cette propriété, facile à reconnaître *a priori*, que l'équation ne doit contenir ni la variable indépendante, ni la fonction, ni sa dérivée première. Voici maintenant un nouveau procédé pour parvenir très-rapidement aussi à cette même équation. Soit

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

l'équation d'une conique. Par deux dérivations, on obtient

$$y'' = (AC - B^2)(Ax^2 + 2Bx + C)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en peut conclure que y'' , élevé à la puissance $-\frac{2}{3}$, est un polynôme du second degré arbitraire. Par suite, l'équation cherchée est la suivante :

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'' = 0,$$

ou, développée.

$$9y''^2y'' - 45y''y''y'' + 40y''^3 = 0.$$

Remarquons, en passant, que l'équation $(y''^{-\frac{1}{3}})'' = 0$ serait l'équation différentielle des paraboles.

L'intégration de l'équation (1) n'est pas sans intérêt; on y trouve l'application de plusieurs procédés d'abaissement classiques. Si l'on prend y'' pour variable et y'' pour fonction, on obtient la transformée

$$y'' = \xi, \quad y'' = \tau, \quad 9\xi^2(\tau^2 + \tau^2) - 45\xi\tau' + 40\tau^2 = 0.$$

Cette dernière est homogène en ξ, τ ; elle l'est aussi en τ, τ', τ'' . On a donc deux procédés pour l'abaisser au premier ordre. Prenons, par exemple, celui qui découle de la deuxième homogénéité. Il consiste à prendre une nouvelle fonction u en posant $\tau = e^{u d\xi}$. La transformée est alors

$$9\xi^2(u' + 2u^2) - 45\xi u + 40 = 0.$$

Cette dernière est une de celles qui s'intègrent au moyen d'une intégrale particulière. Or il existe manifestement deux intégrales de la forme $u = A\xi^{-1}$, et l'on trouve effectivement, par substitution,

$$9A^2 - 27A + 20 = 0,$$

équation dont les racines sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{4}{3}$. En achevant l'intégration, on obtient

$$u = \frac{1}{3\xi} \left(5 - \frac{1}{c\xi^{\frac{2}{3}} + 1} \right).$$

Par une quadrature, on a ensuite

$$\tau = c' \xi^{\frac{1}{3}} \left(1 + c \xi^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\xi}{dx}.$$

Séparant les variables et effectuant la nouvelle quadrature, on parvient à cette nouvelle équation, en modifiant la constante c' ,

$$b(x+a)^2 = \frac{1 + c \xi^{\frac{2}{3}}}{\xi^{\frac{1}{3}}}$$

ou

$$y''^{-\frac{2}{3}} = b(x+a)^2 - c.$$

On retrouve ainsi la seconde des équations ci-dessus, exprimant que y'' est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré arbitraire. Deux quadratures ramènent ensuite l'équation finie qui a servi de point de départ.

Note sur la Géométrie des quinconces; par M. LAQUIÈRE.

(Séance du 28 mars 1879.)

Le *Bulletin* de 1878 contient divers articles fort intéressants de MM. Lucas, Laisant et de Polignac sur cette Géométrie, qui n'est autre, à proprement parler, que la peinture graphique de la théorie des nombres, à laquelle elle semble appelée à rendre les mêmes services que la Géométrie pure, ou le raisonnement sur les figures, rend à l'Algèbre ordinaire.

Cette Note, sans rien apprendre de nouveau sur la question, a pour objet de relier entre eux les travaux précités, en montrant que les résultats obtenus découlent d'une sorte de principe unique, qui, simplifiant les démonstrations, en rend à peu près le tout évident. En dégagant la démonstration des élégantes vérités dues à nos savants confrères de tout élément emprunté au calcul, quelle qu'en soit d'ailleurs la simplicité, nous croyons la mettre mieux en harmonie avec le sujet, qui n'est autre, nous le répétons, qu'une question particulière de la Géométrie pure (ou loi des formes concrètes et visibles), la branche représentative de la théorie des nombres, question particulière correspondante dans la théorie des grandeurs abstraites ou numériques.

En prenant comme unité de longueur le côté a d'une case dans l'échiquier indéfini, et la direction des deux côtés d'une case déterminée comme axes coordonnés, les sommets des diverses cases seront tous les points à coordonnées entières. Par suite, les couples de solutions entières de l'équation indéterminée $f(x, y) = 0$ seront les coordonnées des points de rencontre de la courbe $f = 0$ avec

les sommets de l'échiquier (ou des quinconces). Il est tout d'abord évident que les inclinaisons sur les axes de toute droite inscrite dans l'échiquier (c'est-à-dire joignant deux sommets de quinconces) seront commensurables, et, réciproquement, que toute inclinaison commensurable sera parallèle à une droite inscriptible dans les quinconces. Il en est de même, ainsi que l'ont démontré les articles précités, et qu'il va être appliqué d'ailleurs ci-après, de l'inclinaison de deux telles droites l'une sur l'autre. On peut d'ailleurs substituer aux sommets de cases leurs centres, ou encore considérer à la fois centres et sommets comme les *points* ou *sommets* d'un même système de quinconces, en diminuant de moitié l'unité de longueur.

Observons en premier lieu que toute droite à inclinaison commensurable sur les axes coordonnés, partant d'un sommet de quinconce, passe par une série de sommets ayant pour coordonnées, par rapport au premier pris pour origine, les équimultiples du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible exprimant l'inclinaison.

Complétons cette observation en remarquant que, une droite étant inscrite dans les quinconces, si on la prolonge de segments égaux à elle-même, tous les segments successifs seront également inscrits dans les quinconces; qu'enfin une droite de même longueur que la droite inscrite, et qui lui sera menée normalement par un des sommets, sera également inscrite dans les quinconces, puisque ses projections sur les axes, étant simplement permutées de longueur, aboutissent également à des sommets de quinconces. Il en résultera que les quinconces nouveaux construits sur un côté inscrit dans les premiers quinconces ont tous leurs sommets en des sommets du premier système.

Toute droite à inclinaison commensurable sur une droite inscrite dans le premier système de quinconces passe elle-même par une série de sommets des quinconces construits sur celle-ci, et par suite de sommets des quinconces du système primitif.

Soit un système A de quinconces dont la base a , dirigée suivant la droite A, est prise pour unité de longueur. Une droite B, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$, est l'alignement de sommets distants entre eux de $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$. Le système B de

quinconces construits sur la base b , en grandeur et position, a tous ses sommets faisant partie des sommets du système A, les surfaces des cases ou quinconces étant a^2 et $a^2(m^2 + n^2)$ dans les deux systèmes. De même, si l'on considère une troisième droite C, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{p}{q}$ sur B, une longueur $c = b\sqrt{p^2 + q^2}$ dirigée suivant c , ayant un sommet commun avec a et b , sera la base d'un système de quinconces de surface

$$b^2(p^2 + q^2) = a^2(m^2 + n^2)(p^2 + q^2),$$

dont les sommets font partie de ceux du système B, et par suite de ceux du système A. Par conséquent, la droite C a sur la droite A une inclinaison commensurable, et l'on retrouve par le raisonnement géométrique cette base de la théorie des quinconces que : *Si deux angles ont leurs tangentes commensurables, il en est de même de l'angle égal à leur somme ou à leur différence.* La valeur de l'inclinaison du second côté du deuxième angle sur le premier du premier angle s'obtient du reste, sans intermédiaire, par l'évaluation des projections sur les deux axes des quinconces du premier système a , de la droite d'inclinaison $\frac{p}{q}$ sur le côté b du second système de quinconces incliné de $\frac{m}{n}$ sur le côté a .

D'après la construction ci-dessus expliquée, le côté b , inscrit dans les quinconces a , c'est-à-dire *ayant ses deux extrémités en deux sommets de ces quinconces*, le plus court possible, s'obtiendra si m et n sont premiers entre eux, comme hypoténuse du triangle rectangle des coordonnées égales à na et ma . De même le côté c , inscrit dans les quinconces b , aura qb et pb pour projections sur la droite B et sa perpendiculaire. On a donc pour projections, sur les axes des quinconces primitifs a , les valeurs

$$qna - pma,$$

$$qma + pna,$$

$$\text{Inclinaison } (c, a) = \frac{qm + pn}{qn - pm}.$$

Nous dirons que les systèmes de quinconces b et c (c'est-à-dire construits sur les côtés b et c en grandeur et position) sont dérivés

successifs du système a , et le système c est dérivé du système b .

Les diverses propriétés mises en lumière dans les articles que nous avons cités au début de cette Note deviennent désormais évidentes :

1° *Le carré d'une droite quelconque inscrite dans l'échiquier est commensurable, puisque chacune des projections de la droite est elle-même commensurable, par suite également leurs carrés et la somme de ces derniers.*

2° *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux autres carrés est toujours une somme exacte de deux carrés :*

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = s^2 + t^2.$$

On peut toujours supposer m et n d'une part, p et q de l'autre, premiers entre eux, en faisant au préalable disparaître de l'équation les carrés des diviseurs communs qui affecteraient également comme coefficients les deux membres. Cela posé, $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$ est inscrit dans l'échiquier de base a ; de même, $c = b\sqrt{p^2 + q^2}$ est inscrit dans l'échiquier b dérivé de a . Par conséquent,

$$c = a\sqrt{m^2 + n^2}\sqrt{p^2 + q^2}$$

est inscrit dans l'échiquier a , et ses projections s' et t' sur les axes de celui-ci sont des multiples entiers as et at de la base a , ce qui démontre le théorème.

Nous terminerons en montrant que la considération pure de l'échiquier permet d'arriver aux conclusions de M. de Polignac sur les solutions entières de l'équation indéterminée $ax + by = c$, sans l'emploi de la mosaïque à dalles rectangulaires, qui complique la question plutôt qu'il ne la simplifie. Faisons auparavant quelques remarques, évidentes d'ailleurs sur simple énoncé, qui compléteront les éléments de la Géométrie de l'échiquier dans l'ordre d'idées que nous avons adopté.

Toute droite inscrite dans les quinconces est, au point de vue de sa direction seule (abstraction faite de sa longueur), inscriptible dans tout système de quinconces dérivé du premier.

Deux droites inscrites dans un système de quinconces ont entre elles une inclinaison commensurable, l'une d'elles pouvant être

prise comme base d'un système dérivé du premier dans lequel la seconde serait inscriptible. En effet, de même que les sommets de tous les systèmes de quinconces dérivés successifs d'un système primitif font partie des sommets de ce dernier, de même, si pour un instant, laissant de côté la dimension des côtés, on ne se préoccupe que de leur direction, on pourra dire que le système primitif fait également partie d'un quelconque de ceux qui en sont dérivés; un renversement d'échelles entre les bases des deux systèmes permettrait, en effet, de déduire la construction du système primitif du système dérivé supposé construit, en montrant que sur l'alignement de ses sommets sur le côté issu d'un sommet commun se trouve une série de sommets des quinconces primitifs considérés.

Deux côtés inscrits dans un système de quinconces peuvent donc, au point de vue de leurs directions, être considérés comme inscriptibles dans un système quelconque de quinconces dérivés du premier, et en particulier de celui qui a l'un des deux côtés pour base.

Si l'on mène par l'un des sommets de quinconces une droite quelconque à inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$ sur la base a , une longueur $a\sqrt{m^2+n^2}$ de cette oblique sera la base d'un système dérivé de quinconces dont tous les sommets feront partie du système primitif, mais avec un groupement $\frac{1}{m^2+n^2}$ fois moins serré.

De même que le second système dérive du premier en multipliant l'unité de surface par (m^2+n^2) et variant l'orientation de $\frac{m}{n}$, de même le système primitif peut être considéré comme dérivant du second par la variation $-\frac{m}{n}$ d'orientation, et la réduction de l'unité de longueur, base, dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

De l'équation indéterminée $ax + by = c$.

Résoudre graphiquement l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers revient uniquement à chercher les sommets des quinconces

à base unité situés sur la droite représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation ci-dessus, deux côtés de quinconces étant pris pour axes.

Il n'y a donc qu'à construire la droite par ses coordonnées à l'origine $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ et à rechercher sur la droite ainsi posée les sommets de cases de l'échiquier indéfini, à côtés pris pour unité, qui s'y trouvent.

Et d'abord, si $a = Da'$, $b = Db'$, D étant le plus grand commun diviseur de a et b , les projections de la longueur inscrite de cette droite, ou distance de deux sommets consécutifs solutions, sont b' sur l'axe des X et a' sur l'axe des Y , l'inclinaison sur l'axe des X étant $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Si donc x_1 et y_1 représentent un couple de valeurs correspondantes de x et de y , solutions entières, la série des couples de valeurs solutions sera évidemment, en montant pour y ,

$$\begin{array}{ccccccc} y_1, & y_1 + a', & y_1 + 2a', & y_1 + 3a', & \dots, & y_1 + na', \\ x_1, & x_1 - b', & x_1 - 2b', & x_1 - 3b', & \dots, & x_1 - nb', \end{array}$$

et de même, en descendant pour y ,

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 - a', & y_1 - 2a', & \dots, & y_1 - na', \\ x_1 + b', & x_1 + 2b', & \dots, & x_1 + nb'. \end{array}$$

Le tout est ramené à trouver un couple de solutions, par exemple, comme M. de Polignac, la plus petite valeur entière de y , qui sera, je suppose, y_1 , la valeur de x_1 étant du reste positive ou négative suivant les valeurs relatives des coefficients de l'équation.

La construction géométrique de la droite d'appui des sommets solutions nous donnera, sans observations préalables, la règle trouvée par M. de Polignac.

Les segments sous-tendus sur l'axe des X et celui des Y par la droite $ax + by = c$ sont

$$OA = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad OB = \frac{c}{b}.$$

Soient S et T les sommets de quinconces successifs sur l'axe des X entre lesquels tombe le point A ; la longueur SA sera la

fraction qui complète la valeur de $\frac{c}{a}$ en l'ajoutant au plus grand entier OS qu'elle contienne. C'est ce que nous appellerons, avec M. de Polignac, $R\left(\frac{c}{a}\right)$, le reste de la division de c par a .

Soient I l'un quelconque des sommets solutions et H la projection de I sur OA. La similitude des triangles IHA et BOA donne

$$HA = HI \frac{b}{a} = \beta \frac{b}{a},$$

en désignant par β le nombre entier valeur de γ correspondante. Il en résulte que

$$R\left(\frac{\beta b}{a}\right) = R\left(\frac{c}{a}\right),$$

d'où la règle générale suivante :

Diviser par a les multiples successifs entiers de b . Ceux qui donneront un reste égal à celui de la division de c par a auront pour coefficient de multiplicité β les valeurs entières de γ solutions de l'équation. Les valeurs α correspondantes de x s'en déduiront sans peine.

Soit γ_1, x_1 le couple des valeurs correspondant à la plus petite valeur positive γ_1 de γ ; le nombre des solutions positives sera, d'après ce qui a été dit plus haut, égal à $(n+1)$ si l'on désigne par n le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$x_1 - nb' > 0 \quad \text{ou bien} \quad n < \frac{x_1}{b'}.$$

Le nombre des solutions entières est alors d'une unité supérieur au plus grand entier contenu dans le quotient de x_1 par b' , ou, en employant la notation de M. de Polignac,

$$N = \left[\frac{x_1}{b'} \right] + 1.$$

Cette expression revient à celle donnée par lui; en effet,

$$\frac{x_1}{b'} = \frac{c - b\gamma_1}{ab'} = \frac{c - b\gamma_1}{a'b} = \frac{\frac{c}{b} - \gamma_1}{a'},$$

d'où

$$N = \left(\frac{\left[\frac{c}{b} \right] - \gamma_1}{a'} \right) + 1,$$

expression que l'on trouve également à la simple inspection de la figure ci-dessus, le nombre des solutions étant d'une unité supérieur au plus grand nombre de fois que l'on peut ajouter a' à γ sans dépasser OB, soit le plus grand entier $\left[\frac{c}{b} \right]$ contenu dans OB. puisque les valeurs successives de γ croissent de a' .

Sur le développement d'une fonction intermédiaire;
par M. HALPHEN.

(Séance du 28 mars 1879.)

On sait que la fonction Al_1 de M. Weierstrass se développe, suivant les puissances croissantes de l'argument, en une série dont les coefficients sont des polynômes entiers par rapport au carré du module. Ces polynômes se calculent successivement au moyen d'une formule récurrente qui en contient trois consécutifs. Je me propose de montrer que des polynômes analogues, se calculant de la même manière, et qui sont les coefficients d'une fonction très-peu différente, sont susceptibles de recevoir une forme notablement plus simple.

La fonction que je considère ici est la suivante :

$$(1) \quad B(z, k) = Al_1(z, k) e^{\frac{1}{2}(1+k^2)z^2}$$

Envisageons d'abord la fonction

$$F(z, k) = \frac{1}{z} B(z, k).$$

Des deux formules connues

$$Al_1(z, k) = \frac{1}{k} Al_1\left(kz, \frac{1}{k}\right) = -ie^{-\frac{1}{2}z^2} Al_1(iz, k')$$

on conclut, pour la fonction F , ces nouvelles formules

$$(2) \quad F(z, k) = F\left(kz, \frac{1}{k}\right) = F(iz, k').$$

La fonction F , qui est paire, se développera ainsi :

$$F(z, k) = 1 + f_1 z^2 + f_2 z^4 + \dots + f_n z^{2n} + \dots$$

et les coefficients f , fonctions entières de k^2 , jouiront, en vertu de (2), de la propriété

$$(3) \quad f_n(k^2) = k^{2n} f_n\left(\frac{1}{k^2}\right) = (-1)^n f_n(1 - k^2).$$

Envisageons maintenant les deux polynômes p et q suivants :

$$(4) \quad p(k^2) = k^4 - k^2 + 1, \quad q(k^2) = (k^2 + 1)(k^2 - 2)(2k^2 - 1),$$

qui donnent lieu aux égalités

$$(5) \quad \begin{cases} p(k^2) = k^4 p\left(\frac{1}{k^2}\right) = p(1 - k^2), \\ q(k^2) = k^6 q\left(\frac{1}{k^2}\right) = -q(1 - k^2). \end{cases}$$

De ces deux égalités on tire d'abord aisément cette conclusion connue, que toute fonction rationnelle de k^2 qui reste inaltérée quand on y remplace k^2 par son inverse ou son complément à l'unité est simplement une fonction rationnelle du quotient $p^2 : q^2$. Soient maintenant α, β deux nombres entiers satisfaisant à la condition $2\alpha + 3\beta + n = 0$, et envisageons la quantité $\varphi_n = p^\alpha q^\beta f_n$. Comme β est de même parité que n , il résulte des équations (3) et (5) que φ_n reste inaltérée par les deux substitutions ci-dessus. Donc φ_n est une fonction rationnelle de $p^2 : q^2$. Donc f_n , qui est une fonction entière de k^2 , est une fonction entière des deux quantités p, q ; on peut même ajouter que f_n est un polynôme entier des deux quantités p, q , homogène et du degré n quand on envisage p comme du second degré et q comme du troisième.

Cette conclusion s'applique aux coefficients du développement de la fonction B , qui sont les mêmes, et l'on peut dire que la fonction $B(z, k)$ est homogène et de degré $-\frac{1}{2}$, quand on envi-

sage z comme de degré $-\frac{1}{2}$, p comme du second degré et q comme du troisième.

Je représenterai le développement de B par.

$$(6) \quad B(z, k) = z + b_1 \frac{z^3}{1.2.3.4.5} + \dots + b_n \frac{z^{2n+1}}{1.2 \dots (2n+1)} + \dots$$

D'après ce qui vient d'être dit, b_n contient seulement les termes $p^\alpha q^\beta$ correspondant aux solutions entières et positives de

$$2\alpha + 3\beta = n.$$

En conséquence, b_1 est nul; c'est pourquoi je n'ai pas écrit de terme en z^3 dans (6). Ainsi l'on voit immédiatement que b_2, b_3, b_4, b_5 seront, à des facteurs numériques près, p, q, p^2, pq . D'une manière générale :

Si n n'est pas divisible par 3, b_n contient le facteur p ;

Si n est impair, b_n contient le facteur q .

Par conséquent, dans le cas où le module satisfait à

$$k^4 - k^2 + 1 = 0,$$

on a

$$B(z) = z + az^7 + bz^{13} + \dots + lz^{4n+1} + \dots,$$

dans le cas où le module est $\sqrt{-1}$, on a

$$B(z) = z + a'z^3 + b'z^9 + c'z^{13} + \dots + l'z^{4n+1} + \dots$$

Je vais maintenant établir une formule récurrente pour le calcul des polynômes b_n .

A cet effet, je prends l'équation linéaire aux dérivées partielles et du second ordre à laquelle satisfait la fonction Al_1 , savoir

$$\frac{\partial^2 Al_1}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial Al_1}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial Al_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2 z^2) Al_1 = 0.$$

En y introduisant la fonction B , je la change en l'équation suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{2k^2 - 1}{3} z \frac{\partial B}{\partial z} + 4k^2(1 - k^2) \frac{\partial B}{\partial k^2} \\ & + 2 \left(\frac{1 - 2k^2}{3} + \frac{k^4 - k^2 + 1}{9} z^2 \right) B = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est cette dernière qu'il faut transformer en y remplaçant k^2 par p, q . Tout d'abord les équations (4) donnent

$$(8) \quad 2k^2 - 1 = \frac{q}{p-3},$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial k^2} = \frac{q}{p-3} \frac{\partial}{\partial p} + 3(2p-3) \frac{\partial}{\partial q},$$

$$(10) \quad q^2 = (p-3)^2(4p-3).$$

Dans (7), je remplace $\frac{\partial B}{\partial k^2}$ par l'expression que fournit la formule (9), k^2 par son expression (8), et j'obtiens

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{2}{3} \frac{q}{p-3} \left[z \frac{\partial B}{\partial z} - B - 6(p-1) \frac{\partial B}{\partial p} \right] \\ - 12(p-1)(2p-3) \frac{\partial B}{\partial q} + \frac{pz^2}{9} B = 0. \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'homogénéité de la fonction B, j'ai

$$3q \frac{\partial B}{\partial q} + 2p \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{1}{2} z \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{1}{2} B.$$

Cette relation permet de faire disparaître $\frac{\partial B}{\partial z}$ de (11) et d'écrire, en tenant compte de (10),

$$(12) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - 8p^2 \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{4}{3} q \frac{\partial B}{\partial p} + \frac{pz^2}{9} B = 0.$$

Telle est la transformée cherchée. Elle donne immédiatement une formule récurrente pour les coefficients du développement de B, formule dont les coefficients se simplifient un peu si l'on pose

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} p = \frac{2}{3} (k^4 - k^2 + 1), \\ y &= \frac{2}{9} q = \frac{2}{9} (k^2 + 1)(k^2 - 2)(2k^2 - 1). \end{aligned}$$

La formule définitive est la suivante :

$$(13) \quad b_n = 4 \left(x^2 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial y} + y \frac{\partial b_{n-1}}{\partial x} \right) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3} x b_{n-1}.$$

Au moyen de cette formule, on calcule avec la plus grande faci-

lité les coefficients successifs, dont voici les premiers :

$$b_0=1, \quad b_1=0, \quad b_2=-x, \quad b_3=-4x, \quad b_4=-9x^2, \quad b_5=-24xy, \\ b_6=-3.2^4y^2+3.23x^2, \quad b_7=2^2.3^2.19x^2y, \quad b_8=3x(2^7.23y^2+107x^2).$$

Addition. — J'avais déjà livré à l'impression la Note qu'on vient de lire quand mon attention s'est trouvée attirée sur deux Mémoires qui m'étaient inconnus, bien qu'ils ne soient pas tout récents. Le premier, intitulé *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen*, est dû à M. Kiepert et se trouve au Tome 76 (année 1873) du *Journal de M. Borchardt*; le second, intitulé *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem*, est dû à M. Max Simon et se trouve au Tome 81 (année 1876) du même Recueil. Ces deux savants auteurs donnent pour point de départ à leurs recherches personnelles des résultats dus à M. Weierstrass, communiqués dans ses Cours à ses élèves par cet illustre géomètre, mais connus du public seulement grâce aux deux Mémoires que je viens de citer. Les résultats dont il s'agit se rapportent à une théorie des fonctions elliptiques dans laquelle, au lieu du sinus d'amplitude, on introduit systématiquement la fonction $p(z)$, définie par

$$(14) \quad z = \int_{\infty}^{p(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

Voici quel est le point de départ de cette théorie. Soit

$$\omega = 2m\omega + 2n\omega'$$

une quantité dans laquelle, ω et ω' étant fixes, m et n reçoivent successivement tous les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, sauf le système $m = n = 0$. On considère la fonction

$$(15) \quad \sigma(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}},$$

qui est intermédiaire. Effectivement, si l'on désigne par $\zeta(z)$ la dérivée logarithmique de $\sigma(z)$, la fonction $\zeta'(z)$ admet les périodes ω et ω' . Cela résulte immédiatement de la formule (15).

Par une analyse assez courte, on prouve ensuite que, si l'on pose

$$\begin{aligned} g_2 &= 2[\zeta'^2(\omega) + \zeta'^2(\omega') + \zeta'^2(\omega + \omega')], \\ g_3 &= -4\zeta'(\omega)\zeta'(\omega')\zeta'(\omega + \omega'), \end{aligned}$$

la fonction $p(z)$ définie par (14) coïncide avec celle-ci :

$$(16) \quad p(z) = -\zeta'(z) = -\frac{\partial^2 \log \tau(z)}{\partial z^2}.$$

Ceci posé, M. Max Simon rapporte comme due à M. Weierstrass et démontre, avec le point de départ que je viens d'indiquer, l'équation suivante à laquelle satisfait la fonction $\sigma(z)$:

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 z^2 \sigma = 0,$$

dont la ressemblance avec mon équation (12) est frappante. Ces deux équations coïncident même si l'on fait

$$(18) \quad p = \frac{3}{4} g_2, \quad q = \frac{27}{4} g_3$$

et qu'on remplace B par σ . Les deux fonctions $B(z)$ et $\sigma(z)$, développées suivant les puissances croissantes de z , commencent toutes deux par le même terme z . Donc, eu égard à la formule récurrente (13), sous le bénéfice des équations (18), les fonctions $B(z)$ et $\sigma(z)$ coïncident.

Cette coïncidence peut être démontrée autrement. Posons

$$(19) \quad v = \operatorname{Sn} z = -\left(u + \frac{1+k^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et introduisons la variable u sous le signe d'intégration dans l'égalité

$$z = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}}.$$

Le calcul fait, on retrouve dans le polynôme soumis au radical les quantités p et q définies par les équations (4); voici le résultat :

$$z = \int_x^u \frac{du}{\sqrt{4u^3 - \frac{1}{2}pu^2 - \frac{1}{27}q}}.$$

C'est précisément l'équation (14) si l'on remplace p et q par expressions (18). J'ai donc ainsi prouvé l'égalité suivante, transformée de (19):

$$p(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1 + k^2}{3},$$

qui, suivant la définition de la fonction A_1 , de la fonction B et la définition de σ fournie par (16), devient

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log B(z)}{\partial z^2}.$$

Cette dernière prouve maintenant l'identité des deux fonctions A_1 et B , sans l'intervention de l'équation (17). En conséquence, l'analyse fournit une démonstration de cette équation (17), différente de celle qu'a rapportée M. Max Simon.

Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre;
M. L. RODET.

(Séance du 28 mars 1879.)

L'auteur persan Hassan ben al-Hosseïn al-Hakâk al-Mor (c'est-à-dire natif de Merv en Khorassan), dans un *Traité d'Arithmétique* qu'il a composé en l'an 613 de l'hégire ou 1216 de notre ère « pour répondre aux demandes de ses amis », donne le procédé suivant pour obtenir une approximation d'une *racine carrée*. Lorsqu'on a, par le moyen connu, obtenu la racine carrée chée à une unité près *par défaut*, « on divise le reste de la division par le double de la racine trouvée *plus un*, et la racine composée de la partie entière et de cette fraction ». Ainsi

$$\sqrt{12} = 3 \frac{3}{7}, \quad \sqrt{145} = 12 \frac{1}{25}.$$

Ce procédé n'est pas difficile à justifier; en effet, si nous désignons par N le nombre proposé, par a sa racine à une unité près

et par r le reste de l'opération, de telle sorte que $N = a^2 + r$; si, de plus, nous appelons ϵ le complément de la racine, on a

$$r = (2a + \epsilon)\epsilon \quad \text{ou} \quad \epsilon = \frac{r}{2a + \epsilon};$$

comme toujours $\epsilon < 1$, on aura une approximation par défaut de sa valeur en le remplaçant par 1 au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire en posant

$$\epsilon_1 = \frac{r}{2a + 1}.$$

C'est la première fois que j'ai rencontré cette méthode d'approximation chez un auteur oriental, et, bien que je l'eusse trouvée assez remarquable pour l'époque où il vivait, je n'y aurais probablement prêté qu'une médiocre attention si je n'avais été amené à penser que ce procédé devait avoir été pratiqué couramment dans l'Inde, et même dès une époque très-reculée.

Al-Morouzi ayant donné $\sqrt{12} = 3\frac{3}{7}$, je fus naturellement amené à voir que, dans ce système, $\sqrt{10} = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, c'est-à-dire la valeur donnée par Archimède pour le nombre π , seule valeur en usage pendant longtemps chez les Grecs : c'est en effet la seule dont se sert Héron le Jeune dans son Traité des surfaces et des volumes.

Mais, puisque $\frac{22}{7} = \sqrt{10}$, nous comprenons maintenant pourquoi l'astronome indien Brahmagupta enseignait à ses disciples (voir traduction de Colebrooke, n° 40, deuxième partie de la règle) que « la racine de 10 fois le carré du diamètre est la longueur de la circonférence; la racine de 10 fois le demi-diamètre (rayon), multipliée par ce demi-diamètre lui-même, est l'aire du cercle ». Dans la première partie de cette règle, il faisait multiplier le diamètre dans le premier cas, le carré du rayon dans le second cas, par 3, et donnait cette évaluation comme « usuelle » ou « vulgaire » (*vyāvahārika*); la seconde, qui fait $\pi = \sqrt{10}$, est, par opposition, appelée *sūxma*, « fine, subtile », et peut-être « raffinée ». On s'était demandé, et moi-même après bien d'autres, où Brahmagupta avait été chercher cette valeur de π , qu'il regardait

comme pour ainsi dire exacte. L'écrivain persan que j'ai cité nous en a donné l'explication. Seulement $\pi = \frac{22}{7}$ est une approximation *par excès*; $\sqrt{10} = \frac{22}{7}$ est une approximation *par défaut*. Peut-être Brahmagupta, dans son enseignement oral, savait-il faire faire cette distinction à ses élèves.

Puisque l'exemple emprunté à Brahmagupta me donnait lieu de penser que les Indiens avaient connu et pratiqué le mode d'approximation des racines carrées dont je parle, il m'est venu à l'idée d'étudier à ce point de vue une valeur de $\sqrt{2}$ donnée dans *les Préceptes du cordeau* de Baudhâyana, ouvrage curieux, composé probablement au IV^e siècle avant notre ère, et qui contient les règles que doivent observer les brahmanes pour construire leurs autels. Cette valeur de $\sqrt{2}$, dont l'interprétation m'avait également beaucoup préoccupé, est

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Cette forme de *série* m'avait surtout paru originale.

Or, si nous appliquons à $\sqrt{2}$ la méthode en question, nous aurons à faire

$$N = 2, \quad a = 1, \quad r = 1, \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Le premier terme fractionnaire de la série de notre brahmane est donc bien obtenu par la méthode du Persan; $1 + \frac{1}{3}$ est une valeur approchée *par défaut* de la racine cherchée.

Continuons l'opération : il nous faut calculer

$$r' = r - (2a + \epsilon_1)\epsilon_1, \quad \epsilon_2 = \frac{r'}{2(a + \epsilon_1) + \epsilon_2},$$

ce qui nous donne

$$r' = 1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\epsilon_2 = \frac{2}{9} : \left[2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \epsilon_2\right] = \frac{2}{9} : \left(\frac{8}{3} + \epsilon_2\right).$$

Or notre deuxième terme est

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8},$$

et l'auteur a, cette fois, négligé ϵ_2 au dénominateur de sa fraction diviseur et obtenu une approximation *par excès* de $\sqrt{2}$ dans la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

Si nous poursuivons encore l'opération, nous verrons que la quantité à retrancher de $r' = \frac{2}{9}$ pour avoir r'' est $\frac{33}{144}$. Or $\frac{2}{9} = \frac{32}{144}$; par suite, $r'' = -\frac{1}{144}$.

Je donne ce résultat sous cette forme négative, parce que j'ai fait voir autre part que les Indiens ont eu de très-bonne heure la notion des *nombre négatifs* et qu'ils ne se préoccupaient pas, dans leurs calculs, du signe du résultat.

D'autre part, le double de la nouvelle racine étant $\frac{34}{12}$, nous aurons

$$\epsilon_3 = \left(-\frac{1}{144}\right) : \frac{34}{12} = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Et remarquons que, ce terme correctif étant trop grand en valeur absolue, l'expression

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

est de nouveau approchée *par défaut*.

Rien n'empêcherait de continuer le calcul, et rien ne dit que, lorsqu'ils en ont eu besoin, les auteurs de cette série de quatre termes n'aient su poursuivre l'opération.

Nous pouvons donc conclure de là qu'à l'époque où vivait Baudhâyana, c'est-à-dire à peu près au iv^e siècle avant notre ère, on savait exprimer la valeur d'une racine carrée sourde (ou irrationnelle, comme nous persistons à vouloir dire) au moyen d'une série approchée alternativement par excès et par défaut; que le moyen d'obtenir le premier terme de cette série était de diviser le

reste de l'opération qui avait fourni la racine à une unité près par le double de cette racine augmenté d'un. Les termes suivants, alternativement positifs et négatifs, s'obtenaient par un procédé qui n'est autre que celui que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *méthode d'approximation de Newton*.

J'ajouterai, pour terminer, qu'Al-Mourouzi applique son même procédé (borné au premier terme de la série) aux racines cubiques.

Ici $\varepsilon = \frac{r}{3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2}$; il y fait encore $\varepsilon = 1$ et a $\varepsilon_1 = \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$.

Comme exemple numérique, il donne

$$\sqrt[3]{1748} = 12 \frac{20}{469}.$$

J'ignore, du reste, si l'on rencontrerait chez les auteurs indiens des exemples d'application de ce procédé, si, comme pour la racine carrée, ils continuaient à développer une série, et si, comme dans la méthode de Newton, les termes suivants de la série seraient de la forme

$$\varepsilon_n = \frac{r_n}{3a_{n-1}^2}.$$

Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. E. PICARD.

(Séance du 28 mars 1879.)

Considérons une fonction multiforme $f(z)$ d'une variable complexe z , n'admettant dans tout le plan que des points critiques déterminés. Dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces points, la fonction est uniforme et continue. Soit A l'un de ces points critiques. Je me propose de montrer que l'on peut trouver un développement en série de la fonction, valable pour tous les points du cercle ayant A pour centre et passant par le point critique le plus rapproché, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi par la variable à l'intérieur de ce cercle. Nous supposons que A est l'origine des coordonnées et que de plus le rayon du cercle précédent est plus petit que l'unité, cette dernière circonstance pouvant toujours se réaliser par un

changement de variable $z' = kz$, où k est un nombre positif suffisamment petit.

Ceci posé, je fais la transformation

$$z' = \frac{1}{\log z}.$$

Cherchons quelle est la portion du plan des z' correspondant au cercle C décrit, dans le plan des z , de l'origine comme centre avec un rayon égal à r . En désignant par θ l'argument d'un point de ce cercle, et par lr le logarithme arithmétique de r , nous avons

$$x' + iy' = \frac{1}{lr + \theta i};$$

donc

$$x' = \frac{lr}{(lr)^2 + \theta^2}, \quad y' = \frac{-\theta}{(lr)^2 + \theta^2},$$

et l'on a par suite, en éliminant θ ,

$$(C') \quad (x'^2 + y'^2)lr - x' = 0,$$

équation d'un cercle passant à l'origine et dont le centre est le point $x' = + \frac{1}{2lr}$. De plus, si r est, comme nous le supposons, moindre que l'unité, aux points à l'intérieur du cercle C correspondront les points à l'intérieur du cercle C'. La fonction $f(z)$ deviendra une fonction $F(z')$. A toute courbe fermée située à l'intérieur du cercle C' correspondra une courbe fermée située dans C, qui ne comprendra pas l'origine dans son intérieur. Par suite, la fonction $F(z')$ sera uniforme et continue à l'intérieur de C', et l'on pourra la développer en une série procédant suivant les puissances croissantes de $\left(z' - \frac{1}{2lr}\right)$.

Nous aurons par suite, pour $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n,$$

où les A_n sont des constantes.

Ce développement est valable pour tous les points du cercle C.

Aux déterminations multiples de $\log z$ correspondront les déterminations multiples de la fonction quand la variable z , partant d'un point, décrit à l'intérieur de C un chemin embrassant une ou plusieurs fois l'origine.

Les intégrales des équations linéaires à coefficients uniformes nous présentent un exemple bien connu de fonctions rentrant dans la classe de celles que nous venons de considérer. On sait, en effet, que ces intégrales n'ont d'autres points singuliers que les points singuliers des coefficients de l'équation.

Une classe de fonctions se rattachant de très-près à celle que nous venons de considérer est celle des fonctions multiformes ayant des points critiques déterminés, mais pouvant avoir en outre un nombre quelconque de pôles situés d'une manière quelconque. On voit alors facilement qu'à l'intérieur du cercle de rayon r la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n},$$

où les A_n et les B_n sont des constantes.

Il est aisé d'indiquer des équations différentielles dont les intégrales jouissent des propriétés précédentes. L'exemple le plus simple que l'on puisse citer est l'équation de Bernoulli :

$$\frac{du}{dz} = Xu^2 + X_1u + X_2,$$

où nous supposons que les X soient des fonctions uniformes de z . Les intégrales de cette équation n'auront d'autres points critiques que les points singuliers des fonctions uniformes X , X_1 , X_2 , mais elles peuvent avoir des pôles situés d'une manière quelconque.

Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. BRIOSCHI à M. LAGUERRE.)

(Séance du 11 avril 1879.)

.... Les Communications que vous avez faites récemment à l'Académie des Sciences, *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires*, ont eu pour moi un grand intérêt, ayant dû autrefois m'occuper de questions analogues. Malheureusement je ne peux pas en ce moment revenir sur ce sujet; mais je désire vous faire connaître la méthode que j'avais suivie, laquelle me paraît conduire facilement à vos résultats et peut-être les compléter.

Soient les deux équations différentielles linéaires du troisième ordre

$$y''' + 3ly' + my = 0, \quad \frac{d^3u}{dz^3} + 3\lambda \frac{du}{dz} + \mu u = 0,$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots$$

Je pose

$$y = v u,$$

v étant fonction de x .

On a

$$y' = v \frac{du}{dz} z' + v' u,$$

$$y'' = v \left(\frac{d^2u}{dz^2} z'^2 + \frac{du}{dz} z'' \right) + 2v' \frac{du}{dz} z' + v'' u, \quad \dots$$

En substituant les y' , y'' , y''' dans la première équation différentielle, on doit obtenir la seconde, et, par conséquent, on arrive aux trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} v z'' + v' z' = 0, \\ v z''' + 3v' z'' + 3v'' z' + 3lv z' = 3\lambda v z', \\ v''' + 3lv' + mv = \mu v z'^2. \end{cases}$$

Or, en posant $\frac{z''}{z'} = Z$, la première donne

$$v' = -Zv,$$

et, par suite,

$$v'' = -(Z' - Z^2)v, \quad v''' = -(Z'' - 3ZZ' + Z^3)v.$$

D'autre part,

$$\frac{z'''}{z'} = Z' + Z^3;$$

la seconde des équations (1) se transforme donc ainsi qu'il suit :

$$(2) \quad 2Z' = Z^3 + 3(l - \lambda z'^2),$$

et la troisième devient

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + 3lZ - (m - \mu z'^3) = 0.$$

Enfin, en remplaçant dans celles-ci Z' et Z'' par leurs valeurs déduites de l'équation (2), on trouve votre relation

$$\left(3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu\right) z'^3 = 3l' - 2m.$$

Je pose

$$(3) \quad 3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu = \alpha \quad \text{et} \quad 3l' - 2m = a,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha z'^3 = a.$$

On a

$$3Z = \frac{d \log a}{dx} - \frac{d \log \alpha}{dz} z'.$$

Cette valeur de Z , substituée dans l'équation (2), conduit très facilement à la relation suivante :

$$\beta z'^2 = b,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - 27\lambda = \beta$$

et

$$6 \frac{d^2 \log a}{dx^2} - \left(\frac{d \log a}{dx} \right)^2 - 27l = b.$$

On aura enfin, par conséquent,

$$\frac{\beta^3}{\alpha^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

relation *invariantive* entre les seuls coefficients des deux équations différentielles et leurs dérivées.

Il est très-important de noter que ces formes invariantives restent les mêmes pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

Par exemple, pour les équations différentielles du quatrième ordre

$$y^{(4)} + 6ly'' + 4my' + ny = 0$$

et

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 6\lambda \frac{d^2 u}{dz^2} + 4\mu \frac{du}{dz} + \nu u = 0,$$

on trouve

$$y' = -\frac{3}{2}Zy, \quad 2Z' = Z^2 + \frac{12}{5}(l - \lambda z'^2),$$

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + \frac{12}{5}lZ - \frac{4}{5}(m - \mu z'^2) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha z'^2 = a,$$

α et a étant définis par les équations (3).

En posant

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} \lambda = \beta,$$

$$6 \frac{d^2 \log a}{dz^2} - \left(\frac{d \log a}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} l = b,$$

on en déduit

$$\beta z'^2 = b \quad \text{et} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Enfin la dernière équation donne

$$\gamma z'^4 = c,$$

où

$$\gamma = 30 \frac{d^2 \lambda}{dz^2} - 50 \frac{d\mu}{dz} - 81 \lambda^2 + 25 \nu$$

et

$$c = 30 l'' - 50 \mu' - 81 l^2 + 25 n.$$

J'ajoute une dernière remarque. Si, pour les équations différentielles du troisième ordre, l'invariant a est nul, l'équation se réduit à la suivante, du second ordre,

$$\xi'' + \frac{3}{4} l \xi = 0,$$

où

$$y = \xi^2.$$

Si, pour l'équation du quatrième ordre, les invariants a et c sont nuls, on a

$$\xi'' + \frac{3}{5} \xi' = 0,$$

équation où j'ai posé

$$y = \xi^3.$$

Si vous croyez que ces résultats peuvent avoir quelque intérêt pour nos collègues de la Société mathématique, vous pouvez leur communiquer....

Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. LAGUERRE.

(Séance du 11 avril 1879.)

I.

1. Soient OX et OY deux axes rectangulaires, et X, Y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement à ce système d'axes; posons

$$X + Yi = x \quad \text{et} \quad X - Yi = y;$$

nous pouvons considérer x et y comme de nouvelles coordonnées du point M. On voit que les équations $x = \alpha$ et $y = \beta$, où α et β désignent des quantités constantes arbitraires, représentent les diverses droites isotropes du plan; je désignerai donc, pour abrégé, le système de coordonnées que je viens de définir sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Dans un pareil système, le coefficient angulaire d'une droite faisant avec l'axe OX un angle donné V est égal à e^{-2Vi} ; l'équation de l'axe OX est

$$x = y,$$

et l'équation d'un cercle de rayon R et ayant pour centre le po

(α, β) est

$$(x - \alpha)(y - \beta) = R^2.$$

2. Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, les coefficients angulaires des tangentes que d'un point (x, y) on peut mener à cette courbe sont donnés par une équation homogène du degré n ,

$$U(\lambda, \mu) = 0;$$

dans cette équation, $\frac{\mu}{\lambda}$ désigne le coefficient angulaire de la tangente issue du point (x, y) , et les coefficients du polynôme U sont des fonctions entières de x et de y .

L'équation précédente est, en me servant d'une dénomination que j'ai déjà employée dans plusieurs travaux antérieurs ⁽¹⁾, l'équation mixte de la courbe.

3. L'hypocycloïde à trois points de rebroussement étant définie comme une courbe de troisième classe qui touche aux deux ombilics la droite de l'infini, on voit immédiatement que son équation mixte est de la forme

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Cherchons le lieu des points du plan d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit; il faut, pour cela, exprimer que l'équation précédente a deux racines égales et de signes contraires.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(c - x)(b + y) = ad;$$

elle représente, comme on le sait, un cercle. En mettant en évidence le rayon R de ce cercle et les coordonnées α et β de son centre, je poserai

$$c = \alpha, \quad b = -\beta, \quad a = R e^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad d = -R e^{\varphi i}.$$

L'équation mixte de la courbe deviendra donc

$$(1) \quad R e^{-\varphi i} \lambda^3 - \beta \lambda^2 \mu + \alpha \lambda \mu^2 - R e^{\varphi i} \mu^3 + \lambda \mu (\lambda y - \mu x) = 0.$$

4. Je vais chercher maintenant l'équation mixte des diverses

(1) *Mémoire de Géométrie analytique*, 2^e série, t. XVII.

hypocycloïdes qui touchent l'axe OX et rencontrent cet axe en deux autres points équidistants de l'origine O.

L'axe OX étant tangent à la courbe, une des tangentes issues de l'origine a pour coefficient angulaire l'unité; l'équation (1) est donc satisfaite quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = x,$$

d'où l'équation de condition

$$x - \beta = R e^{i\alpha} - R e^{-i\alpha}.$$

Considérons un point de l'axe OX situé à une distance de l'origine égale à z , en sorte que les coordonnées de ce point soient

$$x = y = z;$$

les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point sont donnés par l'équation (1), dans laquelle on a remplacé x et y par z . Si l'on divise cette équation par $\lambda - \mu$ (ce qui revient à faire abstraction de la tangente OX), on trouve aisément que, en posant

$$u = R e^{-i\alpha} - \beta = R e^{i\alpha} - z,$$

les coefficients angulaires des deux autres tangentes sont déterminés par l'équation

$$R e^{-i\alpha} \lambda^2 + u - z = \lambda z + R e^{i\alpha} \mu^2 = 0.$$

En laissant de côté le point où la courbe est tangente à OX, on obtiendra les deux autres points où elle rencontre cette droite en exprimant que l'équation précédente a deux racines égales, ce qui donne la relation

$$u + z^2 = \frac{1}{4} R^2.$$

Si maintenant on remarque que, les deux points d'intersection dont je viens de parler étant à égale distance de l'origine O, les deux valeurs obtenues pour z doivent être égales et de signes contraires. on en conclut

$$u = R e^{-i\alpha} - \beta = R e^{i\alpha} - \alpha = 0,$$

d'où

$$\alpha = R e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad \beta = R e^{-i\alpha}.$$

Ainsi le centre ω du cercle K, lieu des sommets des angles droits

circonsrits à l'hypocycloïde, est situé sur la droite qui fait avec l'axe OX un angle égal à φ et à une distance égale à R, c'est-à-dire au rayon de ce cercle. En désignant par A et A' les deux points de rencontre de OX avec la courbe, on voit ainsi que ce cercle passe par le milieu O du segment AA' et que ce segment a une longueur constante égale à 4R, propositions bien connues.

5. En remplaçant dans l'équation (1) α et β par leurs valeurs, l'équation mixte de l'hypocycloïde prend la forme suivante :

$$(2) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda\gamma - \mu x) = 0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues d'un point de l'axe OX ($x = y = z$) devient

$$(3) \quad R e^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + R e^{i\varphi}\mu^2 = 0.$$

En particulier, les tangentes issues du point A', pour lequel on a $z = -2R$, sont déterminées par l'équation

$$\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\lambda - e^{\frac{i\varphi}{2}}\mu\right)^2 = 0,$$

d'où l'on voit que la tangente menée au point A' fait avec l'axe OX un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Si donc on prend sur le cercle K le point O' diamétralement opposé au point O, cette tangente est précisément la droite A'O'; la droite O'A est également tangente à l'hypocycloïde au point A, et ces deux droites, conformément à une proposition bien connue, sont rectangulaires entre elles.

6. On voit que l'on peut, par les points A et A', mener une infinité d'hypocycloïdes tangentes à l'axe OX; toutes ces courbes sont d'ailleurs égales entre elles, puisque la longueur du segment AA' détermine le rayon du cercle K et par suite la grandeur de la courbe elle-même. On les obtiendra toutes en donnant à φ toutes les valeurs possibles dans l'équation (2).

Soient deux de ces courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ caractérisées par deux valeurs de l'angle φ différant entre elles de l'angle θ ; si l'on désigne par ω et ω_1 les centres des cercles des points desquels on voit res-

pectivement ces courbes sous un angle droit, on voit que l'angle $\omega O \omega_1$ est précisément égal à θ .

D'un point M situé sur l'axe OX et à une distance du point O égale à z , menons aux deux courbes K_r et K_{r+1} les tangentes distinctes de l'axe.

Les coefficients angulaires de ces tangentes sont respectivement déterminés par les deux équations

$$R e^{-i\varphi} \lambda^2 + z \lambda \mu + R e^{i\varphi} \mu^2 = 0$$

et

$$R e^{-i(\varphi+\theta)} \lambda^2 + z \lambda \mu + R e^{i(\varphi+\theta)} \mu^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées à H_{r+1} se déduisent évidemment de ceux des tangentes menées à H_r , en les multipliant par le facteur constant $e^{-i\theta}$; en d'autres termes, les tangentes à H_{r+1} s'obtiennent en faisant tourner de l'angle $\frac{\theta}{2}$ les tangentes à H_r .

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite D et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui se déplace sans changer de forme, en restant tangente à une droite fixe D et en passant par un point fixe de cette droite (auquel cas elle passe nécessairement par un autre point fixe situé sur la même droite); par différents points de D menons des tangentes à la courbe, et imaginons que, pendant le déplacement de cette courbe, ces droites lui demeurent tangentes; pour deux positions quelconques de l'hypocycloïde mobile, les angles décrits par les tangentes autour des points fixes de D sont tous égaux entre eux.

7. J'ajouterai que dans le mouvement les points de contact décrivent des cercles, ce que, du reste, des considérations géomé-

triques très-simples rendent évident. Considérons, en effet, un point M situé sur l'axe OX, à une distance de l'origine égale à z . En désignant simplement par μ le coefficient angulaire d'une des tangentes menées de ce point à la courbe (ce qui revient à faire $\lambda = 1$), l'équation de cette tangente est

$$(4) \quad \frac{y - z}{x - z} = \mu,$$

et l'on a la relation

$$(5) \quad R e^{\gamma} \mu^2 + z \mu + R e^{-\gamma} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiendront en résolvant par rapport à x et y l'équation (4) et l'équation suivante, que l'on en déduit en la dérivant par rapport à z :

$$\frac{y - x}{(x - z)^2} = \frac{d\mu}{dz}.$$

De l'équation (5) on déduit d'ailleurs

$$(2 R e^{\gamma} \mu + z) \frac{d\mu}{dz} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dz} = - \frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4 R^2}}$$

et

$$(6) \quad \frac{y - x}{(x - z)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4 R^2}} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des points de contact, il faut éliminer φ et μ entre les équations (4), (5) et (6), ou simplement μ entre les équations (4) et (6), qui ne renferment pas φ .

On obtient ainsi l'équation

$$(x - z)(y - z) + (y - x)\sqrt{z^2 - 4 R^2} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(x - z - \sqrt{z^2 - 4 R^2})(x - z + \sqrt{z^2 - 4 R^2}) = 4 R^2 - z^2.$$

On voit que cette équation représente deux tangentes au point M à l'axe OX ; leurs

centres sont situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée à l'axe en ce point avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

8. Si l'on considère, comme précédemment, les deux hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$, on voit que le sommet d'un angle circonscrit à ces deux courbes et ayant pour valeur $\frac{\theta}{2}$ décrit un lieu dont fait partie la tangente commune OX ; on peut rechercher si cette droite constitue à elle seule le lieu complet.

Je remarque, à cet effet, que les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à la courbe H_φ sont déterminés par l'équation

$$(2) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0,$$

et ceux des tangentes menées du même point à la courbe $H_{\varphi+\theta}$ par l'équation

$$R(\lambda' - \mu')(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda'^2 + e^{i(\varphi+\theta)}\mu'^2) + \lambda'\mu'(\lambda' y - \mu' x) = 0.$$

Si les deux tangentes font l'angle donné $\frac{\theta}{2}$, on a

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda e^{\frac{\theta i}{2}}}{\mu e^{-\frac{\theta i}{2}}},$$

et l'équation précédente devient

$$(7) \quad R\left(e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu\right)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu\left(e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu\right) = 0.$$

Reste à éliminer λ et μ entre les relations (2) et (7); en éliminant entre elles l'expression $e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2$, il vient

$$\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu}{\lambda - \mu} = \frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda y - e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu x}{\lambda y - \mu x},$$

et, en effectuant les calculs,

$$(y - x)\left(e^{\frac{\theta i}{2}} - e^{-\frac{\theta i}{2}}\right) = 0.$$

La tangente OX constitue donc bien à elle seule le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit aux deux courbes.

9. Les hypocycloïdes H_r et H_{r+t} , qui touchent toutes les deux l'axe OX, ont, en outre, deux autres tangentes communes; pour avoir leur équation, il suffit d'éliminer λ et μ entre l'équation (2) et l'équation

$$(8) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i(r+t)}\lambda^2 + e^{i(r+t)}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda\gamma - \mu x) = 0.$$

Éliminant d'abord $\lambda\gamma - \mu x$ entre ces égalités, il vient

$$\lambda^2 e^{-i\varphi}(1 - e^{-i\theta}) + \mu^2 e^{i\varphi}(1 - e^{i\theta}) = 0,$$

d'où, par une transformation facile,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm e^{\varphi + \frac{\theta}{2}}.$$

Les angles que font ces deux tangentes avec l'axe OX sont donc égaux à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4}$ et à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}$; ces deux droites sont à angle droit. De là une construction qui permet de les obtenir aisément. Soient, en effet, K et K₁ les cercles des points desquels on voit respectivement sous un angle droit les courbes H_r et H_{r+t} ; ces cercles, indépendamment du point O, se coupent encore en un second point M. Ce point est nécessairement le point de rencontre des tangentes cherchées, puisqu'elles sont rectangulaires entre elles. Si maintenant nous prolongeons le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre, il résulte des considérations précédentes que les deux tangentes communes qui se croisent au point M sont parallèles aux droites NA et NA'.

D'où encore la proposition suivante :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui passe par deux points donnés A et A' et est tangente à la corde AA'; sur cette corde comme diamètre décrivons un cercle B et considérons le cercle K, lieu des points d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit. Ce cercle passe, comme on le sait, par le point O, milieu de la corde AA', et, en outre, est tangent au cercle C.

Étant pris un point quelconque M sur le cercle K, si l'on prolonge le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le

cercle C, les droites menées par le point M parallèlement aux droites NA et NA' sont les deux tangentes rectangulaires entre elles que de ce point on peut mener à la courbe.

10. Les diverses hypocycloïdes qui, passant par les deux points A et A', sont tangentes à la corde AA', étant identiques entre elles, on peut les obtenir toutes par le déplacement d'une de ces courbes dans le plan.

Pour avoir une idée nette de ce déplacement, il faut chercher le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan et le lieu décrit par ces centres relativement à la courbe mobile.

La courbe roulant sur les deux points A et A', les normales menées en ces points sont respectivement perpendiculaires aux droites AO' et A'O', et par conséquent se coupent sur le cercle C décrit sur AA' comme diamètre au point diamétralement opposé à O'; le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan est donc le cercle C, dont le rayon est égal à $2R$. On sait d'ailleurs que les normales aux extrémités de la corde AA' se coupent sur le cercle passant par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde, cercle dont le rayon est égal à $3R$.

D'où la conclusion qui suit :

Étant pris sur un cercle C de rayon égal à $2R$ deux points diamétralement opposés A et A', si l'on fait rouler ce cercle dans l'intérieur d'un cercle C' de rayon égal à $3R$, on sait que les deux points A et A' décrivent une même hypocycloïde à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle C'. A un instant quelconque du mouvement, les points A et A' sont situés sur l'hypocycloïde, tandis que la droite AA' lui est tangente; si à cet instant on fixe le cercle C, et si l'on fait rouler sur ce cercle le cercle C' en entraînant avec lui la courbe, cette courbe, dans son déplacement, passe constamment par les points fixes A et A' et demeure tangente à la droite AA'.

II.

11. Les résultats qui précèdent peuvent se déduire aisément de quelques propositions très-simples et purement géométriques.

Considérons, à cet effet, une ellipse E située dans l'espace et dont la projection orthogonale sur un plan donné P soit un cercle C ; prenons arbitrairement sur cette courbe un point fixe A et un point mobile M . Si par le milieu I de la corde AM nous menons un plan perpendiculaire à cette corde, il coupe le plan P suivant une droite dont l'enveloppe est une courbe H que l'on peut aussi évidemment définir comme le lieu des centres des sphères symétriques par rapport au plan P et tangentes à l'ellipse E .

Je dis d'abord que la courbe H est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Soit D une droite située dans le plan P ; si d'un point quelconque N de cette droite comme centre on décrit une sphère passant par le point A , cette sphère coupe le plan Q de l'ellipse suivant un cercle passant par le point A et par le point A' qui lui est symétrique par rapport à la projection orthogonale de D sur le plan Q .

Il est clair que le point N est sur la courbe H si ce cercle est tangent à l'ellipse, et, comme par les points A et A' on peut mener quatre cercles tangents à E , il en résulte que la courbe K est du quatrième ordre.

Soit N un point quelconque du plan P ; de ce point comme centre décrivons une sphère passant par le point A ; cette sphère coupe le plan Q suivant un cercle rencontrant l'ellipse au point A et en trois autres points B , C et D . Les plans menés respectivement par les milieux des cordes AB , AC et AD coupent le plan P suivant des droites tangentes à H et se croisant au point donné N .

La courbe H est donc de la troisième classe.

Si le point N est rejeté à l'infini dans une direction quelconque, la sphère dont je viens de parler se réduit au plan mené par A perpendiculairement à cette direction, et, comme ce plan ne coupe E qu'en un point, il est clair qu'on ne peut mener à la courbe H qu'une tangente parallèle à une direction donnée. Cette courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini, et les points de contact sont situés sur les perpendiculaires menées aux asymptotes de la projection de l'ellipse sur le plan P . Cette projection étant un cercle, ces asymptotes, ainsi que leurs perpendiculaires, sont des droites isotropes. La courbe H est donc de troisième classe et doublement tangente, aux ombilics, à la droite de l'in-

fini; par suite, c'est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

12. Cette hypocycloïde a, comme on le sait, trois points de rebroussement α, β, γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le point de concours des tangentes de rebroussement.

Considérons l'un quelconque α de ces points de rebroussement; les tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe étant toutes les trois confondues en une seule droite, la sphère passant par A et décrite du point α comme centre coupe le plan Q suivant un cercle passant par A et osculateur de l'ellipse E en un point α' ; la projection sur le plan Q de la tangente de rebroussement au point α est d'ailleurs la droite menée par le milieu de la corde A α et perpendiculairement à cette corde.

Si maintenant on remarque que les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, on obtiendra la proposition suivante, due à Steiner :

Étant donné sur une ellipse un point quelconque A, on peut déterminer trois cercles osculateurs de cette courbe qui passent par le point A; les trois points de contact et le point A sont sur un même cercle.

D'après ce que je viens d'exposer, on peut ajouter que :

Si l'ellipse se projette orthogonalement sur un plan donné P suivant une circonférence de cercle, les droites menées perpendiculairement au plan de l'ellipse par les trois points de contact rencontrent le plan P en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et la droite menée par le centre du cercle circonscrit aux trois points de contact et perpendiculairement à son plan rencontre le plan P au centre du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral.

13. Prenons sur l'ellipse E un autre point fixe B; à ce point correspond une seconde hypocycloïde H'. Cherchons les tangentes communes aux courbes H et H'.

Je désigne par F et G les deux axes de l'ellipse, par f et g les

droites suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans menés respectivement par F et G et normalement au plan Q. Les droites f et g sont évidemment perpendiculaires entre elles, puisque F est parallèle au plan P.

Cela posé, si des points A et B on mène dans le plan Q des perpendiculaires à F, cet axe les divise en deux parties égales; il en résulte que f est une tangente commune à H et H', et les mêmes considérations s'appliquent à la droite g . Les deux courbes ont donc déjà en commun deux tangentes rectangulaires entre elles.

Considérons maintenant la corde AB et le plan mené par son point milieu perpendiculairement à sa direction; il coupe le plan P suivant une droite D qui est aussi tangente aux deux hypocycloïdes.

14. Les points de contact de cette droite s'obtiendront évidemment en prenant son intersection avec les plans menés en A et en B normalement à l'ellipse.

Pour obtenir les autres points où elle rencontre les deux courbes, je mène par les points A et B un cercle tangent à l'ellipse; on peut mener deux de ces cercles, et leurs points de contact m et m' sont diamétralement opposés. Si l'on construit les axes ⁽¹⁾ de ces deux cercles, il est clair qu'ils rencontrent D en deux points appartenant à la fois à H et H'. Soient n et n' ces deux points; on voit que les hypocycloïdes ont une corde commune à laquelle elles sont toutes les deux tangentes : *elles sont donc égales entre elles.*

On peut remarquer que les droites menées aux points n et n' tangentielllement à la courbe H sont les traces de deux plans perpendiculaires aux cordes Am et Am'; elles sont donc perpendiculaires à leurs projections sur le plan P, et, comme la projection du diamètre mm' passe par le centre du cercle C, on voit que ces projections sont rectangulaires; il en est donc de même des deux tangentes aux points n et n' , proposition bien connue.

15. Lorsque le point A se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde qui lui correspond demeure, comme je viens de le montrer, inva-

(1) J'appelle, pour abrégé, *axe d'un cercle* la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

riable de forme en restant tangente aux deux droites fixes f et g . Je dis que la droite qui joint les deux points de contact est la trace sur le plan P du plan normal à l'ellipse au point A .

Menons, en effet, par le point A les cordes Aa et Ab , respectivement perpendiculaires aux axes F et G . Le point où la droite f touche l'hypocycloïde H est le point de rencontre du plan P avec l'axe du cercle bitangent à l'ellipse aux points A et a . Si donc au point A on mène le plan normal à cette courbe, il contient ce point de contact; par une raison semblable, il contient l'autre point de contact. La proposition que je voulais démontrer est donc établie.

16. Si le point A se déplace infiniment peu sur l'ellipse, l'hypocycloïde H roule sur les deux droites f et g ; la droite qui joint les deux points de contact est une corde commune aux deux courbes et, de plus, leur est tangente; par suite, elle a une longueur constante.

Donc :

Les traces, sur le plan P , des plans normaux à l'ellipse E enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse se compose des deux tangentes doubles de rebroussement de cette hypocycloïde.

17. Au lieu de considérer une ellipse, j'aurais pu considérer une biquadratique quelconque, ayant pour plan de symétrie le plan P et située sur un cylindre dont la base est un cercle situé dans ce plan.

Sans rien changer aux démonstrations qui précèdent, on obtiendrait facilement les propositions qui suivent :

Étant donnée une biquadratique résultant de l'intersection d'un cylindre droit, ayant pour base un cercle situé dans un plan P , avec une surface quelconque du second ordre ayant ce plan pour plan de symétrie, le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde de la courbe perpendiculaire au plan P , sont doublement tangentes à cette courbe, est une hypocycloïde H à trois points de rebroussement située dans le plan de symétrie.

Si l'on considère les diverses cordes de la courbe perpendiculaires au plan P, les diverses hypocycloïdes qui leur correspondent sont identiques et ne diffèrent que par leur position dans le plan.

Les traces sur le plan de symétrie des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

Les centres des sphères quadruplement tangentes à la biquadratique décrivent les deux droites rectangulaires qui constituent les tangentes doubles de rebroussement de cette dernière hypocycloïde.

18. La considération des trois points de rebroussement de l'hypocycloïde H conduit, relativement aux biquadratiques douées d'un plan de symétrie, à un théorème analogue à celui qui a été donné par Steiner relativement aux coniques, et que j'ai rappelé plus haut.

Comme il est facile de le voir, il n'est pas besoin de supposer que la projection de la biquadratique sur le plan de symétrie soit un cercle, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une biquadratique quelconque ayant pour plan de symétrie un plan donné P, par les extrémités d'une corde quelconque de cette courbe perpendiculaire au plan P, on peut mener trois sphères qui ont avec la courbe un double contact du second ordre; les six points de contact et les extrémités de la corde sont sur une même sphère dont le centre est dans le plan de symétrie.

Si la biquadratique se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie, on peut ajouter que :

Les centres des trois sphères qui ont un double contact sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre de la sphère qui contient les points de contact est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

19. Je reviens maintenant au cas précédemment étudié de l'ellipse E, quoique les considérations suivantes s'appliquent encore sans modification au cas plus général où l'on considère une biquadratique.

J'ai montré que, quand le point A se déplaçait sur l'ellipse, l'hypocycloïde H se déplaçait, sans changer de forme, dans le plan P.

Pour étudier la loi de ce déplacement, je remarque que, en désignant respectivement par φ et γ les points où H touche les droites f et g , la droite $\varphi\gamma$ a une longueur constante, que j'appellerai $4R$. Les normales à la courbe menées aux points φ et γ se rencontrent en un point dont la distance au point d'intersection de f et de g est constante et égale à $4R$. Le centre instantané de rotation décrit donc dans le plan un cercle de rayon égal à $4R$. On sait d'ailleurs que, relativement à la courbe, il décrit le cercle qui lui est circonscrit et dont le rayon est égal à $3R$.

On peut, par suite, se représenter ainsi qu'il suit le déplacement de l'hypocycloïde dans son plan :

Imaginons un cercle K de rayon égal à $4R$, puis deux autres cercles K' et K" de rayons respectivement égaux à $3R$ et à $2R$ et qui touchent tous les deux K au même point M. Si l'on considère le diamètre Δ du cercle K" qui passe par le point M, et si l'on fait rouler ce cercle dans le cercle K', supposé fixe, en entraînant avec lui ce diamètre, on sait que cette droite enveloppe une hypocycloïde H à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle R'.

Si maintenant on suppose que, cette courbe restant invariablement liée au cercle K', on fasse rouler ce cercle dans le cercle R, l'hypocycloïde prendra successivement les diverses positions qui correspondent aux diverses positions du point A sur l'ellipse.

Si, de plus, on imagine que le cercle K" roule, en même temps que le cercle K', dans l'intérieur du cercle K, et de façon qu'ils le touchent tous les deux toujours au même point, la droite Δ , dans ce mouvement, enveloppera l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement qui est l'enveloppe des traces des plans normaux à l'ellipse, tandis que ses extrémités décriront les axes de cette hypocycloïde.

20. Considérons les deux hypocycloïdes H et H' qui correspondent à deux points donnés A et B de l'ellipse E.

Soit R un point quelconque de cette ellipse ; les plans menés respectivement par les milieux des deux cordes AB et BR et normalement à ces cordes coupent le plan P suivant deux droites β et γ respectivement tangentes aux courbes H et H'.

Si, comme précédemment, nous appelons D la droite suivant laquelle le plan P est coupé par le plan mené par le milieu de AB et perpendiculairement à cette corde, nous savons que D est à la fois une tangente commune et une corde commune à H et à H'. D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux points milieux des côtés d'un triangle se coupant en un même point, il en résulte que les tangentes β et γ se rencontrent en un point de D. Elles sont, du reste, perpendiculaires aux projections sur le plan P des cordes AR et BR, et, comme ces cordes font un angle constant (leur point de rencontre décrit, en effet, le cercle C), tandis qu'elles tournent autour de points fixes de ce cercle, il en est de même de ces tangentes.

D'où le théorème suivant, que j'ai déjà démontré plus haut :

Si l'on considère une droite quelconque tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite, tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une hypocycloïde égale à la première.

21. Les considérations géométriques très-simples dont je me suis servi trouvent d'ailleurs, dans d'autres questions, des applications intéressantes. Je me bornerai ici à énoncer la proposition suivante :

Supposons que le sommet d'un angle de grandeur constante décrive une droite D, tandis que ses côtés enveloppent deux courbes K et K'; pour une position donnée de l'angle, soient respectivement a et a' les points de contact des deux côtés.

Cela posé, si l'on construit l'hypocycloïde à trois points de rebroussement qui oscule la courbe K au point a et touche la droite D, puis l'hypocycloïde qui oscule la courbe K' au point a' et touche également la droite D, ces deux hypocycloïdes sont égales et rencontrent D aux deux mêmes points.

Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. C.-W. BORCHARDT.

(Séance du 25 avril 1879.)

La moyenne arithmético-géométrique de deux éléments a, b est une fonction de ces éléments qui satisfait, comme on sait, à l'équation

$$f\left[\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right] = f(a, b).$$

En partant de cette équation, j'ai montré, dans un travail inséré au tome 58 de mon *Journal*, que la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments peut être définie par une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du second degré par rapport à la variable dépendante, résultat que M. Bertrand a trouvé digne de faire entrer dans son grand Ouvrage sur le Calcul infinitésimal.

Dans mes études sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments, j'ai tâché de trouver une définition analogue de cette nouvelle transcendante. Le résultat que j'ai trouvé ne présente pas encore toute la simplicité que j'aurais désirée, et, dans la Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* (séance du 2 novembre 1876), je me suis même contenté d'en indiquer seulement la forme générale, sans donner les formules dans leur détail.

Mais comme, dans un sujet nouveau, un résultat sûr, ne fût-ce même pas dans sa forme définitive, peut être utile pour des recherches ultérieures, j'espère qu'il ne sera pas sans intérêt pour la Société de connaître le système d'équations différentielles tel que je l'ai trouvé.

Soient a, b, c, e quatre éléments positifs rangés dans leur ordre décroissant et qui satisfont à l'inégalité

$$ae - bc > 0;$$

Soient

$$\begin{aligned} a &= a + b + c + e, \\ b &= a + b - c - e, \\ c &= a - b + c - e, \\ e &= a - b - c + e, \\ 2b' &= \sqrt{ab} + \sqrt{ce}, \quad 2b'' = \sqrt{ab} - \sqrt{ce}, \\ 2c' &= \sqrt{ac} + \sqrt{be}, \quad 2c'' = \sqrt{ac} - \sqrt{be}, \\ 2e' &= \sqrt{ae} + \sqrt{bc}, \quad 2e'' = \sqrt{ae} - \sqrt{bc}, \end{aligned}$$

toutes les racines étant prises avec le signe positif, et soit g la limite commune à laquelle on est conduit en appliquant un nombre indéfini de fois l'algorithme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(a + b + c + e), \\ b_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}), \\ c_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}), \\ e_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}). \end{aligned}$$

Cela posé, il s'agit de définir la limite g par des équations différentielles.

Je choisirai comme variables indépendantes les trois quantités

$$p = \frac{eb''}{cb'}, \quad q = \frac{bc''}{ec'}, \quad r = \frac{ce''}{be'}.$$

En posant

$$p' = 1 - q + qr, \quad q' = 1 - r + rp, \quad r' = 1 - p + pq,$$

je déduirai de p, q, r les expressions rationnelles

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1 - q \cdot 1 - r}{p'}, & q_0 &= \frac{1 - r \cdot 1 - p}{q'}, & r_0 &= \frac{1 - p \cdot 1 - q}{r'}, \\ p_1 &= \frac{pp'}{p_0 q' r'}, & q_1 &= \frac{qq'}{q_0 r' p'}, & r_1 &= \frac{rr'}{r_0 p' q'}. \end{aligned}$$

Comme variables dépendantes, j'introduirai trois quantités s, t, u qui dérivent de la transcendante g au moyen de différentia-

tions partielles, et que l'on définit de la manière la plus simple par une seule équation différentielle totale :

$$2d \log \frac{g}{a} = sp_0 \frac{dp}{p} + tq_0 \frac{dq}{q} + ur_0 \frac{dr}{r}.$$

Cela posé, les différentielles ds , dt , du s'expriment en fonctions linéaires de dp , dq , dr et du second ordre en s , t , u .

Pour plus de simplicité, je poserai

$$\begin{aligned} p_0 \frac{dp}{p} &= \delta p, & q_0 \frac{dq}{q} &= \delta q, & r_0 \frac{dr}{r} &= \delta r, \\ p_0 p_1 \frac{dp}{p} &= \delta_1 p, & q_0 q_1 \frac{dq}{q} &= \delta_1 q, & r_0 r_1 \frac{dr}{r} &= \delta_1 r, \\ d \log(p_0 q_0 r_0) &= \Delta, \end{aligned}$$

$$s - t - u = 2s_1, \quad -s + t - u = 2t_1, \quad -s - t + u = 2u_1.$$

Alors les équations différentielles qui définissent s , t , u peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= 2ds + \Delta \cdot s + (q_1 + r_1) \delta_1 p + (p_1 + s) \delta_1 q + (p_1 - s) \delta_1 r = S, \\ 0 &= 2dt + \Delta \cdot t + (q_1 - t) \delta_1 p + (p_1 + r_1) \delta_1 q + (q_1 + t) \delta_1 r = T, \\ 0 &= 2du + \Delta \cdot u + (r_1 + u) \delta_1 p + (r_1 - u) \delta_1 q + (p_1 + q_1) \delta_1 r = U. \end{aligned}$$

S , T , U désignant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S &= s^2 \delta p + u_1^2 \delta q + t_1^2 \delta r, \\ T &= u_1^2 \delta p - t^2 \delta q + s_1^2 \delta r, \\ U &= t_1^2 \delta p + s_1^2 \delta q + u^2 \delta r. \end{aligned}$$

En choisissant s_1 , t_1 , u_1 comme variables dépendantes, les équations différentielles prennent la forme

$$\begin{aligned} 0 &= 2ds_1 + \Delta \cdot s_1 - (s_1 + t_1 + r_1) \delta q_1 + (s_1 - q_1 + u_1) \delta r_1 + S_1, \\ 0 &= 2dt_1 + \Delta \cdot t_1 - (p_1 + t_1 + u_1) \delta r_1 + (s_1 + t_1 - r_1) \delta p_1 + T_1, \\ 0 &= 2du_1 + \Delta \cdot u_1 - (s_1 + q_1 + u_1) \delta p_1 + (-p_1 + t_1 + u_1) \delta q_1 + U_1, \end{aligned}$$

S_1 , T_1 , U_1 désignant les expressions

$$\begin{aligned} S_1 &= -t_1 u_1 \delta p + s_1 (s_1 + u_1) \delta q + s_1 (s_1 + t_1) \delta r, \\ T_1 &= t_1 (t_1 + u_1) \delta p - s_1 u_1 \delta q + t_1 (s_1 + t_1) \delta r, \\ U_1 &= u_1 (t_1 + u_1) \delta p + u_1 (s_1 + u_1) \delta q - s_1 t_1 \delta r. \end{aligned}$$

Ce système de trois équations différentielles totales présente dans sa forme une analogie remarquable avec l'équation différentielle unique qui définit la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. Les variables indépendantes p, q, r ne sont pas les seules pour lesquelles on trouve un système d'équations différentielles semblable à celui que l'on vient de proposer, et c'est, comme je l'espère, un autre choix de variables indépendantes qui conduira à un système plus simple d'équations différentielles.

Le système proposé d'équations différentielles totales, étant intégré, donne des expressions qui contiennent des constantes arbitraires. Concevons que l'on ait donné à ces constantes les valeurs particulières qu'elles prennent dans le cas où g est la moyenne arithmético-géométrique des éléments a, b, c, e .

Dans ce cas, les équations différentielles proposées s'intègrent par des séries ordonnées suivant les puissances et produits de puissances ascendantes de $1-p, 1-q, 1-r$, et qui convergent, lorsque chacune de ces différences est plus petite que l'unité, ce que l'on démontre aisément en introduisant dans l'intégrale double ⁽¹⁾ par laquelle j'ai défini la moyenne arithmético-géométrique de a, b, c, e les quantités p, q, r .

En négligeant, dans ce développement, les termes du second ordre et des ordres supérieurs, on obtient

$$\frac{a}{g} = 1,$$

c'est-à-dire que, dans ce développement, il n'y a point de termes du premier ordre, ce qui suffit pour déterminer les valeurs que prennent dans le cas dont il s'agit les constantes de l'intégration.

De ce qui précède il résulte que l'on peut développer suivant les puissances et produits de puissances de $1-p, 1-q, 1-r$ la transcendante $\frac{a}{g}$, en se servant, pour le calcul des coefficients, des équations différentielles données plus haut.

Je terminerai cette Note en indiquant, à cause de sa simplicité,

⁽¹⁾ Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1878, p. 96 (Classe mathématique).

le résultat auquel on parvient pour les termes du second ordre, qui sont

$$\frac{1}{4}(1-q)(1-r) + \frac{1}{4}(1-p)(1-r) + \frac{1}{4}(1-p)(1-q).$$

Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. HERMITE.

(Séance du 25 avril 1879.)

Soient U et V deux polynômes de degré n et $n-1$, que je supposerai premiers entre eux; je me propose de montrer, par une considération directe et entièrement élémentaire, que l'indice de la fraction $\frac{V}{U}$, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable, donne la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$, où le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines où il est négatif. Soit, à cet effet,

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et posons

$$U_1 + iV_1 = (x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

de sorte qu'on ait

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(U_1 + iV_1),$$

et, par conséquent,

$$U = (x - a_1)U_1 + b_1V_1,$$

$$V = -b_1U_1 + (x - a_1)V_1.$$

Je remarque d'abord qu'il résulte de ces relations que les polynômes U et U_1 sont premiers entre eux; car autrement U et V auraient un diviseur commun, contre la supposition faite. Cela posé, l'égalité

$$(U + iV)(U_1 - iV_1) = (x - a_1 - ib_1)(U_1^2 + V_1^2)$$

donne, en égalant dans les deux membres les coefficients de i ,

$$VU_1 - UV_1 = -b_1(U_1^2 + V_1^2)$$

ou bien

$$\frac{V}{U} - \frac{V_1}{U_1} = - \frac{b_1(U_1^2 + V_1^2)}{UU_1}.$$

Faisons croître maintenant la variable de $-\infty$ à $+\infty$; puisque les polynômes U et U_1 ne peuvent s'évanouir pour la même valeur, on voit que l'indice du premier membre sera la différence des indices des fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_1}{V_1}$, qui va s'obtenir immédiatement.

Supprimons, en effet, le facteur positif $U_1^2 + V_1^2$; nous sommes amené à la quantité $\frac{-b_1}{UU_1}$, dont la réciproque a un indice nul, de sorte qu'il suffit d'appliquer la proposition contenue dans l'égalité

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

où $\varepsilon = +1$ lorsque $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, $\varepsilon = -1$ si l'on a $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$, et enfin $\varepsilon = 0$ lorsque $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont de même signe. Dans le cas présent, $x_0 = -\infty$, $x_1 = +\infty$; d'ailleurs U et U_1 sont de degrés n et $n-1$: il en résulte que ε sera $+1$ ou -1 suivant que b_1 sera positif ou négatif.

La proposition énoncée à l'égard de l'équation $U + iV = 0$, de degré n , se trouve ainsi ramenée au cas de l'équation $U_1 + iV_1 = 0$, dont le degré est moindre d'une unité, et, de proche en proche, on arrivera au cas le plus simple, à savoir

$$x - a_n - ib_n = 0,$$

où elle se vérifie immédiatement.

Une première conséquence à en tirer, c'est que, en désignant par I l'indice de $\frac{V}{U}$, c'est-à-dire l'excès du nombre de fois que cette fraction, en devenant infinie, passe du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe du négatif au positif, le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$ dans lesquelles le coefficient de i est positif est donné par la formule $\frac{I+n}{2}$.

Supposons ensuite que, en changeant x en $x + i\lambda$, $U + iV$ devienne $U_\lambda + iV_\lambda$, et soit I_λ l'indice de $\frac{V_\lambda}{U_\lambda}$. Le nombre des racines

de l'équation proposée dans lesquelles le coefficient de i est supérieur à λ sera $\frac{I_\lambda + n}{2}$; la formule $\frac{I_\lambda - I_{\lambda'}}{2}$ donnera donc, en supposant $\lambda < \lambda'$, le nombre des racines où le coefficient de i est compris entre les deux limites λ et λ' . La transformée déduite de l'équation $U + iV = 0$ par le changement de x en ix conduira d'ailleurs de la même manière au nombre des racines dont la partie réelle est dans un intervalle donné. Considérons encore l'équation en y obtenue en faisant

$$y = \frac{x - g}{h - ix}$$

et la droite passant par les points dont les affixes sont g et h . L'indice relatif à cette nouvelle transformée donnera le nombre des racines de la proposée qui sont au-dessus ou au-dessous de cette droite, et, si nous remplaçons g et h par $g + k$ et $h + k$, de manière à définir une seconde droite parallèle à la première, la demi-différence des indices relatifs aux deux transformées représentera le nombre des racines comprises entre les deux parallèles.

En dernier lieu, je remarquerai que, si l'on suppose les quantités $b_1, b_2, \dots, b_n$ toutes de même signe, on a

$$I = +n \quad \text{ou} \quad I = -n,$$

selon qu'elles seront positives ou négatives. Dans les deux cas, la fraction $\frac{V}{U}$ doit, par conséquent, passer n fois par l'infini lorsque la variable croît de $-\infty$ à $+\infty$; ainsi l'équation $U = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles. C'est donc un nouvel exemple qui s'ajoute, en Algèbre, à l'équation dont dépendent les inégalités séculaires du mouvement elliptique des planètes et qui a été l'objet du travail célèbre de notre confrère M. Borchardt. Je ne tenterai point de suivre la voie qu'a ouverte l'illustre géomètre en appliquant le théorème de Sturm à l'équation $U = 0$ pour obtenir, sous forme de sommes de carrés, les fonctions littérales dont dépendent les conditions de réalité des racines; mais je saisis l'occasion d'employer, pour démontrer directement la propriété que j'ai en vue, une méthode que Sturm a lui-même donnée dans une Note du

Journal de M. Liouville, publiée à la suite d'un travail de M. Gascheau, intitulé *Application du théorème de Sturm aux transformées des équations binômes*, t. VII, p. 126 (voir aussi le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, p. 183). J'introduis, à cet effet, la série entière des polynômes $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$, en posant

$$U_k + iV_k = (x - a_{k+1} - ib_{k+1})(x - a_{k+2} - ib_{k+2}) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et je remarque que la suite

$$U, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, 1$$

présente n variations pour $x = -\infty$ et n permanences pour $x = +\infty$. J'observe ensuite que trois fonctions consécutives quelconques, par exemple U, U_1, U_2 , sont liées par la relation

$$b_2 U - [b_1(x - a_2) + b_2(x - a_1)] U_1 + b_1[(x - a_2)^2 + b_2^2] U_2 = 0.$$

Sous la condition admise à l'égard des quantités $b_1, b_2, \dots$, on voit donc que, quand une fonction s'annule, la précédente et la suivante sont de signes contraires; il en résulte que, en faisant croître la variable de $-\infty$ à $+\infty$, des changements dans le nombre des variations de la suite considérée ne peuvent se produire qu'autant que c'est la première fonction qui s'évanouit. Puisqu'on perd n variations, il est donc démontré que le polynôme U passe n fois par zéro; en même temps nous voyons que, à l'égard de U , la fonction U_1 possède la propriété caractéristique de la dérivée, c'est-à-dire que le rapport $\frac{U}{U_1}$ passe toujours, en s'évanouissant, du négatif au positif, pour des valeurs croissantes de la variable.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. JUNG.

(Séance du 9 mai 1879.)

Deux Notes intéressantes sur le même sujet de nos savants confrères MM. Laisant et Darboux (1) ont inspiré les considérations qui forment l'objet de cette Communication.

Étant données n masses m_i concentrées en autant de points A_i d'un plan π ($i = 1, 2, \dots, n$), soient G leur centre de gravité et M leur somme Σm , c'est-à-dire la masse totale. Désignant par (x) , (y) deux droites orthogonales du plan π se coupant au point quelconque O , et par x_i, y_i les coordonnées de A_i par rapport à ces droites, supposons formées les sommes $J_x = \Sigma m_i y_i^2$ et $J_y = \Sigma m_i x_i^2$, qui sont respectivement les moments d'inertie des m_i par rapport aux droites (x) et (y) considérées successivement comme axes de moments.

Si x_0, y_0 désignent les coordonnées du centre de gravité G , et h_x, h_y les rayons de gyration relatifs à (x) et à (y) ; si, en outre, X étant l'antipôle de (x) [c'est-à-dire le centre de second degré du système par rapport à l'axe (x)], y_x en est l'ordonnée, et si, Y étant l'antipôle de (y) , x_y en est l'abscisse, on aura les relations bien connues

$$\Sigma m_i y_i^2 = h_x^2 M = y_0 y_x M,$$

$$\Sigma m_i x_i^2 = h_y^2 M = x_0 x_y M,$$

lesquelles, observant que $x_i^2 + y_i^2 = \overline{OA_i}^2$, donnent, par addition.

$$\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = (h_x^2 + h_y^2) M = (x_0 x_y + y_0 y_x) M.$$

Maintenant, soient $(x') \parallel (x)$ et $(y') \parallel (y)$ deux autres axes de coordonnées passant par G , et désignons par x'_y la nouvelle abscisse de Y et par y'_x la nouvelle ordonnée de X , de manière que $x_y = x_0 + x'_y$, $y_x = y_0 + y'_x$; alors on trouve, posant $\overline{OG} = D$,

$$x_0 x_y + y_0 y_x = D^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x).$$

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 193, et t. VII, p. 7.

On a donc, en résumant,

$$(x) \quad \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = H^2 M,$$

où

$$(1) \quad H^2 = h_x^2 + h_y^2,$$

$$(2) \quad H^2 = x_0 x_y + y_0 y_x,$$

$$(3) \quad H^2 = D^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x), \quad D = \overline{OG};$$

chacune de ces identités, combinée avec l'équation (x), donne un théorème bien facile à énoncer. Par exemple, de l'équation (1), on a :

1° *L'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour cathètes les rayons de gyration correspondant à deux droites orthogonales quelconques passant par O, multipliée par la masse totale M, est, quel que soit le point O, égale à la somme $\Sigma m_i \overline{OA_i}^2$.*

Proposition qui contient le théorème bien connu :

La somme $J_x + J_y$ relative à deux droites (x), (y) de π , orthogonales et passant par O, est indépendante de l'orientation des (x), (y) dans le plan π .

Et de l'équation (2) on a :

2° *Si X et Y sont les antipôles de ces droites (x) et (y), la somme de rectangles $(x_0 x_y + y_0 y_x)$ ayant pour dimensions, l'un les distances de Y et G de (x), et l'autre les distances de X et G de (y), est aussi indépendante de l'orientation de (x) et (y) dans le plan π , et se conserve constamment égale à $\Sigma m_i \overline{OA_i}^2$.*

De l'équation (3), H et D ne dépendant que de O et G, on tire une proposition analogue qui se rapporte à la somme de rectangles $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$.

Mais il y a de plus :

3° *Cette dernière somme $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$, non-seulement ne dépend pas de l'orientation des droites (x) et (y) dans le plan π , mais elle est indépendante même de O, c'est-à-dire qu'elle reste invariable de quelque manière que le point O se déplace en π .*

On pourrait se persuader de cette vérité partant du théorème II de Lagrange ; mais, indépendamment de ce théorème, elle se démontre par la simple observation que, l'orientation de (x) , (y) , et par conséquent de (x') , (y') , n'ayant pas d'influence sur la valeur $(x_0x'_y + y_0y'_x)$, on peut supposer que (x') , (y') coïncident avec les *axes principaux* $(\bar{x}')$, $(\bar{y}')$ du système. En effet, désignant par $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_y, \bar{y}'_x$ les quantités relatives à cette orientation particulière, analogues à x_0, y_0, x'_y, y'_x , par $\bar{k}_x, \bar{k}_y$ les rayons de gyration correspondant à $(\bar{x}')$, $(\bar{y}')$, et par k_x, k_y ceux relatifs à deux autres axes orthogonaux (x') , (y') passant par le centre de gravité G, on a

$$x_0x'_y + y_0y'_x = \bar{x}_0\bar{x}'_y + \bar{y}_0\bar{y}'_x$$

et

$$\bar{x}_0\bar{x}'_y = \bar{k}_x^2, \quad \bar{y}_0\bar{y}'_x = \bar{k}_y^2 \quad (1) ;$$

par conséquent, (x') étant perpendiculaire à (y') ,

$$k_x^2 + k_y^2 = \bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 = \text{const.} = x_0x'_y + y_0y'_x, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Posant

$$(4) \quad K^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

au lieu des équations (3) et (4), on peut écrire

$$(5) \quad H^2 = D^2 + K^2,$$

$$(6) \quad \sum m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \sum m_i \overline{GA_i}^2.$$

Maintenant, si l'on convient de nommer *moment d'inertie du système par rapport* (ou *correspondant*) à un point O la somme $\sum m_i \overline{OA_i}^2$, et *rayon de gyration par rapport* à O le segment H défini par l'identité

$$H^2 = \frac{\sum m_i \overline{OA_i}^2}{M},$$

(1) On sait qu'un point est réciproque (conjugué) à tous les points de son antipolaire ; que les points réciproques AA', BB', CC', ... placés sur une droite r sont conjugués en involution ; que, si r passe par G, ce point est le centre de l'involution ; et qu'enfin la constante GA.GA' de cette involution est (en valeur absolue) égale au carré du rayon de gyration correspondant au diamètre conjugué à r (voir, par exemple, mes Notes dans les *Rendiconti*, années 1875, 1876, 1879).

les équations (5) et (6) permettent de conclure qu'entre deux moments d'inertie se rapportant, l'un à un point arbitraire O, l'autre au centre de gravité G du système donné de masses, et entre les rayons correspondants de gyration H et K, il y a la même relation bien connue qui existe entre les quantités analogues se rapportant à un axe quelconque (x) et à l'axe parallèle (x') passant par G, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Le moment d'inertie du système de masses données par rapport à un point O [ou à un axe (x)] est égal au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité G [ou respectivement par rapport à l'axe barycentrique (x') || (x)], augmenté du moment d'inertie par rapport au même point O [ou respectivement par rapport au même axe (x)] de la masse totale M concentrée au point G. Le rayon de gyration H par rapport à O [ou à (x)] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés : 1^o la distance D du point O [ou respectivement de l'axe (x)] de G; 2^o le rayon de gyration K relatif à G [ou respectivement à (x')].*

Tout ce qui précède est indépendant des théorèmes de Lagrange, et il serait bien facile d'en déduire ces deux théorèmes; mais je préfère les considérer comme connus et remarquer que, si l'on en invoque un, l'autre s'ensuit immédiatement de l'équation (6). En effet, pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les deux théorèmes de Lagrange s'expriment, avec nos notations, par les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (8) \quad & \text{I.} \quad \frac{\sum \sum m_r m_s \overline{A_r A_s}^2}{M} = \sum m_i \overline{GA_i}^2, \\ (9) \quad & \text{II.} \quad \sum m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \frac{\sum \sum m_r m_s \overline{A_r A_s}^2}{M}, \end{aligned}$$

et de comparer ces identités avec l'équation (6). L'équation (8) donne, en outre, le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *La somme des produits des masses combinées deux à deux et respectivement multipliées par le carré de leur distance respective est égale au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité G, multiplié par la masse totale.*

On peut donc raisonnablement regarder toutes les propositions énoncées ci-dessus comme contenues dans celles de Lagrange, ou, si l'on veut, on peut considérer le théorème A, combiné avec B, comme des énoncés différents des théorèmes de Lagrange.

Ajoutons encore comme conséquences évidentes :

THÉORÈME C. — *La somme constante de rectangles $x_0 x'_y + y_0 y'_x$ définie plus haut, multipliée par le carré de la masse totale, est égale à la somme de produits $\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$ définie dans le théorème B.*

THÉORÈME D. — *Quel que soit le point O en π , si D est sa distance du centre de gravité et H son rayon de gyration, la différence $H^2 - D^2$ est constante.*

Des considérations tout à fait semblables aux précédentes conduisent aux théorèmes analogues pour le cas où les masses m_i sont concentrées en des points A_i placés d'une manière quelconque dans l'espace.

Encore une remarque. Le premier théorème dont M. Darboux s'occupe dans sa Note s'exprime par la formule

$$(\beta) \quad \overline{OR}^2 = M \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - \Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2,$$

laquelle, comme ce savant géomètre l'observe, coïncide avec le théorème II de Lagrange, si l'on pose

$$\overline{OR} = M \cdot \overline{OG} = MD.$$

Par cette même position, nos équations (5) et (6) deviennent

$$\begin{aligned} \overline{OR}^2 &= M^2 (\Pi^2 - K^2), \\ \overline{OR}^2 &= M \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - M \Sigma m_i \overline{GA_i}^2, \end{aligned}$$

lesquelles sont susceptibles de l'interprétation suivante :

THÉORÈME E. — *Les m_i étant des masses concentrées aux points A_i , et O désignant un point arbitraire, la résultante $\overline{OR}$ des forces $m_i \overline{OA_i}$ est telle, que le rapport de son carré au carré de la masse totale est égal à la différence des carrés des deux rayons de gyration du système, correspondant l'un au point donné O et l'autre au centre de gravité G.*

Cette résultante $\overline{OR}$ varie en général avec O; mais elle reste constante en grandeur pour tous les points O placés sur une circonférence quelconque de centre G.

Si au lieu de masses les m_i désignent des coefficients positifs ou négatifs affectant les points A_i (c'est précisément l'hypothèse de M. Darboux), il y a lieu à considérer le cas de $\Sigma m = M = 0$. Alors, à moins que la résultante $\overline{OR}$ même ne soit zéro, elle est constante en grandeur et en direction de quelque manière que le point O se déplace. Cela, entre autres, résulte aussi de l'équation (β), comme M. Darboux l'a observé.

Mais, dans ce cas, si on laisse de côté un quelconque des points et le coefficient relatif, par exemple le point A_h avec le coefficient m_h (point affecté qu'on désigne ordinairement par $m_h A_h$), et si G_0 est le centre de gravité des autres $n - 1$ points affectés $m_i A_i$ ($i = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n$), on sait ⁽¹⁾ que cette résultante constante, en grandeur et en direction, est donnée par

$$\overline{OR} = m_h \overline{G_0 A_h},$$

de manière que, dans cette hypothèse de $M = 0$ et de $\overline{OR}$ non zéro, l'équation (β) devient

$$\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2 = - m_h^2 \overline{G_0 A_h}^2.$$

Maintenant, observant que $m_h \overline{G_0 A_h}^2$ n'est autre chose que le moment d'inertie du point A_h affecté du coefficient m_h par rapport au point G_0 , on a le théorème suivant :

THÉORÈME F. — *Si pour $M = 0$ la somme constante*

$$\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$$

n'est pas nulle, elle équivaut au moment d'inertie de l'un quelconque A_h des n points donnés, pris par rapport au centre de gravité G_0 des autres $n - 1$ et multiplié par le coefficient correspondant m_h , changé de signe.

⁽¹⁾ CREMONA, *Elementi di Calcolo grafico*, n° 121, p. 65 (Torino, 1874); cfr. MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, t. I, § 107, p. 197 (Leipzig, 1837).

L'interprétation de la même somme pour le cas de M différent de zéro est contenue dans le théorème B, car évidemment ce théorème subsiste aussi dans l'hypothèse actuelle où les m_i ne désignent plus des masses (ou coefficients *positifs*), mais des coefficients quelconques (*positifs* ou *négatifs*).

On peut considérer ce qui précède comme une manière différente d'établir et d'énoncer le deuxième théorème dont M. Darboux s'est occupé, et dont on pourrait tirer les conséquences (*Bulletin*, t. VII, p. 11) d'une autre manière encore, en les déduisant directement des *Elementi di Calcolo grafico* (n° 121, p. 63) cités plus haut; précisément comme le premier théorème traité par M. Darboux (*loc. cit.*, p. 8) pourrait aussi se déduire presque immédiatement du n° 119, p. 65 du même Ouvrage de M. Cremona.

*Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive
élémentaire; par M. HERMARY.*

(Séance du 23 mai 1879.)

Inscrire une sphère dans un tétraèdre. (D'une manière plus générale : *Déterminer les sphères tangentes à quatre plans.*)

Lemmes évidents. — I. Une sphère étant inscrite dans un dièdre, si l'on vient à fermer le dièdre dans le sens convenable pour écraser la sphère, les points de contact viennent en coïncidence.

II. Si une sphère est inscrite dans un trièdre, les points de contact sont tous les trois à la même distance du sommet.

Solution. — Je rabats trois des faces du tétraèdre sur la quatrième prise pour base, toujours de manière à écraser la sphère que j'ai en vue. Après cette opération, tous les points de contact doivent être en coïncidence (lemme I) et les trois rabattements du sommet doivent être tous les trois à la même distance du point où la coïncidence a lieu (lemme II). Ce point est donc le centre du cercle qui passe par les trois rabattements.

Discussion. — Je donne un signe à chaque rabattement, ainsi qu'à la base, qui est son propre rabattement, et je conviens que deux rabattements seront de même signe si les triangles qui formaient les faces empiètent l'un sur l'autre; ils seront de signes contraires dans l'autre cas. On voit immédiatement qu'un changement de tous les signes ne change pas la solution. Il y a toujours huit solutions, savoir :

++++... 1 solution. — Sphère inscrite proprement dite;
 ++++— et permutations... 4 solutions. — Sphères exinscrites analogues aux cercles exinscrits du triangle;
 ++— et permutations... 3 solutions. — Sphères inscrites dans les *combles*.

J'ai fait la figure (1) pour l'un de ces derniers cas, qui sont les plus intéressants.

BCD est le triangle pris pour base; les rabattements du sommet A sont désignés par cette lettre affectée d'un indice qui rappelle le sommet opposé au triangle rabattu, et, en outre, d'un accent dans le cas du rabattement de signe contraire à la base.

Pour déterminer la sphère du comble BC, j'ai donc pris les rabattements A_d , A'_b et A'_c . On voit immédiatement que les perpendiculaires aux milieux des côtés $A_d A'_c$ et $A_d A'_b$ sont les bissectrices des angles $A_d B A'_c$ et $A'_b C A_d$. La condition pour que la sphère soit dans le comble BC est

$$BCA + \frac{BCD + DCA - BCA}{2} + CBA + \frac{CBD + DBA - CBA}{2} > 2 \text{ droits}$$

ou

$$(BCA + BCD + DCA) + (CBA + CBD + DBA) > 4 \text{ droits.}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, son analogue l'est forcément pour le côté AD, et la sphère se trouve dans le comble dont ce côté est la faite, etc.

Scolie. — Lorsqu'une sphère est inscrite dans un trièdre, le point de contact de l'une des faces est sur la bissectrice de l'angle formé par les rabattements du troisième côté autour des côtés de

¹ Le lecteur est prié de faire la figure.

ladite face. Cela résulte de la solution précédente, et cela peut s'établir directement sans la considération de la quatrième face du tétraèdre.

D'autre part, les distances de ce point de contact aux deux côtés sont proportionnelles aux cotangentes des demi-dièdres adjacents. Cette condition détermine également une droite qui passe par le point de contact de la sphère et qui doit nécessairement coïncider avec la bissectrice dont il a été question.

En exprimant que cette coïncidence a lieu, on trouve une série de formules de la Trigonométrie sphérique.

Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit ; par
M. HAAG.

(Séance du 9 mai 1879.)

Lorsqu'un point mobile décrit une trajectoire, il est clair qu'il doit exister des relations entre les éléments géométriques qui caractérisent cette trajectoire et les accélérations de divers ordres du point qui la décrit. En effet, la connaissance de ces accélérations entraîne celle de la courbe, et par suite celle des éléments géométriques qui, comme la tangente, le plan osculateur et le rayon de courbure, servent à la caractériser en chacun de ses points.

J'ai donné ces relations pour le cas des courbes planes dans les feuilles autographiées du *Cours de Géométrie* commencé à l'École polytechnique de Bordeaux en 1870. Depuis, dans une Note insérée aux *Annales de l'École Normale* (année 1874, p. 147), M. Bouquet a développé une méthode analytique permettant de calculer ces mêmes relations pour les courbes gauches. Je reviens aujourd'hui sur la question pour montrer que le calcul géométrique très-simple par lequel j'étais arrivé au résultat dans le cas des courbes planes peut s'étendre sans difficulté aux courbes à double courbure.

Considérons en un point m de la courbe gauche le trièdre tri-

rectangle formé par la tangente mt dirigée dans le sens du déplacement sur la courbe, la normale principale mn dirigée vers le centre de courbure, et la binormale mp dirigée vers le centre de cambrure, c'est-à-dire du côté du plan osculateur où est situé le centre de la sphère osculatrice.

Désignons par $d\alpha$ l'angle de contingence et par $d\theta$ l'angle de torsion correspondant à l'arc élémentaire ds . Désignons encore par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ les coefficients différentiels $\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\theta}{ds}$ et leurs dérivées respectives par rapport à l'arc, et par v la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point mobile.

Enfin, appelons T, N et P des grandeurs géométriques égales à l'unité portées dans les trois directions mt, mn et mp précédemment définies.

Il est facile de reconnaître qu'on a

$$(1) \quad \begin{cases} dT = -N d\alpha = -N v \alpha_1 dt, \\ dN = -T d\alpha + P d\theta = (-T v \alpha_1 + P v \theta_1) dt, \\ dP = -N d\theta = -N v \theta_1 dt. \end{cases}$$

Cela posé, si u est le rayon vecteur du point mobile m , la grandeur géométrique de sa vitesse sera

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = vT,$$

et les différentiations successives de ce produit fourniront sans difficulté les accélérations d'ordres successifs du point mobile. Ainsi,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dv}{dt} T + v^2 \alpha_1 N, \\ \frac{d^3 u}{dt^3} = \left(\frac{d^2 v}{dt^2} - v^3 \alpha_1^2 \right) T + \left(3v \frac{dv}{dt} \alpha_1 + v^3 \alpha_2 \right) N + v^3 \alpha_1 \theta_1 P, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Sans pousser plus loin les calculs, on voit parfaitement quelle est la marche à suivre pour obtenir l'expression générale de l'accélération d'ordre n au moyen des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ qui caractérisent géométriquement la courbe.

Pour achever de résoudre la question proposée, il reste à trouver les relations qui lient ces fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ aux éléments géométriques d'une nature différente qui ont été adoptés jusqu'ici dans l'étude générale des courbes gauches.

Ces relations s'établissent sans aucune difficulté. Par exemple, en désignant par ρ et r les rayons de courbure et de cambrure, on a immédiatement

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

$$\theta_1 = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Soit maintenant R le rayon de la sphère osculatrice ; d'après une relation connue,

$$R^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2,$$

et, comme $\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2} = -\rho^2 \alpha_2$,

$$R^2 = \rho^2 + \rho^4 r^2 \alpha_2^2,$$

d'où

$$\alpha_2 = \pm \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho^2 r} = \pm \frac{h}{\rho^2 r},$$

en désignant par h la grandeur positive de la perpendiculaire abaissée du centre ω de la sphère osculatrice sur le plan osculateur à la courbe ; il est facile de s'assurer d'ailleurs que c'est le signe — qui doit être adopté devant la valeur de α_2 .

Le mode de formation des équations (3) permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un point mobile décrit une courbe gauche, si sa vitesse et ses n premières accélérations sont données, son accélération d'ordre $n + 1$ a son extrémité située sur une parallèle à la tangente et son accélération d'ordre $n + 2$ a son extrémité située dans un plan parallèle au plan osculateur.

Cette proposition est l'analogie, pour les courbes gauches, d'un théorème que nous avons précédemment démontré sur les surfaces (*Bulletin*, t. V, p. 166).

Terminons enfin par une remarque relative à l'expression de la

suraccélération. Si dans cette expression on suppose v constant, et si l'on remplace α_1 , α_2 et θ_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{d^3u}{dt^3} = -\frac{v^3}{\rho^2} T - \frac{v^3 h}{\rho^2 r} N + \frac{v^3}{\rho r} P,$$

et la valeur des composantes dirigées suivant la normale et la perpendiculaire au plan osculateur fait voir que leur résultante partielle est dirigée suivant la perpendiculaire au rayon $m\omega$ de la sphère osculatrice. Il en résulte que, *dans le mouvement uniforme d'un point sur une courbe gauche, la suraccélération est située dans le plan tangent à la sphère osculatrice*, propriété qui a quelque analogie avec celle de l'accélération, dirigée suivant la normale principale dans le mouvement uniforme ⁽¹⁾.

Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles;
par M. l'abbé Aoust.

(Séance du 27 juin 1879.)

1. *État de la question.* — Lancret appelle *développée par le plan* d'une courbe l'arête de rebroussement de la surface enveloppe du plan normal à cette courbe, de sorte que, réciproquement, cette dernière est la développante par le plan de la première. Dans la question posée, il y a trois espèces de courbes à considérer : les courbes C , qui sont les développantes par le plan

(¹) Il est facile de s'assurer par le calcul algébrique de l'exactitude de ce dernier résultat. En effet, rapportons le point mobile décrivant la courbe à des coordonnées ayant leur origine au centre de la sphère osculatrice; la quantité

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

étant constante pendant trois éléments de temps consécutifs, pourra être trois fois différenciée comme telle, et, si l'on observe, dans ces différenciations, que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

est aussi constant parce que la vitesse est uniforme, on arrive à la relation

$$dx \, d^2x + dy \, d^2y + dz \, d^2z = 0,$$

qui exprime précisément le résultat ci-dessus énoncé.

des courbes C_1 ; les courbes C_2 , qui sont les développées par le plan des courbes C_1 . La question consiste à déterminer les courbes C_1 de telle sorte que les courbes C et les courbes C_2 soient égales entre elles.

Cette question est, dans sa généralité, au-dessus des forces de l'analyse, à cause des intégrations qui ne peuvent s'effectuer, mais elle mérite l'attention des géomètres à cause des simplifications dont elle est susceptible et des faits qui sont dévoilés par l'usage des coordonnées naturelles des courbes. En effet, lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes, on est conduit à une équation différentielle du douzième ordre; au contraire, si l'on fait usage des coordonnées naturelles, la question se partage en trois opérations distinctes, qui sont : 1° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; 2° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre; 3° une triple quadrature. Or, ces deux équations différentielles se ramènent à deux équations différentielles identiques du troisième ordre, l'une et l'autre linéaires. Lorsqu'on a trouvé les intégrales des courbes C_1 , on obtient les intégrales des courbes C et des courbes C_2 sans intégrations nouvelles. Il existe d'ailleurs des cas intéressants dans lesquels l'intégration de l'équation résolvante du troisième ordre est possible, ainsi que le calcul des quadratures, et, dans ces cas, la question obtient une solution complète. Cette question peut être généralisée si, au lieu de se donner la condition que les courbes C et C_2 sont égales, on se donne la condition que ces courbes sont semblables.

2. *Équation résolvante.* — Soient $d\sigma$, $d\epsilon$, $d\omega$ l'arc élémentaire, l'angle de contingence et l'angle de torsion de la courbe C ; soient ψ le rapport de $d\epsilon$ à $d\omega$ exprimé en fonction de ω dont la différentielle est $d\omega$, ρ et τ les rayons de courbure et de torsion; nous représentons par les mêmes lettres marquées des indices inférieurs 1 et 2 les éléments de même nom des courbes C_1 et C_2 .

La nature de la question laisse indéterminé le rapport ψ ; en effet, on a, par suite de l'égalité des courbes C et C_2 , la série des rapports égaux

$$(1) \quad \frac{d\omega}{d\epsilon} = \frac{d\omega_2}{d\epsilon_2} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho_2}{\tau_2};$$

or, les conditions du problème étant que ρ et ρ_2 sont égaux entre eux ainsi que τ et τ_2 , comme l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 entraîne, par suite des équations (1), l'égalité des rayons de torsion τ et τ_2 et réciproquement, il en résulte que le rapport ψ reste indéterminé.

Par suite de la relation qui existe entre le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de l'arête de rebroussement, on a les deux équations

$$(2) \quad -\rho_1 = \rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2}, \quad -\rho_2 = \rho_1 + \frac{d}{\psi d\omega} \left(\frac{d\rho_1}{\psi d\omega} \right),$$

dont la seconde se déduit de la première par suite des égalités suivantes :

$$d\tau = d\omega_1, \quad d\omega = d\tau_1, \quad d\tau_1 = d\omega_2, \quad d\omega_1 = d\tau_2.$$

Donc, si l'on suppose ρ_2 et ρ égaux entre eux, et qu'on représente par ψ' la dérivée de ψ par rapport à ω , on tombera sur l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$(3) \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^3 \rho}{d\omega^3} + (1 + \psi^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d\rho}{d\omega} = 0,$$

qui est l'équation résolvante du problème. Posons $\frac{d\rho}{d\omega}$ égal à μ ; l'équation précédente passe au troisième ordre et deviendra

$$(4) \quad \frac{d^3 \mu}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^2 \mu}{d\omega^2} + (1 + \psi^2) \frac{d\mu}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi} \mu = 0.$$

3. Intégrales de l'équation résolvante. — Soient M_1, M_2, M_3 trois solutions particulières de l'équation (4), et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$\rho = A_0 + \Sigma A \int M d\omega,$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs que prend l'expression placée sous ce signe lorsque A et M sont affectés des indices 1, 2, 3. Cette intégrale exprime la valeur du rayon de courbure de la courbe C en fonction de ω .

Pour avoir le rayon de courbure ρ_1 de la courbe C_1 , il faut recourir à la première des équations (2), laquelle donne l'expression

suivante de ρ_1 :

$$(6) \quad \rho_1 = -A_0 - \Sigma A \left(\frac{dM}{d\omega} + \int M d\omega \right).$$

La valeur de τ_1 se déduit de cette expression; en effet, on a les relations

$$\tau_1 = \rho_1 \frac{dt_1}{d\omega_1} = \rho_1 \frac{d\omega}{dt};$$

il suffit donc de diviser par ψ le second membre de l'équation (6) pour avoir τ_1 .

La valeur du rayon de courbure ρ_2 de la courbe C_2 s'obtient de même sans difficulté au moyen de la seconde des équations (2) :

$$(7) \quad \rho_2 = A_0 + \Sigma A \left[\frac{dM}{d\omega} + \int M d\omega + \frac{d}{\psi d\omega} \left(\frac{d^2 M}{\psi d\omega^2} + \frac{M}{\psi} \right) \right].$$

La valeur du rayon de torsion τ_2 de la courbe C_2 s'obtient en multipliant par ψ le second membre de cette dernière équation.

4. *Intégrales premières.* — L'intégrale générale de l'équation (3) n'est pas possible, mais on peut en obtenir une intégrale première. Ce fait a une grande importance dans cette question.

En effet, si l'on multiplie la première des équations (2) par $2d\rho$ et la seconde par $2d\rho_1$, qu'on ajoute et qu'on intègre, on trouve

$$(8) \quad -2 \int \rho_1 d\rho_1 - 2 \int \rho_1 d\rho = \rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho_1^2 + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2 d\omega^2};$$

or, si l'on intègre par parties la première intégrale du premier membre, et qu'on représente par c^2 la constante d'intégration, ce premier membre se réduit au binôme $c^2 - 2\rho_1 \rho_2$; on a donc, réductions faites, l'équation

$$(8)' \quad c^2 - \frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \left(\frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2 = \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{d\rho}{d\omega} + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2,$$

qui est du troisième ordre et qui devient du second ordre en μ . Nous l'écrivons sous la forme suivante :

$$(8)'' \quad \psi d\mu = \frac{\mu d\mu + \frac{d\mu}{d\omega} d \left(\frac{d\mu}{d\omega} \right)}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - \frac{d\mu^2}{d\omega^2}}}.$$

Sous cette forme, elle devient une seconde fois intégrable si le rapport ψ est donné en fonction de μ . En effet, si l'on pose $\psi = f'(\mu)$, on obtient, par l'intégration immédiate,

$$f(\mu) = \sqrt{c^2 - \mu^2 - \frac{d\mu^2}{d\omega^2}}.$$

On a donc les deux équations

$$(9) \quad d\omega = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - f(\mu)^2}}, \quad d\omega = \frac{f'(\mu) d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - f(\mu)^2}}.$$

L'intégration de la première donne μ en fonction de ω ; soit $F(\omega)$ cette fonction, qui contient deux constantes arbitraires; on a les deux relations

$$\mu = F(\omega), \quad d\epsilon = f'[F(\omega)] d\omega,$$

et conséquemment les deux intégrales

$$\rho = \int F(\omega) d\omega, \quad \epsilon = \int f'[F(\omega)] d\omega,$$

dans chacune desquelles est contenue une nouvelle constante arbitraire.

Il est évident que ces deux relations sont les deux équations naturelles de la courbe C.

On en déduit : 1° la rectification de la courbe C, puisque l'arc de courbe s est donné par l'équation

$$s = \int f'[F(\omega)] d\omega \int F(\omega) d\omega;$$

2° le rayon de torsion de cette même courbe, lequel est donné par la dérivée par rapport à ω de l'équation précédente.

Il serait facile, comme on l'a fait au numéro précédent, d'obtenir les rayons de courbure et de torsion des courbes C_1 et C_2 , et par conséquent les équations naturelles de ces courbes.

5. *Du trièdre des axes mobiles.* — La tangente τ_1 , la binormale ν_1 , et la normale principale ρ_1 forment, en chaque point de la courbe C_1 , un trièdre trirectangle; or la direction de chacune des arêtes de ce trièdre ne dépend que du rapport $\frac{d\epsilon}{d\omega}$, que nous

avons représenté par ψ . En effet, on a les trois équations

$$(10) \quad \begin{cases} d \cos(\tau_1, x) = d\omega \cos(\rho_1, x), \\ d \cos(\nu_1, x) = d\epsilon \cos(\rho_1, x), \\ d \cos(\rho_1, x) = -d\omega \cos(\tau_1, x) - d\epsilon \cos(\nu_1, x), \end{cases}$$

de sorte que, si l'on veut intégrer le système, on trouve l'équation résultante

$$(4)' \quad \begin{cases} \frac{d^2 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^2 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} \\ + (1 + \psi^2) \frac{d \cos(\tau_1, x)}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi} \cos(\tau_1, x) = 0. \end{cases}$$

Cette équation résolvante est identiquement la même que l'équation (4); conséquemment, si l'on représente par a_1, a_2, a_3 trois constantes, on a l'intégrale générale

$$\cos(\tau_1, x) = \Sigma a M,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs que prend le produit aM lorsqu'on affecte simultanément a et M des indices 1, 2, 3.

Soient maintenant $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ six nouvelles constantes qui sont des fonctions des précédentes; par suite de l'orthogonalité des axes, on a le Tableau suivant :

$$\begin{aligned} \cos(\tau_1, x) &= \Sigma a M, & \cos(\tau_1, y) &= \Sigma b M, & \cos(\tau_1, z) &= \Sigma c M, \\ \cos(\rho_1, x) &= \Sigma a \frac{dM}{d\omega}, & \cos(\rho_1, y) &= \Sigma b \frac{dM}{d\omega}, & \cos(\rho_1, z) &= \Sigma c \frac{dM}{d\omega}. \end{aligned}$$

$$\cos(\nu_1, x) = \Sigma (b_1 c_2 - c_1 b_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right),$$

$$\cos(\nu_1, y) = \Sigma (c_1 a_2 - a_1 c_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right),$$

$$\cos(\nu_1, z) = \Sigma (a_1 b_2 - b_1 a_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs des expressions placées sous ce signe par suite de la rotation simultanée des indices.

Il résulte de cette analyse que la direction des axes du trièdre mobile ne dépend aussi que de la valeur de $\frac{d\rho}{d\omega}$ fournie par l'inté-

gration de l'équation (8)', dans laquelle on suppose la constante c^2 égale à l'unité.

Il importe de remarquer que deux des trois constantes a_1, a_2, a_3 sont arbitraires, parce que la somme des carrés des cosinus des angles que l'axe des x fait avec les trois axes mobiles est égale à l'unité. Ceci revient à dire que la question qui consiste à déterminer la direction des axes mobiles en fonction de ψ ne peut dépendre que d'une équation différentielle du second ordre. On trouve immédiatement cette équation lorsqu'on remplace dans le système (10) la deuxième équation par la relation

$$\cos^2(\tau_1, x) + \cos^2(\nu_1, x) + \cos^2(\rho_1, x) = 1;$$

on obtient alors l'équation différentielle

$$\psi = \frac{\frac{d^2 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} + \cos(\tau_1, x)}{\sqrt{1 - \cos^2(\tau_1, x) - \left[\frac{d \cos(\tau_1, x)}{d\omega} \right]^2}},$$

qui concorde avec l'équation (8)", dans laquelle il suffit et il est nécessaire de faire la constante c égale à l'unité. Cette conclusion confirme ce que nous venons de dire dans le précédent alinéa.

Le D^r Hoppe a, le premier, démontré par une transformation analytique élégante, et nous avons aussi démontré par des considérations géométriques, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace*, que cette dernière équation est réductible à une équation différentielle linéaire du second ordre; mais cette équation simplifiée présente toujours les mêmes difficultés d'intégration.

6. *Coordonnées cartésiennes des courbes.* — Commençons par déterminer les coordonnées de la courbe C_1 ; si l'on représente par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ trois constantes arbitraires, on déduit de la relation triple se rapportant aux trois axes x, y, z ,

$$\frac{dx_1}{d\sigma_1} = \cos(\tau_1, x),$$

les trois équations contenues dans le type suivant :

$$x_1 - \alpha_1 = \int \cos(\tau_1, x) d\sigma_1.$$

Or, si l'on y remplace les cosinus des angles que τ , fait avec les trois axes fixes par leurs valeurs données par les premières équations (11) et $d\sigma$, par l'expression fournie par l'équation (6), on a les trois relations données par le type suivant :

$$(12) \quad x_1 - \alpha_1 = - \int \left(A_0 + \Sigma A \frac{dM}{d\omega} + \Sigma A \int M d\omega \right) (\Sigma a M) d\omega,$$

lesquelles donnent les trois coordonnées cartésiennes de la courbe C_1 .

Les coordonnées x, y, z de la courbe C et les coordonnées x_2, y_2, z_2 de la courbe C_2 sont données par les équations contenues dans les deux types suivants :

$$(C) \quad x_1 - x = \rho \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho}{d\omega} \cos(\tau_1, x),$$

$$(C_2) \quad x_2 - x_1 = \rho_1 \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho_1}{\psi d\omega} \cos(\nu_1, x),$$

dans lesquelles toutes les quantités, à l'exception des coordonnées du point de la courbe que l'on considère, sont connues en fonction de ω , par suite des équations (11) et (12).

7. *Applications.* — L'intégration de l'équation (4) n'est pas possible d'une manière générale; mais nous avons fait connaître, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace*, les séries des différentes valeurs de ψ dans lesquelles cette intégration se pratique; nous nous contenterons de l'examen de deux cas.

Premier cas :

$$\psi = 2\lambda\mu,$$

λ étant une constante. Dans ce cas, ψ étant proportionnel à μ , l'équation (8)ⁿ donne

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - \lambda^2(\mu^2 + a^2)^2.$$

Si l'on représente par $\mathfrak{M}^2$ le second membre de cette équation.

on a les deux relations

$$(9)' \quad d\omega = \frac{d\mu}{\mathfrak{N}}, \quad d\varepsilon = \frac{2\lambda\mu d\mu}{\mathfrak{N}}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$c^2 - \lambda^2 a^2 = \lambda^2 A^2, \quad 1 - 2\lambda^2 a^2 = 2\lambda^2 B^2, \quad A^2 + B^2 = n^2,$$

A, B et n étant des auxiliaires, la dernière équation (9)' devient

$$d\varepsilon = \frac{2\mu d\mu}{\sqrt{n^2 - (B + \mu^2)^2}},$$

dont l'intégrale, en représentant par ε_0 la constante arbitraire, prend la forme

$$B + \mu^2 = n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

de sorte que, si, dans cette équation, on remplace μ par sa valeur, on trouve

$$(10)' \quad 2\lambda \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0) - B}},$$

dont l'intégrale dépend de la fonction elliptique de première espèce. D'une autre part on a, par la nature même de l'hypothèse, la relation

$$d\varepsilon = 2\lambda d\rho,$$

de laquelle on déduit par intégration la nouvelle relation

$$(11)' \quad 2\lambda(\rho - \rho_0) = (\varepsilon - \varepsilon_0),$$

dans laquelle $2\lambda\rho_0 - \varepsilon_0$ est une nouvelle constante. Cette équation et l'équation (10) sont les équations élémentaires de la courbe C.

On déduit de la dernière, combinée avec la relation $ds = \rho d\varepsilon$, l'équation suivante :

$$s - s_0 = \lambda\rho^2,$$

qui exprime une des deux propriétés caractéristiques de la courbe.

Trièdre des axes mobiles. — La valeur de $\cos(\nu, x)$ est donnée par l'équation différentielle (10)', dans laquelle C est l'unité et a_1 , A_1 , B_1 , n_1 , ε_1 sont de nouvelles constantes, analogues à a , A, B, n , ε_0 , et correspondent à l'hypothèse C égal à l'unité; on aura

donc les deux équations

$$\cos(\nu, x) = \sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1} = \frac{1}{2\lambda} \frac{d\varepsilon}{d\omega},$$

desquelles on déduit, par la différentiation,

$$\frac{d \cos(\nu, x)}{d\omega} = \frac{n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)}{2\sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1}} \frac{d\varepsilon}{d\omega} = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

On a donc, en ayant égard aux équations analogues aux équations (10),

$$\cos(\rho, x) = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1), \quad \cos(\tau, x) = \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) + m,$$

m étant une nouvelle constante arbitraire.

Ces équations donnent la direction des axes mobiles en fonction de ε .

Coordonnées cartésiennes. — On déduit des équations précédentes les coordonnées x, y, z de la courbe C , lesquelles sont données par le type suivant :

$$x - \alpha = \int [m + \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1)] \rho_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\lambda} d\varepsilon,$$

et, comme l'intégration du second membre est possible, on a les coordonnées x, y, z de la courbe C en fonction explicite de ε .

Il est facile de voir que les coordonnées des courbes C_1 et C_2 se déduisent sans difficulté de ce qui précède.

8. *Les courbes C sont des hélices.* — Cette hypothèse correspond au second cas.

Second cas :

$$(13) \quad \psi = m = \text{const.}$$

L'équation (8) devient, a étant une constante,

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - m^2(\mu + a)^2;$$

on en déduit la suivante :

$$d\omega = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - m^2 a^2 - 2m^2 a \mu - (1 + m^2) \mu^2}}.$$

Or, si l'on pose, pour abréger, $1 + m^2 = k^2$, on obtient l'intégrale

$$k(\omega - \omega_0) = \arcsin \left(\sin = \frac{k^2 \mu + m^2 a}{\sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2}} \right),$$

et conséquemment l'équation différentielle

$$(14) \quad k^2 \frac{d\rho}{d\omega} = -m^2 a + \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0),$$

laquelle, lorsqu'on représente par ρ_0 la constante arbitraire, conduit par intégration à l'équation suivante :

$$(15) \quad k^2(\rho - \rho_0) = -m^2 a \omega - \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \cos k(\omega - \omega_0).$$

Si dans cette équation on remplace ρ par sa valeur $\frac{ds}{m d\omega}$, et qu'on intègre, on obtient la rectification de la courbe par la formule suivante, dans laquelle $k^2 s_0$ est la constante d'intégration :

$$k^2(s - m\rho_0\omega - s_0) = -\frac{1}{2}m^2 a \omega^2 - \frac{m}{k} \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0).$$

Les équations (15) et (13) sont les équations élémentaires de la courbe.

Direction de la tangente. — Si l'on représente par a_1, k_1, ω_1 , des nouvelles constantes arbitraires, on trouvera, d'après le numéro précédent, l'équation suivante :

$$\cos(\tau_1, x) = -\frac{m^2 a_1}{k_1^2} + \frac{1}{k_1} \sqrt{1 - \frac{m^2 a_1^2}{k_1^2}} \sin k_1(\omega - \omega_1),$$

qui donne la direction de la tangente τ_1 à la courbe C_1 par rapport aux trois axes fixes.

D'une autre part, si l'on a recours à la première des équations (2), on trouve la formule

$$(16) \quad \rho_1 = -\rho_0 + \frac{m^2 a}{k^2} \omega - \frac{m^2}{k} \sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}} \cos k(\omega - \omega_0),$$

qui donne le rayon de courbure de la courbe C_1 .

Coordonnées du point. — On déduit de ces formules les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1 , qui sont données

par le type suivant :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - \alpha_1 &= \int \left[\rho_0 - \frac{m^2 a}{k^2} \omega + \frac{m^2}{k} \sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}} \cos k(\omega - \omega_0) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{m^2 \alpha_1}{k_1^2} - \frac{1}{k_1} \sqrt{1 - \frac{m^2 \alpha_1^2}{k_1^2}} \sin k(\omega - \omega_0) \right] d\omega, \end{aligned} \right.$$

et, comme le second membre de ce type est intégrable, il en résulte que les coordonnées de la courbe C_1 sont exprimables en fonction explicite de ω .

9. Généralisation du problème. — Proposons-nous maintenant la question suivante, qui est la généralisation de celle que nous avons résolue :

PROBLÈME. — *Trouver les courbes dont les développantes et les développées par le plan sont semblables entre elles.*

Conservons les notations établies; on a les mêmes données que dans le problème résolu; seulement, la condition relative à l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 est remplacée par la condition que ces rayons sont dans un rapport constant, laquelle entraîne la condition que les rayons de torsion ν et ν_2 sont dans le même rapport. On a donc les équations

$$(18) \quad \rho_2 = n^2 \rho, \quad \nu_2 = n^2 \nu,$$

n^2 étant constant; la fonction ψ reste encore indéterminée.

Si l'on a recours aux équations (2), la première condition fournit l'équation différentielle suivante :

$$(3)' \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^3 \rho}{d\omega^3} + (1 + \psi^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d\rho}{d\omega} + (1 - n^2) \psi^2 \rho = 0,$$

qui est l'équation résolvante, puisque son intégration fait connaître ρ en fonction de ω et qu'elle donnera en même temps $\cos(\nu, x)$ en fonction de la même variable. Il suffira, en effet, de prendre la dérivée de ρ par rapport à ω et d'y faire n^2 égal à l'unité, en donnant aux constantes d'autres valeurs générales; cette dérivée représentera la valeur de $\cos(\nu, x)$, comme cela résulte de l'équation (8)''.

Soient maintenant R_0, R_1, R_2, R_3 quatre solutions particulières de l'équation (3)', et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation sera

$$\rho = \Sigma AR,$$

la somme Σ s'étendant toujours, suivant nos conventions, à toutes les valeurs du produit AR , lorsqu'on affecte successivement et simultanément les deux facteurs des indices 0, 1, 2, 3.

D'une autre part, si l'on représente par N_0, N_1, N_2, N_3 les valeurs de R_0, R_1, R_2, R_3 , lorsqu'on y fait n^2 égal à l'unité, et qu'on représente par B_0, B_1, B_2, B_3 quatre nouvelles constantes, on aura le type suivant relatif aux cosinus que ν fait avec les trois axes fixes,

$$\cos(\nu, x) = \Sigma B \frac{dN}{d\omega},$$

avec cette circonstance que $\frac{dN_0}{d\omega}$ est nul.

Coordonnées de la courbe C_1 . — Si l'on remonte à la première des équations (2), on aura l'équation

$$\rho_1 = - \Sigma A \left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2} \right),$$

et, conséquemment, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1 seront

$$x_1 - a_1 = - \int \left[\Sigma B \frac{dN}{d\omega} \right] \Sigma A \left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2} \right) d\omega.$$

On déterminera comme précédemment les coordonnées des courbes C et C_2 .

10. *Application aux hélices.* — Dans ce cas, on a

$$\psi = m = \text{const.};$$

l'équation (3)' devient

$$(3)'' \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} + (1 + m^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} + (1 - n^2) m^2 \rho = 0.$$

Si l'on pose $\rho = e^{\alpha\omega}$, α étant une constante, on a l'équation de condition

$$\alpha^4 + (1 + m^2) \alpha^2 + (1 - n^2) m^2 = 0,$$

et les valeurs de α sont les quatre racines de cette équation ; nous les représentons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Il y a deux cas à considérer, suivant que n^2 est positif ou négatif.

Dans le premier cas, la similitude des courbes C_2, C est directe ; or, dans ce même cas, suivant que n^2 est plus grand ou moindre que l'unité, deux racines seulement ou toutes les quatre sont imaginaires.

Soit $n^2 > 1$; en appelant λ la racine réelle positive, les quatre racines sont

$$\lambda, -\lambda, \sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1}, -\sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1};$$

l'intégrale générale sera donc

$$\rho = A_0 e^{\lambda\omega} + A_1 e^{-\lambda\omega} + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega.$$

Soit $n^2 < 1$; en appelant $\lambda_1 \sqrt{-1}$ une racine imaginaire, les quatre racines imaginaires seront

$$\lambda_1 \sqrt{-1}, -\lambda_1 \sqrt{-1}, (1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, -(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et l'intégrale générale sera

$$\begin{aligned} \rho = & A_0 \cos \lambda_1 \omega + A_1 \sin \lambda_1 \omega + A_2 \cos(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega \\ & + A_3 \sin(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega. \end{aligned}$$

Dans le second cas, la similitude des courbes C_2 et C est inverse ; mais, suivant que l'on a $(1-m^2)^2$ plus grand ou plus petit que $-4m^2n^2$, les quatre racines, qui sont dans les deux hypothèses imaginaires, se présentent sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{aligned} & \lambda \sqrt{-1}, -\lambda \sqrt{-1}, (1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, -(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \\ & a+b\sqrt{-1}, -a-b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, -a+b\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

de sorte que, dans la première hypothèse, on a

$$\rho = A_0 \cos \lambda\omega + A_1 \sin \lambda\omega + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+\lambda^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\omega,$$

et, dans la seconde,

$$\rho = (A_0 \cos b\omega + A_1 \sin b\omega) e^{a\omega} + (A_2 \cos b\omega + A_3 \sin b\omega) e^{-a\omega},$$

expression dans laquelle a et b sont faciles à déterminer.

En comparant les quatre expressions de ρ que nous venons d'obtenir, on voit qu'il n'y en a que trois distinctes de forme, suivant les valeurs assignées à n^2 . Dans tous les cas, les valeurs de ρ_1 se calculent sans difficulté et le problème s'achève comme au n° 8, puisque les coordonnées des courbes C, C_1, C_2 s'obtiennent explicitement en fonction de ω , indépendamment de tout signe d'intégration. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

11. *Intégrales premières.* — Reportons-nous à l'équation (8) du n° 4. Posons $\rho_2 = n^2 \rho$ et intégrons le premier terme par parties; le premier membre devient

$$- 2 n^2 \rho_1 \rho + 2 (n^2 - 1) \int \rho_1 d\rho,$$

et, en remplaçant ρ_1 par sa valeur donnée par la première des équations (2) sous le signe $\int$, il prend la forme suivante, lorsqu'on pratique l'intégration et qu'on représente par c_2 la constante arbitraire :

$$- 2 n^2 \rho_1 \rho - (n^2 - 1) \left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2} \right) + c_2.$$

D'après cela, l'équation (8) devient, après quelques réductions évidentes,

$$c^2 - n^2 (\rho + \rho_1)^2 = (1 - n^2) \rho_1^2 + n^2 \frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2 d\omega^2};$$

on a donc finalement l'équation

$$(19) \quad \psi = \frac{\frac{d}{d\omega} \left(\rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)}{\sqrt{c^2 - n^2 \left[\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \left(\frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2 \right] - (1 - n^2) \left(\rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2}},$$

qui est une équation différentielle du troisième ordre.

Si maintenant on pose, comme au n° 2, $\frac{d\rho}{d\omega} = \mu$, et qu'on multiplie les deux membres de cette équation par $2 d\mu$, on obtient l'équation transformée du second ordre

$$(19)' \quad 2 \psi d\mu = \frac{d \left(\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} \right)}{\sqrt{c^2 - n^2 \left(\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} \right) - (1 - n^2) \int \left(\mu + \frac{d^2 \mu}{d\omega^2} \right) d\omega}};$$

enfin, si l'on pose $\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} = u^2$, cette dernière prend la forme simple

$$(19)'' \quad \psi d\mu = \frac{u du}{\sqrt{c^2 - n^2 u^2 - (1 - n^2) \int \frac{d\omega}{d\mu} u du}}.$$

12. *Application.* — Cette dernière équation s'intègre de nouveau dans le cas où l'on a la relation

$$(20) \quad \frac{d\mu}{d\omega} = \lambda = \text{const.}$$

En effet, si l'on représente par c_1^2 la constante arbitraire provenant de l'intégration du dernier terme placé sous le radical, l'équation différentielle devient

$$\lambda d\epsilon = \frac{u du}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - \left(n^2 - \frac{n^2 - 1}{2\lambda}\right) u^2}}.$$

Si maintenant on pose $c^2 + c_1^2 = k^2$, qu'on représente par ϵ_0 la constante d'intégration et par h une nouvelle constante, on obtient l'équation

$$(21) \quad (\omega - \omega_0)^2 + \left(n^2 - \frac{n^2 - 1}{2\lambda}\right) (\epsilon - \epsilon_0)^2 = \frac{h^2}{\lambda^2},$$

ce qui prouve que la courbe appartient à la classe des lignes dont la caractéristique sphérique a pour équation entre les variables ω et ϵ l'équation d'une conique.

D'un autre côté, l'équation de condition donne

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right) = \lambda;$$

or, si l'on représente par λ_1 et λ_2 deux constantes arbitraires, et qu'on pratique deux intégrations successives, on trouve la relation

$$\rho = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2,$$

de sorte que la courbe C est définie d'une manière complète par les deux équations (20) et (21), qui sont ses équations naturelles.

Il est bon de remarquer que, si n^2 était égal à l'unité, la courbe C appartiendrait à la classe des cyclides, qui sont les développées par fil de la classe des hélices ⁽¹⁾.

13. *Conclusion.* — L'analyse dont nous venons de faire usage pour traiter la question qui fait l'objet de ce travail est susceptible d'applications nombreuses et a un caractère de généralité suffisante pour conduire à la solution complète de questions plus difficiles que la précédente, mais non moins intéressantes. C'est ainsi que l'on résoudra sans difficulté les questions suivantes de Géométrie curviligne :

1° *Trouver les intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont liées entre elles par cette condition que, lorsqu'on développe ces deux courbes sur les plans tangents à leurs surfaces osculatrices, on obtient deux courbes planes parallèles;*

2° *Trouver les intégrales des courbes de la classe des hélices telles que les rayons des sphères osculatrices soient dans un rapport constant avec les rayons de courbure du lieu des centres de ces sphères osculatrices;*

3° *Trouver les intégrales de la courbe C, dont le rayon de courbure est la projection, sur ce rayon, du rayon de la sphère osculatrice de la développante par le plan de la courbe C.*

Sur les méthodes d'approximation chez les anciens;
par M. L. RODET.

(Séance du 11 juillet 1879.)

J'ai besoin de faire quelques rectifications et d'ajouter quelques indications complémentaires à ma Note, présentée à la Société dans sa séance du 28 mars dernier et insérée au Tome VII du *Bulletin*, p. 98 et suiv.

⁽¹⁾ Voir notre *Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, p. 70.

C'était bien réellement la première fois que je rencontrais, ou, plus exactement, *remarquais* chez un auteur oriental le procédé d'approximation des racines carrés que j'ai découvert chez Al-Morouzi; mais je dois dire qu'il existe aussi chez d'autres auteurs de l'école arabe et que je ne l'y avais pas aperçu, parce qu'il n'y est pas donné aussi nettement que dans mon *Traité persan*. Je m'explique. En même temps qu'Al-Morouzi écrivait son Livre à Merv (1216), un Maure de Grenade, Ibn-al-Bannâ, enseignait les Mathématiques au Maroc (vers 1220). Dans son *Traité* intitulé le *Talkhys* ⁽¹⁾, il enseigne que

$$\text{Si } r \leq a, \text{ on doit faire } \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Si } r > a, \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

Le moyen d'approximation en question lui était donc connu; mais il ne divisait le reste par « le double de la racine plus un » que dans le cas où ce reste était supérieur à la racine trouvée. Il n'eût donc jamais écrit, comme Baudhâyana,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \epsilon,$$

puisque ici $r = 1$ est égal à la racine. Du reste, quand il avait fait usage de la formule en question, il savait trouver le deuxième terme correctif $\epsilon_2 = \frac{r'}{2a'}$.

Au xv^e siècle, un autre Arabe d'Espagne, Al-Qalçâdi, qui commenta les œuvres d'Ibn-al-Bannâ ⁽²⁾, établit la même distinction suivant les grandeurs relatives de la racine trouvée et du reste; seulement les formules qu'il donne dans ce cas sont

$$\text{Pour } r \leq a, \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Pour } r > a, \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r + 1}{2a + 2};$$

⁽¹⁾ Voir le *Talkhys* d'Ibn-al-Bannâ, traduit par A. Marre de Marin, dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*; Rome, 1865.

⁽²⁾ Voir la traduction de son *Traité d'Arithmétique*, publiée par Woepecke dans les mêmes *Atti de' Nuovi Lincei*; Rome, 1839.

enfin il obtient une approximation à deux termes correctifs en faisant

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

Cette manière d'évaluer les racines carrées avait déjà fait l'objet d'une Note de Woepcke, à la suite de son exposé des notations algébriques d'Al-Qalçâdi (*Journal asiatique*, octobre-novembre 1854); mais ce procédé diffère entièrement de celui qu'a dû suivre, comme je l'ai fait voir, Baudhâyana, car il donne

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3.4},$$

et non

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}.$$

C'est ici que j'ai une erreur à rectifier : j'ai cru pouvoir conclure que, de ce que le terme correctif $-\frac{1}{3.4.34}$ « est trop grand en valeur absolue, la série arrêtée à ce terme est de nouveau approchée *par défaut* ». Cette affirmation, énoncée *a priori*, est fausse, ainsi qu'il est facile de le vérifier de bien des manières. D'abord convertie en une fraction unique, l'expression devient $\frac{577}{408}$, dont le carré est $\frac{332929}{166464}$; or le double du dénominateur est seulement 332928. Si l'on veut encore, $\frac{577}{408}$ est la huitième réduite de la fraction continue qui exprime $\sqrt{2}$; elle est donc, comme réduite paire, approchée par excès. Enfin, si l'on continue l'opération comme je l'ai indiqué dans ma Note précitée, on trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} - \frac{1}{3.4.34.1154}.$$

Puisque j'ai eu à revenir sur ces questions d'approximation, je dois signaler une méthode applicable non-seulement à l'extraction de la racine carrée, mais à la recherche de la solution numérique d'une équation quelconque et que je crois être fort ancienne,

comme je le préciserai tout à l'heure. Elle est exposée et fréquemment appliquée dans un Ouvrage imprimé à Lyon, en 1520, sous le titre de *Larismethique de maistre Estienne de la Roche dict Villefranche natif de Lyon sus le Rosne* ⁽¹⁾, où elle est désignée par le nom de *Rigle de mediacion entre le plus et le moins*. Elle s'appuie sur ce principe, que La Roche exprime en ces termes à la suite de sa définition des fractions, ou, comme il dit, des « nombres routz » :

« Et doit on scauoir que le milieu de tous les nombres routz est $\frac{1}{2}$. Duquel naissent et saillent deux progressions naturelles desquelles lune progredist par augmentation comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$ Et procede in infinitum ne iamais ne pourra atteindre .1. entier. Et laultre progredist par diminution comme $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots$ Et procede aussi in infinitum et iamais ne sera euacuee iusques a .0. quelle ne soit tousiours quelque chose.... »

Pour ne pas trop allonger cette Note, je passe à la façon dont il se sert de ses deux progressions et de sa *règle de médiation* pour extraire la racine carrée de 6. Il a d'abord fait voir que « la racine quarree de .6. est vng certain nombre moyen entre .2. et .3. Et pour icelluy trouuer lon doit vser de la regle de mediation entre le plus et le moins.... Et prendre pour le premier moyen $2 \cdot \frac{1}{2}$. Qui multiplies en soy montent $.6 \cdot \frac{1}{4}$. Qui sont $\frac{1}{4}$. plus de 6. Et pourtant prandrns moins en procedant par la progression de diminution et essayerons si $.2 \cdot \frac{1}{3}$. multipliez en soy montent

(1) Cet Ouvrage est cité et sa méthode d'approximation signalée, mais en passant, dans un très-remarquable travail : *Das Rechnen im 16 Jahrhundert* de M. Treutlein, professeur au Gymnase de Karlsruhe, paru dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, premier fascicule (Leipzig, chez Teubner), 1877. La place me manque pour présenter ici une analyse de l'Ouvrage d'Estienne de la Roche; je me bornerai à en recommander vivement la lecture aux personnes qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques.

plus ou moins de .6. Or il est ainsi quilz montent .6. moins $\frac{5}{9}$.
 Maintenant nous auons trouue deux racines donc l'une fait plus
 et l'autre moins. Il nous conuient trouue vng nombre moyen entre
 $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{3}$ en adioustant numerateur avec numerateur et deno-
 minateur avec denominateur et en vient $2\frac{2}{5}$. Ores'essaye la racine
 en multipliant $2\frac{2}{5}$ en soy. Et trouueras .6. moins $\frac{6}{25}$. Comment
 donc trouuer vng aultre nombre moyen entre $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{2}{5}$ en
 adioustant comme dessus et lon aura $2\frac{3}{7}$ qui multipliez en soy
 montent .6. moins $\frac{5}{49}$. Et par ceste maniere peult proceder.... »

Et il termine son calcul, qu'il pousse jusqu'à $2\frac{881}{1960}$, par le
 Tableau résumé dont voici les premiers termes seulement, les
 seuls dont j'aie besoin :

Par $2\frac{1}{2}$	$\bar{p} - \frac{1}{4}$	Par $2\frac{13}{29}$	$\bar{m} - \frac{5}{841}$
• $2\frac{1}{3}$	$\bar{m} - \frac{5}{9}$	• $2\frac{22}{49}$	$\bar{m} - \frac{6}{2401}$
• $2\frac{2}{5}$	$\bar{m} - \frac{6}{25}$	• $2\frac{31}{69}$	$\bar{m} - \frac{5}{4761}$
• $2\frac{3}{7}$	$\bar{m} - \frac{5}{49}$	• $2\frac{40}{89}$	$\bar{m} - \frac{2}{7921}$
• $2\frac{4}{9}$	$\bar{m} - \frac{2}{81}$	• $2\frac{49}{109}$	$\bar{p} - \frac{3}{11881}$
• $2\frac{5}{11}$	$\bar{p} - \frac{3}{121}$	• $2\frac{89}{198}$	$p - \frac{1}{39204}$
• $2\frac{9}{20}$	$\bar{p} - \frac{1}{400}$		

Relevons dans ce Tableau les termes pour lesquels se produit
 une variation dans le sens de l'approximation, en plaçant en tête
 la valeur 2 écrite sous la forme $2 + \frac{0}{1}$; il résulte de la façon même
 dont nos nombres sont obtenus qu'ils ont, en réalité, la forme

suivante :

Par défaut :

Par excès :

$$\begin{array}{ll} 2 + \frac{0}{1}, & 2 + \frac{1}{2}, \\ 2 + \frac{4}{9} = 2 + \frac{0 + 4 \cdot 1}{1 + 4 \cdot 2}, & 2 + \frac{9}{20} = 2 + \frac{1 + 2 \cdot 4}{2 + 2 \cdot 9}, \\ 2 + \frac{40}{89} = 2 + \frac{4 + 4 \cdot 9}{9 + 4 \cdot 20}, & 2 + \frac{89}{198} = 2 + \frac{9 + 2 \cdot 40}{2 + 2 \cdot 89}. \end{array}$$

Or, si nous calculons les réduites successives de la valeur de $\sqrt{6}$ en fraction continue, nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}} \\ \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9} &= \frac{2 + 4 \cdot 5}{1 + 4 \cdot 9}, \quad \frac{49}{20} = \frac{5 + 2 \cdot 22}{2 + 2 \cdot 9}, \\ \frac{218}{89} &= \frac{22 + 4 \cdot 49}{9 + 4 \cdot 20}, \quad \frac{485}{198} = \frac{49 + 2 \cdot 218}{20 + 2 \cdot 89}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la « règle de médiation entre le plus et le moins » amène *par tâtonnement* et par un procédé fort simple, l'addition terme à terme de fractions, à *calculer toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche*.

Or, ce genre de calcul par tâtonnement a tout à fait mine égyptienne. En effet, j'ai fait remarquer dans mon analyse d'un *Manuel du Calculateur*, insérée au *Bulletin* (t. VI, p. 139), que Ahmesu, l'auteur de ce Livre curieux, pour faire une division, *faisait croître* par degrés insensibles le dividende jusqu'à obtenir un nombre égal au diviseur, c'est-à-dire cherchait par tâtonnement et approximations successives quels multiples et sous-multiples du diviseur égalaient le dividende. Mais, les Grecs ayant été sur bien des points les disciples des Égyptiens, d'autre part le procédé qu'ils suivaient pour extraire les racines carrées nous étant jusqu'ici demeuré inconnu, j'ai tout naturellement été conduit à chercher si quelques indices ne nous permettraient pas de leur attribuer l'usage, soit du

procédé d'Al-Morouzi et de Baudhâyana, soit de la « règle de mediacion » de La Roche. Voici quel a été le résultat de mes recherches.

Nous connaissons trois approximations de $\sqrt{3}$ ayant cours chez les Grecs.

Héron d'Alexandrie nous enseigne qu'on obtient la *cathète* d'un triangle équilatéral $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ « en retranchant du côté son dixième et son trentième ». Or

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = 1 - \frac{4}{30} = \frac{26}{30} = \frac{1}{2} \frac{26}{15}.$$

Donc, pour Héron, $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$.

Archimède, dans son Traité *Περὶ κύκλου μετρήσεως*, adopte deux valeurs approchées pour $\sqrt{3}$; dans la première Partie, lorsqu'il calcule le périmètre d'un polygone circonscrit au cercle, prenant pour point de départ le triangle formé par une tangente, le diamètre au point de contact et le prolongement d'un rayon faisant avec le diamètre $\frac{1}{3}$ d'angle droit, triangle dont les côtés sont entre eux comme $1:2:\sqrt{3}$, il leur donne pour valeurs 153:306:265, prenant ainsi $\sqrt{3} = \frac{265}{153}$ *par défaut*.

Plus loin, et pour calculer son polygone inscrit, il trace dans un demi-cercle un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le diamètre et son grand côté faisant avec ce diamètre un angle de $\frac{1}{3}$ de droit. Cette fois, il donne aux côtés les valeurs 780:1560:1351, faisant $\sqrt{3} = \frac{1351}{780}$ *par excès*.

Si nous n'avions que la première valeur, celle de Héron, et cette dernière, nous pourrions être tentés de croire qu'elles sont obtenues par le procédé de Baudhâyana. En effet, on verra facilement que, d'après cette méthode,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52},$$

dont les trois premiers termes font $\frac{26}{15}$, les quatre $\frac{1351}{780}$.

Mais l'emploi de la valeur intermédiaire $\frac{265}{153}$ s'oppose à cette explication, et force nous est alors d'admettre qu'Archimède avait procédé « par médiation entre le plus et le moins ». En effet, $\frac{265}{153}$ est la neuvième réduite de la fraction continue égale à $\sqrt{3}$, dont $\frac{26}{15}$ est la sixième et $\frac{1351}{780}$ la douzième réduite, et nous venons de voir que la « règle de médiation » amène à trouver les réduites successives de la fraction continue. On comprend en outre pourquoi Eutocius, révisant les calculs d'Archimède, n'a eu d'autre moyen de démontrer l'exactitude des racines extraites que d'en faire le carré : c'était seulement ainsi qu'on arrivait à déterminer leur valeur.

Je crois de là pouvoir conclure que la *règle de médiation*, telle que je l'ai exposée d'après La Roche, a dû être pratiquée très-anciennement au moins par les Grecs, peut-être par les Égyptiens, et a dû pendant longtemps former la seule méthode d'approximation connue et pratiquée par les calculateurs anciens, et, à bien prendre, elle n'est pas plus mauvaise assurément que la méthode de substitution, à l'inconnue d'une équation, de nombres variant par fractions décimales, seul procédé que nous ayons d'obtenir une valeur approchée de la racine de cette équation si elle est de degré supérieur au second.

Je ne puis pas m'empêcher, malgré la longueur de cette Note, de citer, en terminant, les réflexions de Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 110) au sujet de ces racines carrées d'Archimède :

« Donc, suivant toute vraisemblance, les Grecs n'avaient pas de méthode définie pour, étant donné dans le système numéral ordinaire un nombre qui n'est pas un carré parfait, en extraire la racine carrée irrationnelle. Pourtant, la méthode que Théon applique aux nombres exprimés en fractions sexagésimales pouvait, comme nous le verrons plus loin, s'appliquer également au système décimal des Grecs; mais l'opération, pour des nombres un peu grands, serait devenue longue et difficile.... Il ne reste donc plus qu'une supposition possible : c'est que les anciens ont trouvé leurs racines par tâtonnement et divination, *ce que semblent indiquer en particulier les preuves par multiplication d'Eutocius*. Le nombre entier le

plus approché par défaut (*die zunächst kleinere ganze Zahl*) qui répondait à la racine cherchée pouvait être facilement pris dans une *Table des carrés*, et la preuve que des Tables de ce genre, destinées à faciliter leurs calculs si pénibles, ne leur étaient pas étrangères, c'est la Table de multiplication qui se trouve dans Nicomache. »

Je n'ai pu m'empêcher de citer cette nouvelle preuve du génie pénétrant de Nesselmann, qui fait regretter à chaque instant sa mort prématurée, en même temps que l'imperfection des documents qu'il avait à sa disposition, et la confiance dont il a fait preuve vis-à-vis d'éditeurs qui ne s'attendaient pas assurément à ce qu'on analysât, jusqu'à y chercher des détails aussi minutieux, la publication qu'ils faisaient dans un tout autre but du texte d'anciens auteurs. En ce qui concerne particulièrement les Tables de carrés destinées à alléger les calculs pénibles, l'hypothèse de Nesselmann a reçu, depuis l'époque où il écrivait (1842), une confirmation éclatante par la découverte de semblables Tables de carrés et de cubes sur les briques de la Bibliothèque de Sardanapale IV à Babylone. Si les Chaldéens possédaient ces Tables, *a fortiori* les Grecs, leurs disciples et leurs héritiers en plus d'un cas, devaient-ils les avoir imitées et étendues.

Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre;
par M. N. ALEXÉEFF.

(Séance du 25 juillet 1879.)

C'est à l'occasion de l'intéressante Communication de M. Rodet sur les moyens qu'avaient les anciens pour calculer la racine carrée d'un nombre, que j'ose exprimer mon opinion sur le même sujet. Les anciens connaissaient la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de deux nombres, et ils savaient aussi que la moyenne géométrique, c'est-à-dire la racine carrée du produit de ces deux nombres, se trouve entre ces deux moyennes. Ils pouvaient ainsi calculer de proche en proche la racine carrée en prenant les moyennes consécutives. Mais, n'ayant pas les maté-

riaux nécessaires pour faire valoir mon opinion, je la donne ici comme hypothèse, et, dans la Communication qui suit, je m'occupe seulement des résultats qu'on peut tirer de la méthode indiquée, pour calculer la racine carrée.

Soit à extraire la racine carrée d'un nombre N ; je décompose ce nombre en ses deux facteurs a et b ; lorsque N est premier, l'un des facteurs $a = N$ et l'autre $b = 1$. Si le nombre N n'est pas un carré parfait, on peut poser $a > b$.

La première approximation sera exprimée par deux inégalités

$$b < \sqrt{N} < a,$$

la seconde par les deux suivantes :

$$\frac{2N}{a+b} < \sqrt{N} < \frac{a+b}{2}.$$

Posons

$$\frac{a+b}{2} = a_1, \quad \frac{2N}{a+b} = b_1;$$

l'approximation suivante est

$$\frac{2N}{a_1+b_1} < \sqrt{N} < \frac{a_1+b_1}{2}.$$

Posons

$$\frac{a_1+b_1}{2} = a_2, \quad \frac{2N}{a_1+b_1} = b_2,$$

et procédons de la même manière pour calculer a_3 , b_3 , et ainsi de suite. Il est facile de voir que

$$b < b_1 < b_2 < \sqrt{N} < a_2 < a_1 < a,$$

c'est-à-dire que, à chaque opération nouvelle, on s'approche de plus en plus de la valeur de la racine. Maintenant, si l'on désigne par P_n le numérateur et par Q_n le dénominateur de la fraction a_n , on a

$$a_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{NQ_{n-1}}{P_{n-1}}}{2} = \frac{P_{n-1}^2 + NQ_{n-1}^2}{2P_{n-1}Q_{n-1}}.$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1}^2 + NQ_{n-1}^2, \\ Q_n &= 2P_{n-1}Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Ces deux équations exprimeront la loi que suivent les nombres P et Q. La différence des deux valeurs approchées a_n et b_n , que nous désignerons par D_n , est exprimée par l'équation

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{NQ_n}{P_n} = \frac{P_n^2 - NQ_n^2}{P_n Q_n}.$$

Nous désignerons le numérateur de cette fraction par Δ_n ; si l'on remplace, dans l'expression de Δ_n , P_n et Q_n par leurs valeurs en P_{n-1} et Q_{n-1} , on a

$$\Delta_n = [P_{n-1}^2 - NQ_{n-1}^2]^2.$$

En continuant à abaisser les indices de P et de Q, on parviendra à cette équation :

$$\Delta_n = [P_1^2 - NQ_1^2]^{2^{n-1}}.$$

Mais $P_1 = a + b$, $Q_1 = 2$; donc

$$\Delta_n = (a - b)^{2^n}.$$

Nous aurons, pour la différence D_n ,

$$D_n = \frac{(a - b)^{2^n}}{P_n Q_n} = \frac{(a - b)^{2^n}}{2^n P_n P_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 P_1}.$$

Quels que soient le nombre N et les deux facteurs a et b , cette différence peut devenir moindre que toute quantité donnée. En effet, on a

$$D_{n-1} = \frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{2^{n-1} P_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 P_1};$$

donc

$$D_n = \frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{2 P_n} D_{n-1}.$$

Mais de l'équation $P_n^2 - NQ_n^2 = (a - b)^{2^n}$ on tire

$$\left[\frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{P_n} \right]^2 = 1 - N \left(\frac{Q_n}{P_n} \right)^2,$$

d'où il suit que $\frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{P_n} < 1$, c'est-à-dire

$$D_n < \frac{D_{n-1}}{2} < \frac{D_{n-2}}{4} < \frac{D_{n-3}}{6} < \dots < \frac{D_1}{2^{n-1}}, \quad \text{ou} \quad D_n < \frac{(a - b)^2}{2^{n-1}}.$$

Cette inégalité montre que la proposition avancée est vraie.

Pour les petits nombres N , tels que $N = 2, N = 3, \dots$, l'approximation sera très-grande, même pour la fraction $\frac{P_1}{Q_1}$. Pour les grands nombres, et lorsque la différence ne peut être rendue par le choix des facteurs a et b assez petite, l'approximation n'est pas si forte; néanmoins on parviendra toujours à une approximation qu'on veut avoir.

L'équation

$$P_n^2 - NQ_n^2 = (a - b)^{2^n}$$

est remarquable, parce qu'elle donne les solutions entières de l'équation

$$x^2 - Ny^2 = z^2.$$

On voit que

$$x = P_n, \quad y = Q_n, \quad z = (a - b)^{2^{n-1}}.$$

On peut remarquer que la même équation donne les solutions rationnelles de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$:

$$x = \frac{P_n}{(a - b)^{2^{n-1}}}, \quad y = \frac{Q_n}{(a - b)^{2^{n-1}}}.$$

Ces solutions deviennent entières lorsque le nombre $N = n(n + 1)$.

La considération des nombres P et Q pourrait conduire à la résolution de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ en nombres entiers dans d'autres cas; mais, puisque ce problème est résolu depuis longtemps, je trouve l'exposition de ces cas peu instructive.

Les recherches sur les nombres P_n et Q_n m'ont conduit aux formules suivantes, que je donne ici sans la démonstration, parce qu'elle est très-facile :

$$(1) \quad P_n = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2^n} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2^n}}{2}, \quad Q_n = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2^n} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2^n}}{2\sqrt{N}},$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \left(1 + \frac{a - b}{P_1}\right) \left[1 + \frac{(a - b)^{2^2}}{P_2}\right] \left[1 + \frac{(a - b)^{2^3}}{P_3}\right] \left[1 + \frac{(a - b)^{2^4}}{P_4}\right] \dots$$

Les expressions (1) peuvent être développées, et alors elles ne contiennent plus les radicaux; ainsi :

Pour $n = 1$, on a

$$P_1 = a + b, \quad Q_1 = 2.$$

Pour $n = 2$,

$$P_2 = a^2 + b^2 + (2^2)_2 N, \quad Q_2 = 4(a + b).$$

Pour $n = 3$,

$$P_3 = a^3 + b^3 + (2^3)_2 (a^2 + b^2) N + (2^3)_4 N^2, \\ Q_3 = (2^3)_1 (a^3 + b^3) + (2^3)_3 (a + b).$$

Pour $n = 4$,

$$P_4 = a^4 + b^4 + (2^4)_2 (a^3 + b^3) N + (2^4)_4 (a^2 + b^2) N^2 \\ + (2^4)_6 (a^2 + b^2) N^3 + (2^4)_8 N^4, \\ Q_4 = (2^4)_1 (a^4 + b^4) + (2^4)_3 (a^3 + b^3) N \\ + (2^4)_5 (a^3 + b^3) N^2 + (2^4)_7 (a + b) N^3,$$

et ainsi de suite.

Par la notation $(2^n)_k$, j'exprime le coefficient binomial du nombre (2^n) de l'ordre k .

Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. L. RODET.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Diophante et les Arabes, particulièrement Al-Karkhi (voir WOEPCKE, *Extraits du Fakhri*; Paris, 1863), ont traité une quantité considérable de problèmes indéterminés du premier degré; mais, comme le remarque Woepcke dans le travail précité (p. 10, note **), ils font disparaître immédiatement l'indétermination en donnant à l'une des deux variables une valeur arbitraire. Seulement ils n'ont pas dit comment ils choisissaient cette valeur arbitraire de façon à obtenir un nombre entier pour la seconde variable.

Estienne de la Roche, le mathématicien lyonnais à qui j'ai déjà emprunté la « Règle de mediacion entre le plus et le moins » (voir séance du 11 juillet 1879), enseigne un procédé *par routine*, qui pourrait bien encore être celui qu'ont employé les Grecs et les Arabes pour trouver cette solution « arbitraire », mais choisie. Pour ne pas allonger cette Note, je citerai seulement un exemple

numérique, supprimant l'énoncé de la règle, lequel est assez peu clair, parce que La Roche complique sa question en s'attaquant au système

$$\begin{aligned}x + y + z &= a, \\ mx + ny + pz &= b\end{aligned}$$

et qu'il lui faut alors éliminer au préalable sa troisième inconnue z . Voici, du reste, son texte tel que nous le lisons au folio 28 :

« EXEMPLE. — Trouues troys nombres qui adioustes ensemble fassent .60. Et que multipliez le premier par .3. le second par 2. et le tiers par $\frac{1}{2}$. les trois multiplications adioustees ensemble facent .60. »

Pour éviter toute confusion entre ces deux nombres 60 et permettre aux lecteurs de mieux suivre l'opération, je vais indiquer entre parenthèses, après chaque nombre, sa signification algébrique, en me reportant aux deux équations ci-dessus.

« RESPONSE. — Multiplie .60.(a) par le moindre des troys nombres multipliers qui est $\frac{1}{2} \cdot (p)$ et auras .30.(ap) qui leuez de .60.(b) restent .30.(b — ap). Puy soit soustrait celluy $\frac{1}{2}$ des aultres deux multipliers. cest ascauoir .3.(m) et .2.(n). Et restent $.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m - p)$ et $.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n - p)$. Ores de .30.(b — ap) conuient faire deux parties desquelles l'une se puisse entiere-ment partir par $.2 \cdot \frac{1}{2}$ et l'autre par $.1 \cdot \frac{1}{2}$, sans quil reste aulcune chose. Mais pour eüter nombre rout faut tout reduire en $\frac{1}{2}$. cest ascauoir .30. qui est a partir. et $.2 \cdot \frac{1}{2}$ et $.1 \cdot \frac{1}{2}$ qui sont les par-teurs. Et trouueras .60. pour le nombre a partir. et .5. et .3. pour les parteurs. »

Nous voilà donc ramenés à résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$5x + 3y = 60.$$

« Ores de .60. faitz deux parties telles que l'une se puisse entierement partir par .5. et l'autre par .3. Et pour ce faire partis .60. par le maieur nombre qui est .5. et en vient .12. ou quotiens. Mais pour ce quil ne resteroit riens pour le moyen nombre il faut mettre moins de .12. ou quotiens affin quil reste quelque chose pour partir au moyen nombre. Or posons qu'on mette .11. ou quotiens. Et par ainsi il resteront .5. a partir qui ne se peuuent partir par .3. qui est le moyen nombre. Par quoy fauldra mettre .10. ou quotiens. et resteront .10. a partir qui pareillement ne se peuuent partir par .3. entierement. Et ainsi donc fauldra mettre .9. ou quotiens. et resteront .15. a partir qui se peuuent bien partir par .3. et en vient .5. ou quotiens.... »

Ainsi $x = 9$, $y = 5$, et, par suite, $z = 46$.

« Ou aultrement de .60. qui est le nombre a partir lyeue le plus grand nombre qui est .5. tant de foiz que la reste se puisse partir entierement par .3. Et premierement lyeue .5. vgne fois de .60. et resteront .55. qui ne se peuuent partir par .3. Et pour ce lyeue deux foys .5. de .60. et resteront .50. qui pareillement ne se peuuent partir par .3. Et pour ce donc lyeues .3. foys .5. de .60. et resteront .45. qui se peuuent partir par .3. Et as ainsi diuise .60. en deux parties telles que l'une cest ascauoir .15. se peult partir entierement par .5. et l'autre cest ascauoir .45. se peult partir entierement par .3. »

L'auteur en conclut $x = 3$, $y = 15$, $z = 42$. Il ajoute :

« Et ainsi cest rayson et les semblables qui se font par ceste regle ont plusieurs responces et tant que lon veult. Par quoy appert que ceste regle est science de petite extime. »

Le problème n'est pas toujours possible :

« Et sil aduenoit que la dicte reste mise a part (c'est-à-dire $m - ap$ dans le problème à trois inconnues) ne se peut mettre en deux parties telles que quant on lauroit parti par le nombre de la maieur partie gardée a part ($m - p$). Que ce qui resteroit ne se pouroit partir entierement par le nombre de la moyenne partie aussi gardée a part ($n - p$). Ce seroit signe que icelle rayson (problème) seroit impossible en nombres entiers. »

La Roche donne ici pour exemple

$$x + y + z = 20,$$

$$5x + 2y + \frac{1}{2}z = 20,$$

amenant à

$$9x + 3y = 20.$$

Or ici 9 et 3 ont un facteur commun qui ne divise pas 20; le problème est donc réellement impossible.

Tout le monde n'a pas été du même avis qu'Estienne de la Roche au sujet de l'importance des *raysons* qui se traitent par ce procédé; en particulier, les mathématiciens de l'Inde ont tenu si peu cette question en *petite estime*, que Brahmagupta a donné à son Chapitre entier sur l'Algèbre le nom de l'opération par laquelle il résolvait $ax + by = 1$; mais cette réflexion n'est que secondaire. Ce sur quoi je désire appeler l'attention pour le moment, c'est la simplicité tout enfantine du procédé, qui, après tout, n'est pas beaucoup plus mauvais qu'un autre, lorsqu'il s'agit d'un problème numérique donné. Il a même l'avantage sur le procédé du plus grand commun diviseur ou des fractions continues, le seul qu'on enseigne chez nous, d'être beaucoup plus court et de conduire à des calculs moins longs. Il est même plus court encore que le procédé des congruences, fort élégant pourtant, et que je m'étonne de ne pas voir enseigner dans nos cours élémentaires : car, plus scientifique que les tâtonnements de La Roche et fournissant *toutes* les solutions de la question, cette méthode des congruences, qui a le mérite de passer par les mêmes calculs que s'il s'agissait de résoudre une équation, a l'avantage d'être très-rapide et de conduire aussi vite et aussi infailliblement au résultat que le traitement des équations auquel je viens de la comparer.

Calcul d'un déterminant; par M. H. LEMONNIER.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Soit à calculer le déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace chaque terme de la dernière colonne par la somme des termes de la ligne dont il fait partie, il vient

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & 1 \end{vmatrix},$$

ou, en retranchant successivement chaque colonne de la suivante jusqu'à l'avant-dernière,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Faisant la même opération pour les lignes,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & . & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & . & \dots & -n & n \\ 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & . & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$

Soit à calculer de même

$$N_{n,p} = \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n \\ p+2 & p+3 & \dots & p+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-1 \end{vmatrix}.$$

Les mêmes opérations donnent

$$N_{n,p} = \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n-1 & 1 \\ p+2 & p+3 & \dots & p+n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & . & . & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$



On déduit de là

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n \left[n \frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-1}.$$

Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν ; par M. G. FOURET.

(Séance du 27 juin 1879.)

I. — Généralités.

1. Avant d'aborder la question qui fait l'objet spécial de cette Note, je crois devoir rappeler quelques notions que j'ai déjà exposées antérieurement. Dans un précédent Mémoire (1), j'ai donné la forme générale de l'équation différentielle du premier ordre à deux variables, qui définit un *système* de courbes planes satisfaisant à cette double condition, qu'il y ait un nombre déterminé μ de branches du système passant par un point quelconque du plan, et un nombre également déterminé ν de ces branches tangentes à une droite prise arbitrairement.

L'équation différentielle la plus générale d'un pareil système peut s'écrire

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & R \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^\mu + \left(S_0 \frac{dy}{dx} + S_1 \right) \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^{\mu-1} + \dots \\ & + \left[V_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\nu-1} + V_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\nu-2} + \dots + V_{\nu-1} \right] \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) \\ & + P_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^\nu + P_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\nu-1} + \dots + P_\nu = 0, \end{aligned} \right.$$

en désignant par les lettres R, S, ..., V des polynômes *homogènes*

(1) *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, etc. (Bulletin, t. II, année 1874, p. 72).*

de degré ν en x et y , et par les lettres P des polynômes *complets* également de degré ν en x et y .

Les deux nombres μ et ν caractérisent l'équation différentielle, de la même manière qu'une équation algébrique ordinaire est caractérisée par son degré. Ils peuvent servir de base à une classification rationnelle des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

2. Les cas où l'une des deux caractéristiques est égale à l'unité présentent des particularités intéressantes. Si l'on suppose, par exemple, $\mu = 1$, l'équation (1) devient

$$(2) \quad L \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - M \frac{dy}{dx} + N = 0,$$

dans laquelle L , M et N désignent des polynômes de degré ν en x et y , dont le premier est réduit à ses termes du plus haut degré, les deux autres étant complets.

On voit immédiatement sur l'équation (2) qu'il existe dans le plan un certain nombre de points pour lesquels la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée. Ils sont fournis par l'intersection des deux courbes

$$(3) \quad Lx - M = 0, \quad Ly - N = 0.$$

Ces courbes, toutes les deux de degré $\nu + 1$, ont $(\nu + 1)^2$ points communs, dont ν sont à l'infini sur les ν directions données par l'équation

$$L = 0;$$

mais il est facile de voir que, pour ces ν points à l'infini, l'indétermination de $\frac{dy}{dx}$ n'est qu'apparente : en effet, pour avoir d'une manière générale la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à un système de valeurs infinies de x et de y , on a le droit de négliger dans l'équation (2) les termes de degré supérieur à $\nu + 1$ par rapport à x et y , c'est-à-dire tous les termes des polynômes M et N , et l'on obtient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Le nombre des points pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé se réduit donc à $(\nu + 1)^2 - \nu = \nu^2 + \nu + 1$. De là le théorème suivant :

Dans un système général $(1, \nu)$ de courbes planes, il existe $\nu^2 + \nu + 1$ points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée ⁽¹⁾.

3. Ces points pourront être, dans certains cas, des points de croisement de toutes les courbes du système. Ils comprendront également les points multiples et singuliers de ces courbes, si elles en possèdent; car, pour ces points, $\frac{dy}{dx}$ a évidemment plus d'une valeur, et, par suite, son expression doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile de démontrer qu'en général un point, pour lequel $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé, est un *point asymptotique*

En effet, prenons l'un de ces points O pour origine des coordonnées; en résolvant l'équation (1) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on en tire une expression telle que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + cx^2 + \dots}{a'x + b'y + c'x^2 + \dots}.$$

Si x et y sont les coordonnées d'un point m infiniment voisin de l'origine, les termes de degré supérieur en x et y deviennent des infiniment petits négligeables, et l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{a'x + b'y};$$

(¹) J'ai déjà énoncé antérieurement ce théorème dans une Note *Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVI, p. 586). Voir également le Mémoire déjà cité de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 82). Ce théorème n'est d'ailleurs, sous une forme un peu différente, que le corrélatif d'un théorème sur les connexes [LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch* (Ersten Bandes, zweiter Theil, p. 1001)].

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y},$$

ou bien, en désignant par α l'inclinaison sur Ox de la tangente à la branche de courbe qui passe en m ,

$$(4) \quad \tan \alpha - \tan \widehat{mOx} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y}.$$

Or, dans le cas où la branche considérée passerait effectivement par le point O , les angles α et $\widehat{mOx}$ différeraient d'un infiniment petit, et il en serait de même de leurs tangentes. C'est précisément, comme le montre la relation (4), ce qui n'a pas lieu en général, c'est-à-dire lorsque les coefficients a, b, a', b' sont quelconques et indépendants les uns des autres. Le point O et les points analogues sont donc bien généralement des *points asymptotiques*.

On peut remarquer toutefois qu'il existe pour chacun de ces points deux branches réelles ou imaginaires qui y passent effectivement : on obtient les directions tangentielles de ces branches, en égalant à zéro le numérateur du second membre de la relation (4). Cette dernière remarque a déjà été faite par M. Darboux, dans son *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* ⁽¹⁾. L'étude des singularités de ces points ayant été traitée par ce savant géomètre, nous n'y insisterons pas davantage : notre seul but était d'établir que ces points sont, en général, des points asymptotiques, fait que nous avons déjà signalé précédemment, mais sans le démontrer ⁽²⁾.

4. Parmi les systèmes définis par une équation telle que (2), se trouvent évidemment compris les faisceaux de courbes algébriques planes, puisque, comme on le sait, par un point quelconque du plan il passe une courbe d'un pareil faisceau, et une seule. Considérons un faisceau de courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre, assujetties à la

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2^e série, t. II, p. 121.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 581.

condition de passer par $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points donnés, et ayant par suite m^2 points communs appelés *points fondamentaux* du faisceau. On sait, d'après un théorème bien connu, qu'il existe $2(m-1)$ courbes de ce faisceau tangentes à une droite quelconque du plan; on a, par suite,

$$\nu = 2(m-1).$$

Le nombre des points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation différentielle du faisceau est indéterminé, est par suite égal à

$$4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1 = 4m^2 - 6m + 3.$$

Si de ce nombre nous déduisons les m^2 points fondamentaux qui s'y trouvent compris, le nombre restant $3m^2 - 6m + 3 = 3(m-1)^2$ sera manifestement celui des points doubles des courbes du faisceau. On retrouve ainsi un résultat connu.

5. Par une extension qui paraîtra toute naturelle, nous dirons que les courbes, en général transcendentes, définies par l'équation (2), forment un *faisceau ponctuel*, ou, plus simplement, un *faisceau*, de caractéristique ν . Nous donnerons aussi un nom aux $\nu^2 + \nu + 1$ points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation (2) est indéterminé : nous les appellerons les *points principaux* du faisceau. Cette dénomination nous semble préférable à celle de *points fondamentaux* que nous avons employée dans une Note précédente ⁽¹⁾, parce que, dans le cas des faisceaux de courbes algébriques, comme on l'a vu plus haut, les points en question comprennent, outre les points qu'on a l'habitude d'appeler *fondamentaux*, les points doubles et en général tous les points singuliers des courbes du faisceau. C'est pour une raison analogue que nous éviterons de nous servir de l'expression de *points singuliers*, par laquelle M. Darboux désigne ces points. Il nous paraît plus rationnel de réserver la qualification de *singuliers*, pour les points principaux résultant de la coïncidence de deux ou plusieurs points princi-

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 585.

paux ordinaires. En adoptant ces dénominations, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉOREME. — *Dans le plan d'un faisceau ponctuel de courbes planes, de caractéristique ν , il existe $\nu^2 + \nu + 1$ points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée. Ces points sont, en général, des points asymptotiques communs à toutes les courbes du faisceau, et, dans certains cas, des points de croisement de ces courbes. Ils comprennent les points singuliers de ces mêmes courbes, quand il en existe.*

II. — Faisceaux à point principal multiple.

6. Points principaux multiples et singuliers. — Il peut arriver, dans certains cas, que deux ou plusieurs points principaux se superposent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que les courbes (3) aient en commun un point qui soit multiple au moins pour l'une d'elles. Si les deux courbes (3) ont un point d'intersection multiple d'ordre h pour l'une, d'ordre k pour l'autre, ce point sera, comme on le voit immédiatement, un point principal multiple d'ordre hk du faisceau.

Considérons maintenant la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe I à toutes les courbes du faisceau. On forme immédiatement l'équation de ce lieu, que nous avons déjà eu l'occasion de considérer dans une Note précédente ⁽¹⁾, sous le nom d'*indicatrice-point* du système ou du faisceau. Il suffit de remplacer dans l'équation différentielle (2) $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, α et β désignant respectivement l' x et l' y du point I . On obtient ainsi l'équation

$$(5) \quad L(\beta.r - \alpha.y) + My - Nx - M\beta + N\alpha = 0.$$

Cette équation est de degré $\nu + 1$; elle est vérifiée pour $x = \alpha, y = \beta$, et pour les coordonnées de chacun des points fondamentaux. Si, en outre, on suppose que les deux courbes (3) aient en commun un point multiple, d'ordre k pour chacune d'elles, et que ce point ait été pris pour origine des coordonnées, les termes de degré inférieur

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 130.

à k manqueront à la fois dans M et dans N , et, par suite, dans l'équation (5) : d'où l'on conclut que l'indicatrice-point a pour point multiple d'ordre k le point principal multiple d'ordre k^2 , qui coïncide avec l'origine des coordonnées. On peut, par suite, énoncer le théorème suivant :

Le lieu des points de contact des tangentes, menées par un point fixe I , à toutes les courbes d'un faisceau de caractéristique ν , est une courbe d'ordre $\nu + 1$, qui passe par le point I , et par les points principaux du faisceau. Un point principal multiple d'ordre k^2 est un point multiple d'ordre k du lieu ⁽¹⁾.

On peut remarquer que les diverses singularités que pourra présenter un point principal multiple seront dans une corrélation intime avec les singularités de ce même point considéré comme appartenant à une indicatrice-point quelconque. Parmi ces indicatrices, il suffira même de considérer celles qui correspondent à des points I situés à l'infini.

7. Soit maintenant une droite D quelconque. En chacun des points de cette droite passe une courbe du faisceau et une seule. Menons la tangente en ce point à la courbe qui y passe : l'enveloppe de ces tangentes est une courbe de classe $\nu + 1$, ayant pour tangente multiple d'ordre ν la droite D . Cela résulte immédiatement de ce que par chaque point de D ne passe qu'une de ces tangentes, et qu'il existe ν branches tangentes à D . On peut aussi faire voir que par un point quelconque I du plan on ne peut mener que $\nu + 1$ tangentes à l'enveloppe considérée. En effet, l'indicatrice-point relative au point I , qui est de degré $\nu + 1$, coupe la droite D en $\nu + 1$ points qui sont tels, que les tangentes en ces points, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en I . Nous avons déjà appelé précédemment l'enveloppe considérée l'*indicatrice-droite* relative à D .

Supposons maintenant que la droite D , au lieu d'être quelconque, passe par un point principal O du faisceau, multiple d'ordre k^2 . Alors l'indicatrice-point relative au point I a un point

(¹) On démontre encore facilement que le degré du même lieu se réduit à $\nu - k + 1$, lorsque le point I coïncide avec un point principal multiple d'ordre k^2 .

multiple d'ordre k en O ; elle ne rencontre plus la droite D qu'en $\nu - k + 1$ points en dehors de O . L'indicatrice-droite relative à D n'est plus, par suite, que d'une classe égale à $\nu - k + 1$, et la droite D n'est plus tangente multiple que de l'ordre $\nu - k$. On a donc le résultat suivant :

L'enveloppe des tangentes, aux divers points d'une droite D , aux branches d'un faisceau de caractéristique ν qui passent par ces points, est une courbe de classe $\nu + 1$, qui admet pour tangente multiple d'ordre ν la droite D .

Dans le cas où D passe par un point principal multiple d'ordre k^2 , la classe de l'enveloppe se réduit à $\nu - k + 1$, et la droite D n'est plus qu'une tangente multiple d'ordre $\nu - k$.

Si l'on suppose, en particulier, que k soit égal à ν , la classe de l'indicatrice-droite, relative à une droite passant par un point principal multiple d'ordre ν^2 , est égale à l'unité, c'est-à-dire que cette indicatrice se réduit à un point. De là ce théorème :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un faisceau de caractéristique ν possède un point principal multiple d'ordre ν^2 , toute droite passant par ce point est telle, que les tangentes aux courbes du faisceau, aux points où elles rencontrent la droite, concourent en un même point.*

8. Nous allons démontrer cette dernière propriété directement par le calcul.

A cet effet, prenons pour origine des coordonnées le point multiple d'ordre ν ; d'après une remarque faite précédemment (6), les polynômes M et N ne contiendront que des termes de degré ν , de même que L .

En posant

$$(6) \quad y = tx,$$

on peut, par suite, écrire

$$(7) \quad L = Ax^\nu, \quad M = Bx^\nu, \quad N = Cx^\nu,$$

A, B, C désignant des fonctions entières, de degré ν , de t .

L'équation (2), après ces substitutions, devient

$$(8) \quad Ax \left(\frac{dy}{dx} - t \right) - B \frac{dy}{dx} + C = 0.$$

D'autre part, l'équation de la tangente, en un point quelconque (x, y) , à la courbe du faisceau qui y passe, est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si nous supposons que le point (x, y) soit pris sur la droite (6), nous pouvons remplacer dans l'équation précédente y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (8). L'équation de la tangente se met alors sous la forme

$$(9) \quad (Atx - C)X - (Ax - B)Y - x(Bt - C) = 0.$$

Cette équation contient un paramètre variable x , au premier degré : d'où l'on conclut que la droite qu'elle représente passe par un point fixe, ce qui est le résultat déjà trouvé géométriquement.

On voit de plus que ce point est à l'intersection des deux droites

$$Y = \frac{C}{B}X,$$

$$Y = tX + \frac{C - Bt}{A},$$

qui s'obtiennent, en faisant successivement dans (8) $x = 0$ et $x = \infty$. L'une d'elles passe par le point principal multiple ; l'autre est parallèle à la droite (6).

9. La réciproque est vraie ; c'est-à-dire que, si un point O du plan d'un faisceau de caractéristique v est tel, que pour toute droite passant par O les tangentes aux courbes du faisceau, en leurs points d'intersection avec cette droite, concourent en un même point, le point O est un point principal multiple d'ordre v^2 pour le faisceau.

En effet, recommençons le calcul fait plus haut (8), mais sans remplacer cette fois dans (2) L , M et N par les expressions (7) : l'équation (9) de la tangente en un point quelconque de la droite (6) devient alors

$$(10) \quad (Ltx - N)X - (Lx - M)Y - x(Mt - N) = 0.$$

Il est clair que, si M et N contiennent des termes de degré supérieur à ν , x^ν ne se trouvera pas en facteur quand on substituera $y = tx$; par conséquent, x n'entrera plus linéairement dans l'équation (10) de la tangente, et il ne sera plus vrai de dire que les tangentes aux divers points de la droite (6) concourent en un même point. Pour que ce fait ait lieu, il faudra que M et N se réduisent aux termes de degré ν en x et y , ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un point principal multiple d'ordre ν^2 (6).

10. Des deux théorèmes, réciproques l'un de l'autre, que nous venons de démontrer (8 et 9), on déduit une conséquence intéressante qui est la suivante.

Imaginons que l'on définisse une courbe par une propriété de sa tangente, et que cette propriété soit de telle nature que : 1° *par un point M quelconque du plan on ne puisse faire passer qu'une droite satisfaisant aux conditions imposées à la tangente*; 2° *lorsque le point M se déplace sur une droite passant par un certain point fixe O, la tangente en M converge en un point I dont la position dépende uniquement de OM*.

D'après la première condition, on voit que *la courbe cherchée fait partie d'un faisceau, c'est-à-dire qu'elle a une équation différentielle du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$* . La seconde condition indique en outre que, *si l'on prend le point O pour origine des coordonnées, les polynômes M et N, ainsi que L, de l'équation différentielle mise sous la forme (2), seront homogènes en x et y*.

Il y a plus : non-seulement on peut ainsi prévoir d'avance la forme de l'équation différentielle résolvant le problème, mais on peut encore affirmer que l'intégration de cette équation se ramène aux quadratures. Cette intégration se conclut, en effet, par une généralisation immédiate, de la méthode donnée par M. Darboux, pour le cas particulier de $\nu = 2$, dans le beau Mémoire (1) que nous avons déjà eu l'occasion de citer. Il n'y a qu'à suivre la même marche; pour cela, rendons l'équation (2) homogène, en rempla-

(1) *Loc. cit.*, p. 124.

çant x et y respectivement par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; l'équation (2) devient

$$L(xy - ydx) + M(ydz - zdy) + N(zdx - xdz) = 0,$$

L , M et N restant des polynômes homogènes en x et y seulement. Faisons maintenant $y = 1$, et par suite $dy = 0$; l'équation précédente peut alors s'écrire

$$(M - Nx) \frac{dz}{dx} + Nz - L = 0.$$

C'est, comme on le voit, une équation différentielle linéaire par rapport à z , dont on sait ramener immédiatement l'intégration aux quadratures.

III. — Applications.

11. Nous allons donner quelques exemples de courbes définies par une propriété de leur tangente, de telle nature que la tangente en un point M d'une pareille courbe passe par un point I dépendant uniquement de la direction du rayon vecteur OM , qui joint un point O fixe au point M .

PROBLÈME I. — *On donne dans un plan une conique et un point fixe O , et l'on demande de trouver une courbe, telle que la tangente en un point quelconque M de cette courbe passe par le pôle I de OM par rapport à la conique.*

Il est tout d'abord facile de voir que la solution comporte une infinité de courbes formant un faisceau; cela résulte de ce que par chaque point M il ne passe qu'une seule transversale OM , laquelle n'a qu'un pôle I par rapport à la conique fixe donnée; d'où il suit que la droite MI est unique pour chaque point M . D'autre part, la position du point I ne variant pas lorsque le point M se déplace sur la transversale, on en conclut que le système admet en O un point principal multiple d'un ordre égal à sa caractéristique ν .

Cherchons quelle sera la valeur de cette caractéristique ν , c'est-à-dire du degré des polynômes L , M , N , dans l'équation différentielle. A cet effet, remarquons d'abord que, quand on fait tourner la transversale OM , le point I décrit la polaire Ω du point O par

rapport à la conique donnée. Cela posé, considérons une droite Δ quelconque, et cherchons combien il y aura de branches de courbes, satisfaisant à la question, tangentes à cette droite. Les points de contact cherchés sont évidemment sur la transversale, ou les transversales, partant du point O , qui correspondent au point I d'intersection de Δ et de Ω ; or, d'après la définition donnée plus haut, il n'y a qu'une transversale répondant à la question : c'est la polaire du point I par rapport à la conique. Les courbes cherchées ne toucheront par suite Δ qu'en un point, intersection de cette droite avec la transversale ainsi déterminée. De là nous concluons que les polynômes L , M et N seront du premier degré, c'est-à-dire que l'équation différentielle sera un cas particulier de l'équation de Jacobi.

12. On sait que, dans le cas actuellement considéré, le système de courbes défini par l'équation différentielle admet trois points principaux : l'un de ces points est le point O ; les deux autres sont les points de contact A et B des tangentes menées du point O à la conique donnée. Cela résulte de ce que, le pôle I de la transversale OA par rapport à la conique coïncidant avec le point A , la tangente en A de la courbe du système qui y passe est indéterminée; de même pour B .

En intégrant l'équation différentielle, on trouverait comme résultat le faisceau des coniques bitangentes à la conique proposée aux points A et B . On peut d'ailleurs le prévoir géométriquement, en vertu d'une propriété bien connue : en effet, considérons une transversale quelconque OM et le point I correspondant : on sait que OI est conjuguée harmonique de OM par rapport à OA et OB , c'est-à-dire que la droite OM a le même pôle I par rapport aux diverses coniques bitangentes, en A et B , à OA et OB . Donc, etc.

13. PROBLÈME II. — *Étant données dans un plan quatre droites fixes A , B , C , D et un point fixe O , on joint ce point à un point M pris arbitrairement, et l'on décrit une conique tangente aux cinq droites A , B , C , D et OM : on demande de trouver un système de courbes tel, que la tangente en M à la courbe qui y passe aboutisse au centre I de la conique.*

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'à un point M choisi à

volonté il ne correspond qu'une conique, à savoir la conique tangente aux cinq droites A, B, C, D et OM , et, par suite, qu'un seul point I , qui est le centre de cette conique. On ne peut donc tracer en M qu'une tangente : d'où nous concluons que le système est un faisceau. De plus, le point I restant invariable, quand le point M se déplace sur la droite OM , le point O est un point principal multiple d'un ordre égal à la caractéristique ν du faisceau.

On peut déterminer cette caractéristique géométriquement. Pour cela, cherchons en combien de points les courbes du système touchent une droite quelconque Δ : remarquons qu'en vertu d'un théorème bien connu le lieu des points I correspondant aux différentes droites partant du point O est une droite Λ , puisque c'est le lieu des centres des coniques tangentes aux quatre droites A, B, C, D . Soit I le point d'intersection de Δ et de Λ : décrivons la conique tangente à A, B, C, D et ayant pour centre le point I , laquelle est unique, comme on le sait ; puis, du point O menons les deux tangentes à cette conique. Les points cherchés doivent se trouver à l'intersection de Δ avec ces deux tangentes : d'où nous concluons que l'on a $\nu = 2$.

14. Le point O étant un point principal multiple d'un ordre de multiplicité égal à $\nu^2 = 4$, il doit exister $\nu + 1 = 3$ autres points principaux. Ce sont les positions du point I , situées respectivement sur les transversales OM auxquelles elles correspondent ; mais chacun des points I est le centre d'une conique tangente à A, B, C, D et à OM ; par suite, pour que la circonstance indiquée soit réalisée, il faut que OM soit une asymptote de la conique. Or, considérons le lieu des points de contact des tangentes menées du point O à toutes les coniques tangentes aux droites A, B, C, D : ce lieu est une courbe du troisième ordre ayant un point double en O , car il existe une de ces coniques et une seule tangente à une droite quelconque issue du point O , et il y a deux de ces coniques qui passent en ce point. Cela posé, on aura évidemment les trois droites cherchées, en prenant les parallèles menées par O aux trois directions asymptotiques de la courbe du troisième ordre considérée.

On voit, d'après ce qui précède, que la détermination des trois points principaux dépendrait d'une équation du troisième degré.

Dans l'exemple qui va suivre, et pour lequel on a encore $\nu = 2$, il existe trois points principaux simples qui se construisent avec la règle et le compas.

15. PROBLÈME III. — *On donne deux droites A et B se coupant en un point d, et trois points fixes O, g et h; par le point O on mène une transversale aboutissant à un point M pris arbitrairement; cette transversale rencontre respectivement en a et b les deux droites A et B; on joint a et g, ainsi que b et h : les deux droites obtenues se coupent en un point I. On demande d'étudier le système de courbes défini par la condition que la tangente en M à la courbe qui y passe converge au point I.*

On voit d'abord immédiatement, en répétant le raisonnement déjà fait pour les deux exemples précédents, que le système en question est un faisceau, ayant en O un point principal multiple d'un ordre égal à ν^2 , ν étant la caractéristique de ce faisceau.

Pour trouver cette caractéristique, remarquons que le lieu du point I, pour les diverses positions de OM, est une conique qui passe par les trois points d, g, h. En effet, la transversale OM détermine sur A et B deux divisions homographiques : par suite, ga et hb sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et leur intersection I, d'après une propriété bien connue, décrit une conique (C) contenant les points g et h. Cette conique passe en outre par le point d; en effet, lorsque la transversale coïncide avec Od, les deux points a et b se confondent en d, et il en est par suite de même du point I.

16. Cela posé, cherchons en combien de points une droite quelconque Δ est tangente à des courbes du faisceau. Cette droite Δ coupe la conique (C) en deux points I : chacun de ces points I détermine une transversale OM et une seule, que l'on obtient en joignant les points a et b, où les droites Ig et Ih rencontrent respectivement A et B. Les points d'intersection de Δ avec les deux transversales ainsi construites sont les seuls points en lesquels Δ soit tangente à des courbes du faisceau. Donc on a $\nu = 2$.

Le faisceau admettant sept points principaux, et le point O.

d'après ce que nous avons vu plus haut, comptant pour quatre, il doit exister trois autres points principaux. L'un de ces points est évidemment le point d , ce point coïncidant avec le point I , lorsque la transversale OM se confond avec Od . Les deux autres points principaux sont les points e et f , où Og et Oh rencontrent respectivement les droites B et A . En effet, considérons par exemple la transversale Og qui coupe A et B respectivement aux points α et e : le point I correspondant est donné par l'intersection de $g\alpha$ et de he ; mais, $g\alpha$ se confondant avec la transversale, son point d'intersection avec he n'est autre que le point e : le point e est donc une position du point I pour laquelle ce point se trouve sur la transversale correspondante : c'est donc un point principal. Le même raisonnement s'applique au point f .

17. PROBLÈME IV. — *Étant donné un point O fixe et une courbe (C) d'ordre p , ayant un point multiple K d'ordre $p - 1$, on joint le point O à un point quelconque M , puis du point K on abaisse une perpendiculaire sur OM qui rencontre la courbe (C) en un nouveau point I . On demande d'étudier le système de courbes tel, que la tangente en M , à la courbe qui y passe, aboutisse au point I .*

On voit tout de suite que le système qui vient d'être défini est un faisceau, ayant un point principal multiple, d'un ordre égal à ν^2 , ν désignant la caractéristique du faisceau.

Pour avoir cette caractéristique ν , c'est-à-dire le nombre des points de contact des courbes du faisceau avec une droite quelconque Δ , considérons les p points I d'intersection de cette droite avec la courbe (C) ; joignons ces points au point K , et abaissons de O des perpendiculaires sur les droites ainsi obtenues : on a de la sorte p transversales OM , à chacune desquelles correspond un des p points I d'intersection de Δ et de (C) : les points de rencontre de ces transversales avec Δ sont les points en lesquels Δ est tangente à des courbes du faisceau : d'où l'on conclut $\nu = p$.

18. Le point O étant, d'après ce que l'on a vu, un point principal multiple d'ordre p^2 , et le nombre total des points principaux étant égal à $p^2 + p + 1$ (§), il reste $p + 1$ points principaux à dé-

terminer. Ces points, comme dans les exemples précédents, sont les positions du point I situées respectivement sur les transversales OM qui leur correspondent : ils doivent, par suite, coïncider avec les pieds des perpendiculaires abaissées de K sur lesdites transversales. Or, les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur le cercle décrit sur OK comme diamètre. Les points principaux cherchés devant se trouver à la fois sur ce cercle et sur la courbe (C) sont situés à l'intersection de ces deux lignes. Le nombre total de ces points d'intersection est $2p$; mais il y en a $p-1$ qui sont confondus avec K, et qui ne satisfont pas à la condition voulue pour être des points principaux; les points restants, au nombre de $p+1$, sont les points principaux cherchés.

19. Appliquons les résultats précédents au cas où la courbe (C) se réduit à une droite D. L'énoncé du problème devient alors le suivant :

Étant donnés deux points fixes O et K, et une droite fixe D, on joint le point O à un point quelconque M, puis du point K on abaisse une perpendiculaire sur OM qui rencontre la droite D en un point I. On demande quel est le système de courbes tel, que la tangente en M, à la courbe qui y passe, aboutisse au point I.

Nous savons immédiatement que les courbes ainsi définies forment un faisceau dont la caractéristique ν est égale à l'unité, et que les trois points principaux simples de ce faisceau sont le point O et les deux points d'intersection de D avec le cercle décrit sur OK comme diamètre. Il résulte de là que l'équation différentielle du système est un cas particulier de l'équation de Jacobi; nous allons l'intégrer par la méthode géométrique, que nous avons donnée il y a quelques années, pour ce genre d'équations (1).

20. Formons l'équation différentielle du problème en prenant pour origine des coordonnées le point O, et pour axes deux droites rectangulaires dont l'une, l'axe des x , soit parallèle à la droite D. Soient

$$(11) \quad X = h$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1093 et 1837.

l'équation de la droite D, α et β les coordonnées du point K. Désignons par x, y les coordonnées du point M, et par X, Y les coordonnées courantes. L'équation de la perpendiculaire à OM menée par le point K est

$$(12) \quad Y - \beta = -\frac{x}{y}(X - \alpha).$$

Les équations (11) et (12) fournissent immédiatement les coordonnées du point I, qui sont

$$\begin{aligned} X &= h, \\ Y &= \beta - \frac{x}{y}(h - \alpha). \end{aligned}$$

Écrivons que le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la courbe du faisceau qui passe par le point M est égal au coefficient angulaire de MI; on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta + \frac{x}{y}(h - \alpha)}{x - h},$$

ou bien

$$(13) \quad y(xdy - ydx) + [(a - h)x + \beta y]dx - h y dy = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes cherchées. Nous pouvons, au moyen de cette équation, retrouver les points principaux du faisceau. Ces points sont fournis par les systèmes de valeurs de x et y qui vérifient les équations

$$(14) \quad \begin{cases} xy - hy = 0, \\ y^2 - (a - h)x - \beta y = 0. \end{cases}$$

La première équation se dédouble en $y = 0$ et $x = h$. En faisant $y = 0$ dans la seconde, on obtient $x = 0$; on retrouve ainsi comme point principal le point O. Pour $x = h$, la seconde équation devient une équation du deuxième degré en y , et détermine deux autres points principaux situés sur D. On voit, d'ailleurs, immédiatement que ces points sont situés sur la courbe

$$x^2 + y^2 - ax - \beta y = 0,$$

qui n'est autre que le cercle décrit sur OK comme diamètre. C'est le résultat déjà trouvé géométriquement.

21. Cela posé, si nous appelons

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

les équations des droites EF, OF, OE, qui joignent deux à deux les trois points principaux, et si nous désignons par ρ le rapport anharmonique constant $\frac{\sin \text{IME}}{\sin \text{IMF}} : \frac{\sin \text{OME}}{\sin \text{OMF}}$, l'intégrale générale de l'équation (13) peut s'écrire

$$(15) \quad u^{1-\rho} v^{\rho} w^{-1} = C,$$

C désignant une constante arbitraire ⁽¹⁾.

La droite $u = 0$ n'est autre que $x - h = 0$. Pour avoir les équations des deux autres, retranchons membre à membre les équations (14), après les avoir multipliées respectivement par x et par y : on obtient

$$(\alpha - h)x^2 + \beta xy - hy^2 = 0,$$

équation du système des deux droites OE et OF. Les coefficients angulaires de ces deux droites sont, en conséquence, donnés par l'équation

$$hm^2 - \beta m - (\alpha - h) = 0,$$

d'où

$$m = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha h + 4h^2}}{2h}.$$

En désignant par m' et m'' ces deux coefficients angulaires, nous pouvons écrire les équations des deux droites OE et OF

$$y - m'x = 0, \quad y - m''x = 0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer ρ . Or, soient N et Q les points d'intersection de D avec OM et Ox; on a

$$\rho = \frac{\sin \text{IME}}{\sin \text{IMF}} : \frac{\sin \text{OME}}{\sin \text{OMF}} = \frac{\text{IE}}{\text{IF}} : \frac{\text{NE}}{\text{NF}}.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1837.

Ce rapport anharmonique étant constant ⁽¹⁾, quelle que soit la droite OM, évaluons-le dans le cas particulier où OM coïncide avec Ox. Alors le point I est rejeté à l'infini, et l'on obtient

$$\rho = \frac{QF}{QE} = \frac{\text{tang } QOF}{\text{tang } QOE} = \frac{m''}{m'}.$$

En remplaçant dans (15) u , v , w et ρ par leurs expressions, et simplifiant, on trouve l'intégrale cherchée

$$(x-h)^{m'-m''}(y-m'x)^{m''}(y-m''x)^{-m'} = C.$$

Remarque. — Les courbes définies par cette équation seront algébriques, si l'on a $\alpha = \beta$, et si α est commensurable avec h .

22. Étude d'une équation différentielle. — Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers intéressants de l'équation différentielle

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)(xdy - ydx) - (ax^2 + bxy + cy^2)dy \\ + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)dx = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation définit un faisceau de caractéristique $\nu = 2$, ayant à l'origine un point principal quadruple. Il ne se distingue des autres faisceaux satisfaisant aux mêmes conditions qu'en ce que les points où la droite de l'infini est tangente à des courbes de ce faisceau sont les deux ombilics, c'est-à-dire les deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan. Cette particularité, qui disparaît au moyen d'une transformation homographique, facilite, comme on va le voir, l'étude des courbes définies par l'équation (16); et d'abord elle va nous permettre de ramener cette équation à une équation différentielle linéaire, par une mé-

⁽¹⁾ On sait d'avance que ce rapport anharmonique est constant pour tout système (1, 1) (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693); mais on peut le vérifier dans le cas actuel, en remarquant que, S étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur OM, on a

$$\frac{IE}{IF} : \frac{OE}{OF} = \frac{\sin PSE}{\sin PSF} : \frac{\sin OSE}{\sin OSF}.$$

Le second de ces rapports anharmoniques est constant, car les quatre angles dont il dépend le sont, les cinq points E, F, O, P, S étant sur le cercle décrit sur OP comme diamètre

thode différente de la méthode générale indiquée plus haut (10), et qui présente, dans certains cas, des avantages sur cette dernière.

A cet effet, effectuons un changement de variables, en posant

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

d'où

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

On tire de là, en différentiant,

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, & dy &= dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta, \\ \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} &= d\theta. \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (16), il vient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 d\theta - (\alpha \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta)(dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \\ + (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin \theta \cos \theta + \gamma \sin^2 \theta)(dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Après avoir développé et ordonné, posons

$$u = \frac{1}{r}, \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \alpha \cos^2 \theta + (\beta - a) \cos^2 \theta \sin \theta + (\gamma - b) \cos \theta \sin^2 \theta - c \sin^2 \theta &= \frac{-1}{\psi(\theta)}, \\ \alpha \cos^2 \theta + (b + a) \cos^2 \theta \sin \theta + (c + \beta) \cos \theta \sin^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta &= \frac{\varphi(\theta)}{\psi(\theta)}. \end{aligned}$$

En faisant cette substitution dans (17), on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{du}{d\theta} + u \varphi(\theta) + \psi(\theta) = 0.$$

23. D'après ce que l'on a vu plus haut (8), si l'on considère une droite quelconque OM issue de l'origine, les tangentes menées, aux divers points de cette droite, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en un même point I; et ce point est donné par l'intersection des deux droites

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{a + \beta t + \gamma t^2}{a + bt + ct^2} x, \\ y &= tx + \frac{a + (\beta - a)t + (\gamma - b)t^2 - ct^3}{1 + t^2}. \end{aligned} \right.$$

La construction du point I peut se faire d'une manière simple dans certains cas particuliers. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\beta = a, \quad b = -a, \quad c = 0, \quad \gamma = 0.$$

Les équations (18) se réduisent à

$$y = \frac{a + at}{a - at},$$

$$y = tx + a.$$

La seconde de ces équations représente une droite parallèle à OM, et passant constamment par un point fixe A ($x = 0, y = a$), quelle que soit cette droite. Quant à la première, en posant

$$\frac{a}{a} = \tan \omega, \quad t = \tan \theta,$$

son équation peut s'écrire

$$y = x \tan(\theta + \omega),$$

ce qui indique qu'elle fait avec OM un angle constant et égal à ω . De là on conclut la construction du point I pour chaque position de la droite OM : ce point se trouve à l'intersection de la parallèle à OM menée par le point A ($x = 0, y = a$) et de la droite passant par O et inclinée sur OM de l'angle ω . Le lieu des points I est par suite le segment capable de l'angle ω décrit sur OA.

24. L'équation différentielle (16) se réduit, dans le cas considéré, à

$$(19) \quad (x^2 + y^2)(x dy - y dx) - x(ax - ay) dy + x(ax + ay) dx = 0;$$

elle est la traduction analytique de l'énoncé suivant :

Étant donnés deux points fixes O et A, trouver un système de courbes telles que la tangente en un point quelconque M à la courbe qui y passe aboutisse au point I d'intersection de la parallèle à OM menée par le point A, avec la droite inclinée d'un angle constant ω sur OM et menée par le point O.

Cherchons à intégrer l'équation (19). Pour cela, écrivons-la de

la manière suivante :

$$(x^2 + y^2 - ax)(x dy - y dx) + ax(x dx + y dy) = 0,$$

ou bien, en effectuant les changements de variables indiqués précédemment (22),

$$r(r - a \cos \theta) d\theta + a dr \cos \theta = 0,$$

ou encore

$$\frac{du}{d\theta} + \frac{a}{\alpha} u - \frac{1}{\alpha \cos \theta} = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire, dont l'intégrale générale est

$$u = e^{-\int_0^{\theta} \frac{a d\theta}{\alpha}} \left(C - \int_0^{\theta} e^{\int_0^{\theta} \frac{a d\theta}{\alpha}} \frac{d\theta}{\alpha \cos \theta} \right),$$

ou bien

$$(20) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{a}{\alpha}(\theta - \theta_0)} \left[C - \int_0^{\theta} e^{\frac{a}{\alpha}(\theta - \theta_0)} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right].$$

25. Considérons le cas particulier où $a = 0$, c'est-à-dire $\omega = \frac{\pi}{2}$.

L'intégrale précédente se simplifie et se réduit à

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \left(C - \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right),$$

d'où l'on conclut, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \left[C - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

ou encore

$$(21) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \quad (1).$$

Dans ces équations, C et K désignent des constantes arbitraires.

(1) En faisant tourner l'axe polaire d'un angle égal à $2\pi - \theta$, cette équation devient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{K}{\tan \frac{\theta}{2}}.$$

Nous avons ainsi, en termes finis, l'équation générale des courbes qui répondent à la question suivante :

Étant donnés deux points fixes O et A, trouver un système de courbes tel, que la tangente en M à la courbe qui y passe aboutisse au point I d'intersection de la parallèle à OM menée par le point A avec la perpendiculaire à cette droite menée par le point O.

IV. — Courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, éclairée par des rayons convergents.

26. Examinons maintenant le cas où l'on a

$$b = 0, \quad c = -a, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2a, \quad \gamma = 0.$$

L'équation (16) devient

$$(22) \quad (x^2 + y^2)(x dy - y dx) - a(x^2 - y^2) dy + 2axy dx = 0.$$

Pour intégrer cette équation, servons-nous de la transformation indiquée plus haut (22) : elle devient alors, toutes réductions faites,

$$a \sin \theta \frac{dr}{d\theta} - ar \cos \theta + r^2 = 0,$$

ou encore

$$a \sin \theta \frac{du}{d\theta} + au \cos \theta = 1.$$

En remarquant que le premier membre de la dernière équation est la dérivée exacte de $au \sin \theta$, et désignant par ω un angle constant, on obtient l'intégrale cherchée, qui est

$$au \sin \theta = \theta - \omega,$$

d'où l'on tire, à cause de $\frac{1}{u} = r$,

$$(23) \quad r = \frac{a \sin \theta}{\theta - \omega}.$$

27. Les courbes définies par une équation de cette forme jouissent d'une propriété remarquable : ce sont les *projections, sur un plan horizontal, des lignes d'ombre propre d'une surface de vis à filet carré à axe vertical, éclairée par des rayons lumineux convergents.*

Nous avons déjà rencontré ce résultat dans une étude *Sur les surfaces de vis*, insérée au *Compte rendu du Congrès de Paris de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (p. 177). Nous allons en donner ici une nouvelle démonstration directe, à l'aide de quelques considérations géométriques fort simples.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan perpendiculaire à l'axe de la surface de vis qui contient le point lumineux A, et, dans ce plan, rapportons la projection de la courbe d'ombre propre à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le pied O de l'axe de la surface de vis, et pour axe polaire Ox la droite joignant le point O au point lumineux A. Posons $OA = a$, et désignons par ω l'angle que fait avec Ox la génératrice de la surface située dans le plan horizontal. En appelant h le pas de la surface de vis, et p le paramètre de distribution commun à toutes les génératrices, on a, comme on sait, $p = \frac{h}{2\pi}$.

28. Cela posé, considérons une génératrice quelconque G dont la projection horizontale Og fait avec Ox un certain angle que nous désignerons par θ , et évaluons la distance $Om = r$ du point O au point m , projection horizontale du point M de la courbe d'ombre situé sur G. Ce point M n'est autre chose que le point de la génératrice G en lequel le plan passant par cette droite et le point lumineux A est tangent à la surface; en désignant par φ l'angle de ce plan avec le plan projetant horizontalement la génératrice G, et se rappelant que ce dernier plan est le plan central de la génératrice et que le point central est situé sur l'axe, on a

$$(24) \quad r = p \tan \varphi.$$

Évaluons $\tan \varphi$; pour cela, soient l la distance du point A à Og et d la hauteur de G au-dessus du plan horizontal de projection. On a évidemment

$$\tan \varphi = \frac{l}{d};$$

mais on a aussi d'autre part

$$l = a \sin \theta, \quad d = \frac{h}{2\pi} (\theta - \omega).$$

En tenant compte de ces expressions, et substituant à p et à $\tan \varphi$

leur valeur dans la relation (24), on obtient

$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta - \omega},$$

équation polaire de la projection horizontale de la courbe d'ombre. C'est identiquement, comme on le voit, l'équation (23) (1).

29. *Remarques.* — 1° L'équation trouvée est indépendante du pas h de la surface de vis; on en conclut que *la projection horizontale de la courbe d'ombre est la même, pour toutes les surfaces de vis à filet carré de même axe, éclairées par le même point lumineux, et ayant en commun une génératrice située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux.*

2° Pour une même surface de vis à filet carré, si l'on déplace le point lumineux sur une verticale, on obtient une succession de courbes d'ombre, et, pour avoir les équations polaires des projections horizontales de ces courbes, il n'y a qu'à faire varier ω dans l'équation (23). L'angle ω n'étant autre chose que la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (22), on en conclut que, *sur un même plan horizontal, les projections des courbes d'ombre d'une surface de vis à filet carré, éclairée par une série de points lumineux situés sur une parallèle à l'axe de la surface, forment un faisceau de caractéristique égale à 2, ayant pour point principal quadruple le pied de l'axe sur le plan de projection.*

30. Les points principaux du faisceau des courbes d'ombre sont donnés par le système des deux équations

$$(25) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0, \\ (x^2 + y^2)y - 2axy = 0. \end{cases}$$

La seconde équation se dédouble en $y = 0$, et

$$(26) \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

(1) Dans le cas où ω est nul, c'est-à-dire où le point lumineux est sur la surface, l'équation se réduit à $r = \frac{a \sin \theta}{\theta}$. Elle est vérifiée, quel que soit r , pour $\theta = 0$, ce qui signifie que l'axe polaire, ou bien la génératrice qui contient le point lumineux, fait partie de la ligne d'ombre; c'est évident géométriquement.

En faisant $y = 0$ dans la première des équations (25), elle se réduit à

$$x^2(x - a) = 0,$$

ce qui donne comme point principal, en dehors du point O déjà connu, le point A ($x = a, y = 0$), c'est-à-dire la projection horizontale du point lumineux.

En vertu de l'équation (26), remplaçons dans la première des équations (25) $x^2 + y^2$ par $2ax$; nous obtenons

$$x^2 + y^2 = 0,$$

équation qui, combinée avec (26), fournit les deux autres points principaux; ce sont, comme on le voit, les deux ombilics du plan.

En résumé, *les points principaux du faisceau composé des projections des courbes d'ombre de la surface de vis à filet carré comprennent le pied de l'axe de la surface de vis qui compte pour quatre points, la projection du point lumineux et les deux ombilics du plan.*

31. Les deux équations (25) se prêtent à une interprétation géométrique très-simple : elles définissent respectivement les lieux des points de contact des tangentes aux courbes du faisceau parallèles à l'axe des y et à l'axe des x .

La seconde des équations (25), nous l'avons déjà vu, se double en

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Le lieu qu'elle définit comprend, par suite, la droite OA, ce qui s'explique par cette raison que la droite OA fait partie du faisceau (28); il comprend, en outre, le cercle décrit du point A comme centre avec AO pour rayon.

Quant à la première des équations (25) (1), on reconnaît qu'elle n'est autre que l'équation de la *strophoïde droite* ayant pour point double le point O et pour sommet le point A. On conclut de là le résultat suivant :

Les points de contact des tangentes menées à la projection

(1) Ou, en coordonnées polaires, $r = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$.

horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, parallèlement à la droite qui joint le pied de l'axe à la projection du point lumineux, sont situés sur le cercle décrit de ce dernier point comme centre et passant par le pied de l'axe.

Les points de contact des tangentes à la même courbe perpendiculaires à la direction précédente, sont situés sur une strophoïde droite, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis, et pour sommet la projection du point lumineux.

On peut ajouter, à cause de la forme même de l'équation (22), que les points de contact des tangentes menées à la même courbe parallèlement à une direction fixe, mais d'ailleurs quelconque, sont sur une anallagmatique du troisième ordre, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis. L'asymptote réelle est parallèle à la direction choisie, et les tangentes au point double sont rectangulaires.

32. *Construction de la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre.* — Pour avoir la tangente en un point quelconque M de la projection de la courbe d'ombre, il suffit de déterminer le point I auquel aboutissent les tangentes aux courbes du faisceau (22) menées aux divers points de rencontre de ces courbes avec OM.

Ce point I est déterminé par l'intersection des deux droites (18) dont les équations deviennent, dans le cas actuel,

$$(27) \quad y = \frac{2t}{1-t^2} x,$$

$$(28) \quad y = t(x + a).$$

A cause de $t = \tan \theta$, l'équation (27) peut s'écrire

$$y = x \tan 2\theta.$$

Par suite, la droite qu'elle définit fait avec Ox un angle double de l'angle formé par OM avec la même droite; autrement dit, elle est symétrique de Ox par rapport à OM.

La droite (28) est la parallèle à OM menée par le point fixe B, symétrique de A par rapport à O. De la construction de ces

deux droites on conclut immédiatement que le point I s'obtient en prenant le symétrique du point A par rapport à OM.

En conséquence, *la tangente, en un point quelconque M de la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, s'obtient en joignant le point M au point symétrique de la projection du point lumineux, par rapport à la droite qui joint M au pied de l'axe de la surface de vis.*

Cette construction donne, comme cas particulier, celle de l'asymptote. L'équation (23) indique, et on le voit d'ailleurs géométriquement, que la courbe a une asymptote parallèle à la génératrice de la surface de vis située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux. L'asymptote elle-même est la parallèle à cette génératrice menée par le point B.

33. La construction à laquelle nous venons d'arriver, pour la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, se trouve mentionnée dans la Note sur les surfaces de vis que nous avons communiquée au Congrès de Paris de l'Association française : à ce moment-là cette construction nous avait paru nouvelle ; mais depuis nous l'avons retrouvée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie (III^e Partie, p. 148), où elle est obtenue d'une manière simple et élégante par la considération d'un parabolôïde osculateur. Nous saisissons l'occasion qui se présente de restituer au savant géomètre la priorité qui lui appartient dans cette question, en appelant seulement l'attention sur la méthode toute différente qui nous a conduit à la résoudre, et notamment sur l'équation très-simple en coordonnées polaires de la projection horizontale de la courbe d'ombre, qui nous semble n'avoir pas été signalée jusqu'ici dans les traités de Géométrie descriptive. Cette équation, non-seulement se prête à la détermination facile de la tangente, comme nous l'avons vu, mais elle permet aussi de se rendre compte très-aisément de l'allure générale et des particularités intéressantes que présente la courbe.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 28 FÉVRIER 1879.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

Élection : M. E. Picard, présenté dans la séance précédente, est élu Membre de la Société.

Présentation de nouveaux Membres : M. Appell, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, est présenté par MM. Lemonnier et Picquet. M. Stéphanos est présenté par MM. Halphen et Laguerre.

Communications :

M. Laguerre ajoute quelques développements à la Communication faite par lui à la dernière séance *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

M. Halphen : *Sur la multiplication des fonctions elliptiques.*

M. Laquière adresse une Note *Sur la Géométrie des quinquonces.*

SÉANCE DU 14 MARS 1879.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

Élections : MM. Appell et Stéphanos, présentés dans la dernière séance, sont élus Membres de la Société.

Présentation d'un nouveau Membre : M. Borchardt, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, est présenté par MM. Hermite et Laguerre.

Communications :

M. Darboux : *Sur la théorie des quadrilatères articulés.*

M. Vicaire : *Sur le calcul des intensités d'une série de courants dérivés.*

M. Halphen : *Sur les faisceaux de courbes unicursales.*

M. le comte Hugo adresse une Note *Sur un diagramme des variations de la scintillation selon les saisons.*

SÉANCE DU 28 MARS 1879.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Élection : M. Borchardt, présenté à la dernière séance, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Rodet : *Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre.*

M. Stéphanos : *Sur une généralisation de la théorie des groupes projectifs de Staudt.*

M. E. Picard : *Sur le développement des fonctions analytiques multiformes.*

La Société reçoit de M. Halphen une Note *Sur le développement des fonctions elliptiques*; de M. Saltel, une Note *Sur divers théorèmes et problèmes de Géométrie*; de M. le comte Hugo, une Note *Sur les sphères hexagonales d'un collier égyptien.*

SÉANCE DU 11 AVRIL 1879.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

M. Laguerre dépose sur le Bureau un extrait d'une Lettre qu'il a reçue de M. Brioschi *Sur les équations différentielles linéaires.*

Communications :

M. Halphen : *Sur diverses propriétés du faisceau formé de courbes du troisième ordre ayant trois points d'inflexion communs.*

M. Laguerre : *Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement.*

SÉANCE DU 25 AVRIL 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

M. Hermite dépose une Note *Sur l'indice des fractions rationnelles.*

Communications :

M. Borchardt : *Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments.*

M. Darboux : *Sur les quadrilatères articulés.*

M. Jordan : *Sur l'équivalence des formes algébriques.*

SÉANCE DU 9 MAI 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

M. Jung adresse une Note *relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.*

Communications :

M. Stéphanos : *Sur les réseaux de coniques et sur les courbes du troisième degré et de la troisième classe.*

M. Haag : *Sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations d'un point qui la décrit.*

M. E. Picard : *Sur les fonctions uniformes entières.*

M. Jordan : *Sur la réduction des substitutions linéaires.*

M. Picquet fait l'analyse d'un Mémoire dont il est l'auteur *Sur les courbes et surfaces algébriques anallagmatiques.*

SÉANCE DU 23 MAI 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Présentation de nouveaux membres : M. Le Paige, professeur d'Analyse mathématique à l'Université de Liège, et M. Lebon,

— 28 —

professeur de Lycée Contemporain, ont présenté par **M. LASSON**
et **L. LUCAS**.

Communications :

M. BERNARD : Sur la construction des courbes des fonctions impaires à points fixes.

M. JORDAN : Sur les transformations des courbes.

M. BARNIER : Sur les courbes planes et l'équation des courbes de troisième degré.

SÉANCE DU 21 JUIN 1874

PRÉSIDENCE DE **A. LEBESGUE**.

Communications :

M. HENRI DE LA GUYOLLE : Sur la similitude dans les transformations de courbes planes aux courbes spéciales.

M. SÉVERIN : Sur la construction des courbes.

SÉANCE DU 22 JUIN 1874

PRÉSIDENCE DE **A. LEBESGUE**.

Communications :

M. LEBESGUE : Sur les courbes planes et les courbes de troisième degré.

M. DE LA GUYOLLE : Sur la similitude dans les transformations de courbes planes.

M. SÉVERIN : Sur la construction des courbes.

M. LEBESGUE : Sur les courbes planes et les courbes de troisième degré.

M. LEBESGUE : Sur les courbes planes et les courbes de troisième degré.

SÉANCE DU 11 JUILLET 1879.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Rodet : *Sur les méthodes d'approximation chez les anciens.*

M. Stéphanos : *Sur le système de trois tétraèdres, dont deux quelconques sont en perspective, par rapport à chacun des sommets du troisième.*

M. Fouret : *Sur la construction de la tangente à la courbe*
$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta - m \cos \theta}.$$

M. E. Picard : *Sur la démonstration de l'existence d'une racine pour toute fonction entière.*

M. Demetre Demecsky de Gyer : *Sur la décomposition des fonctions algébriques entières, à coefficients entiers, en leurs facteurs irréductibles.*

SÉANCE DU 25 JUILLET 1879.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Alexéeff, professeur à l'Université de Moscou : *Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre.*

M. E. Picard : *Sur l'intégration de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q = 0,$$

dans laquelle p et q sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

M. Lemonnier : *Sur un déterminant dont les lignes se déduisent les unes des autres par des permutations circulaires.*

M. Stéphanos : *Sur un certain covariant relatif à une courbe de la classe m et à une conique.*

M. Rodet : *Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$.*

TABLE DES MATIÈRES.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

	Pages.
État du Bureau et du Conseil pour l'année 1879.....	5 et 65
Séance du 8 novembre 1878.....	63
Séance du 22 novembre 1878.....	63
Séance du 13 décembre 1878	64
Séance du 27 décembre 1878...	64
Séance du 10 janvier 1879.....	64
Séance du 24 janvier 1879.....	65
Séance du 14 février 1879.....	65
Séance du 28 février 1879.....	205
Séance du 14 mars 1879.....	205
Séance du 28 mars 1879.....	206
Séance du 11 avril 1879.....	206
Séance du 25 avril 1879.....	207
Séance du 9 mai 1879.....	207
Séance du 23 mai 1879.....	207
Séance du 13 juin 1879.....	208
Séance du 27 juin 1879.	208
Séance du 11 juillet 1879.....	209
Séance du 25 juillet 1879.....	209

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. G. DARBOUX.....	7
Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$; par M. LAGUERRE.....	12
Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z ; par M. LEMONNIER.....	16
Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par M. DÉBIEZ ANDRÉ.....	43

	Pages.
Sur quelques propriétés des coniques homofocales; par M. LAGUERRE.....	66
Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; par M. LAGUERRE.....	72
Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables; par M. STÉ- PHANOS.....	81
Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.....	83
Note sur la Géométrie des quinconces; par M. LAQUIÈRE.....	85
Sur le développement d'une fonction intermédiaire; par M. HALPHEN.....	92
Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde anté- rieurement à la conquête d'Alexandre; par M. L. RODET.....	98
Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. E. PICARD.....	107
Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. BRIOSCHI à M. LAGUERRE.).....	105
Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. LAGUERRE.....	108
Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. C.-W. BORCHARDT.....	124
Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. HERMITE.....	128
Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. JUNG.....	132
Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire; par M. HERMARY.....	138
Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit; par M. HAAC.....	140
Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles; par M. l'abbé AOUT.....	143
Sur les méthodes d'approximation chez les anciens; par M. L. RODET.....	159
Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre; par M. N. ALEXÉEFF.....	167
Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indé- terminée $ax + by = c$; par M. L. RODET.....	171
Calcul d'un déterminant; par M. H. LEMONNIER.....	173
Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν ; par M. G. FOURET.....	177

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME VII.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME CINQUIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1877

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois ; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs ; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

252 PARIS. — IMPRIMERIE DE TOUTIER-VILLARD, QUAI DES ACCEUSES, 25

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE
PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SIXIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1878

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents. Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages émis par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois ; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs ; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

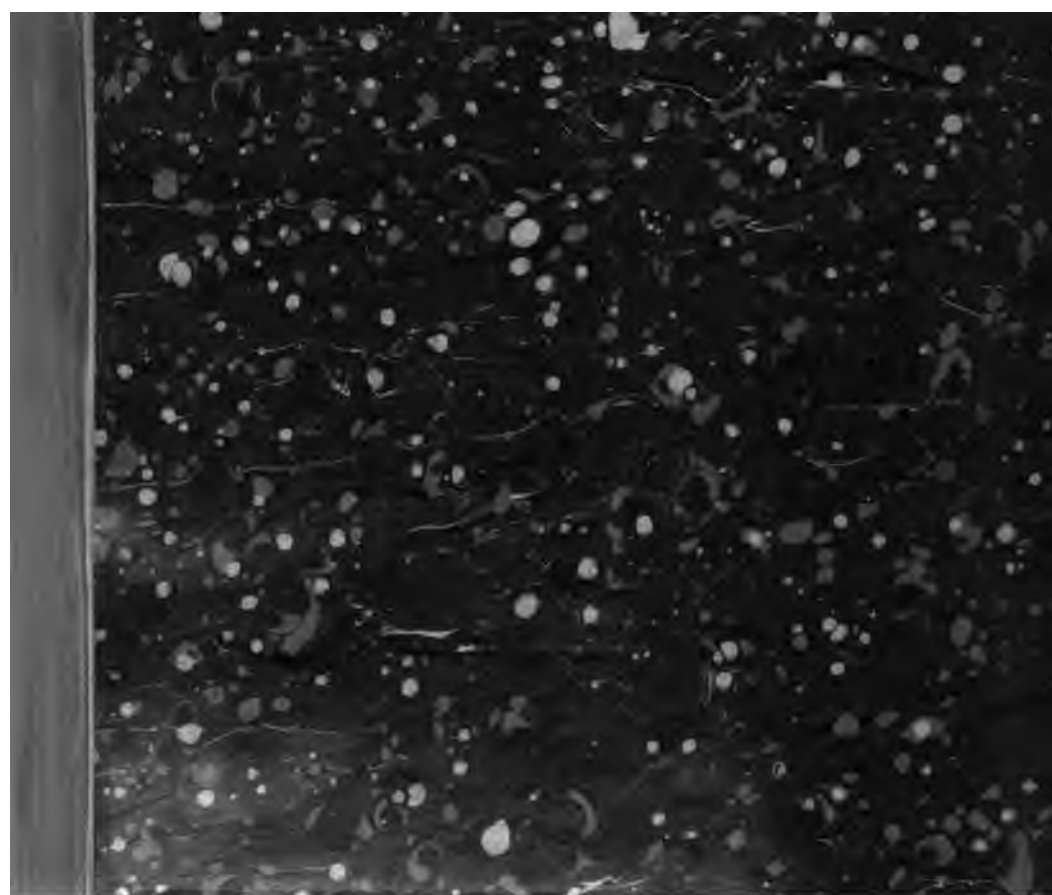
Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

— — — — —
1963 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.
— — — — —









DEC 28 1972

